

Matrius-Sistemes d'equacions

Grau en Enginyeria Química

Grau en Enginyeria en Organització Industrial i Logística

Albert Granados

`albert.granados@udl.cat`

Departament de Matemàtica

Escola Politècnica Superior
Campus Universitari Igualada - UdL

Curs 2025-26

Sistemes d'equacions lineals

Un sistema de m equacions lineals amb n incògnites $x_1, x_2, \dots, x_n$ amb coeficients reals és de la forma següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

on $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

- Als elements a_{ij} se'ls anomena **coeficients**.
- Als b_i se'ls anomena **termes independents**.
- A $x_1, x_2, \dots, x_n$ se'ls anomena **incògnites** del sistema.

Formulació matricial

Considerem les matrius següents associades a un sistema d'equacions lineals:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

On:

- La matriu A és la **matriu de coeficients**.
- x és el vector d'**incògnites**.
- b és el vector de **termes independents**.

Aleshores, el sistema d'equacions es pot escriure en forma matricial:

$$Ax = b$$

Sistema incompatible

Existeix alguna contradicció entre les equacions. Per exemple:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4x + 6z = 4 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

La segona i tercera equació es contradueixen. Per tant, el sistema no té **cap solució**.

Sistemes compatibles i incompatibles

Sistema incompatible

Existeix alguna contradicció entre les equacions. Per exemple:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4x + 6z = 4 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

La segona i tercera equació es contradiuen. Per tant, el sistema no té **cap solució**.

Sistemes compatibles: S.C.

Si no hi ha contradicció entre les equacions, aleshores el sistema és comatible i té **almenys** una solució.

Sistemes compatibles: S.C.

Un sistema compatible té una única solució?

Potem tenir equacions redundants:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + 6z = 4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \text{ La primera i segona equació són la mateixa.}$$

Sistemes compatibles indeterminats: S.C.I.

El nombre d'equacions no redundants és menor que el nombre d'incògnites. El sistema tindrà infinites solucions.

Sistemes compatibles determinats: S.C.D.

Si tenim tantes equacions no redundants com incògnites el sistema tindrà una única solució.

La matriu ampliada del sistema d'equacions és:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Classificació de sistemes per rangs

- El $\text{rang}(A^*)$ ens diu quantes equacions independents hi ha
- El $\text{rang}(A)$ ens diu quantes files de coeficients independents hi ha.

Toerema de Rouché-Frobenius

Tenim un sistema amb m equacions i n incògnites. Aleshores,

- Si

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$$

aleshores el sistema és **compatible**: els termes independents respecten les possibles combinacions que hi hagi amb els coeficients; per tant, no hi ha contradiccions.

- Si

$$\text{rang}(A) < \text{rang}(A^*)$$

aleshores el sistema és **incompatible**: hi ha dependència entre els coeficients però els termes independents no la respecten. Per tant, hi ha contradiccions.

Teorema de Rouché-Frobenius

Suposem que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = r$ (tenim un sistema compatible). Aleshores,

- Si $r = n$ tenim tantes equacions independents com incògnites: **Sistema Compatible Determinat** (una única solució)
- Si $r < n$ tenim més incògnites que equacions independents: **Sistema Compatible Indeterminat** (infinites solucions)

Un sistema d'equacions lineals és **homogeni** si tots els termes independents són nuls ($b_i = 0$).

- Un sistema homogeni **sempre és compatible**, ja que $(0, 0, \dots, 0)$ sempre és una solució. Aquesta s'anomena **solució trivial**.
- Si A és una matriu quadrada (mateix nombre d'equacions que d'incògnites), aleshores un sistema lineal homogeni té solució diferent de la trivial si i només si:

$$\det A \neq 0$$

Consisteix en trobar una matriu esglaonada B^* equivalent a la matriu ampliada A^* del sistema.

$$A^* \sim \dots \sim B^*$$

Aleshores, el sistema associat a aquesta nova matriu esglaonada s'anomena **sistema esglaonat**, té les mateixes solucions que el sistema inicial i és de fàcil resolució (substitució enrera).

Regla de Cramer

Un sistema de m equacions lineals amb n incògnites és un **sistema de Cramer** si $n = m$ i $\det A \neq 0$, on A és la matriu de coeficients.

Regla de Cramer

Un sistema de Cramer és compatible determinat i el valor de la incògnita x_i ve donat per:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

on la columna de les b_k substitueix la columna i -èsima de la matriu A .