

Límits i continuïtat

1^r Batxillerat

5 de febrer de 2024

Nom i Cognoms: _____

1. (2 punts) Calculeu el següent límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2 - 3} \right)^{n^2 - 2n + 1}$$

Solució:

Es tracta d'una indeterminació del tipus 1^∞ . Per resoldre-la hem de reescriure la base:

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 - 3}{2}} \right)^{n^2 - 2n + 1}$$

i el límit serà

$$e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{\frac{n^2 - 3}{2}}} = e^2$$

2. (2 punts) Estudieu la continuïtat de la següent funció, fent, si cal, els límits laterals

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-9} & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

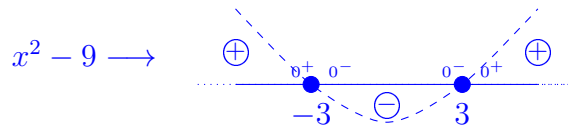
Solució:

El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = -3$ i $x = 3$, però aquest darrer queda fora del rang perquè no compleix la desigualtat $x \leq 1$. La segona branca no presenta cap problema. Així només caldrà estudiar la continuïtat de la funció en $x = -3$ i $x = 1$, que és on es canvia de branca.

- En $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{-4}{0}$$

Es tracta per tant d'una discontinuïtat asimptòtica. Caldrà fer els límits laterals per acabar l'estudi. El denominador passa de ser positiu a negatiu en $x = -3$



Per tant quedarà,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

- En $x = 1$. Tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-9} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0$$

Com els límits laterals coincideixen i, a més, $f(0) = 0$, la funció serà contínua en $x = 1$.

3. (3 punts) Considereu la següent funció:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

- (a) (1 punt) Trobeu-ne el domini

Solució:

Caldrà resoldre l'equació

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

Fent Ruffini provant amb $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\
 & & 1 & -4 & 4 \\
 \hline
 & 1 & -4 & 4 & 0
 \end{array}$$

I efectivament $x = 1$ és una arrel perquè el residu és zero. La resta d'arrels les trobem resolent l'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$, que són $x = 2$ (arrel doble). Per tant, el domini serà:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

(b) (1 punt) Trobeu els punts de tall amb els eixos

Solució:

- Amb l'eix y només cal calcular $f(0) = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, i el punt de tall amb l'eix d'ordenades serà $(0, \frac{1}{2})$.
- Per l'eix d'abscisses caldrà resoldre l'equació $x^2 + x - 2 = 0$, les solucions de la qual són $x = -2$ i $x = 1$. No obstant, el valor $x = 1$ no pertany al domini. Per tant, la funció tallarà l'eix horitzontal només al punt $(-2, 0)$.

(c) (1 punt) Estudieu-ne la continuïtat

Solució:

- En $x = 1$. Fem el límit:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació factoritzem i simplifiquem:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x-2)^2} = 3$$

La funció tindrà per tant una discontinuïtat evitable en $x = 1$.

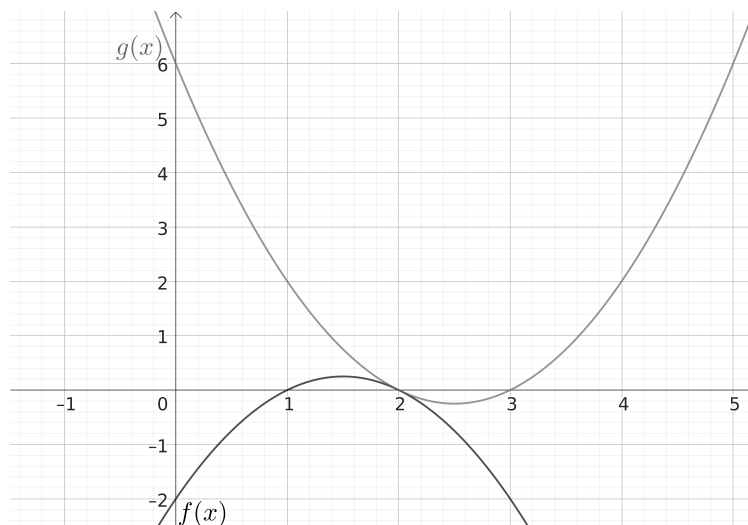
- En $x = 2$. Si fem servir la versió simplificada de la funció ens quedarà:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{0}$$

La funció té per tant una discontinuïtat asimptòtica en $x = 2$. Cal fer els límits laterals per acabar l'estudi. El denominador té una arrel doble en $x = 2$ i, per tant, no canvia de signe $x = 2$ (és positiu a banda i banda perquè el denominador és cóncav cap amunt). Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

4. (2 punts) Considereu les dues funcions de la gràfica següent



(a) (1 punt) Trobeu el domini de la funció $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Solució:

Com el denominador, la funció $g(x)$, s'anul·la en $x = 2$ i $x = 3$, el domini de $h(x)$ serà:

$$D(h) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

(b) (1 punt) Discutiu-ne la continuïtat.

Solució:

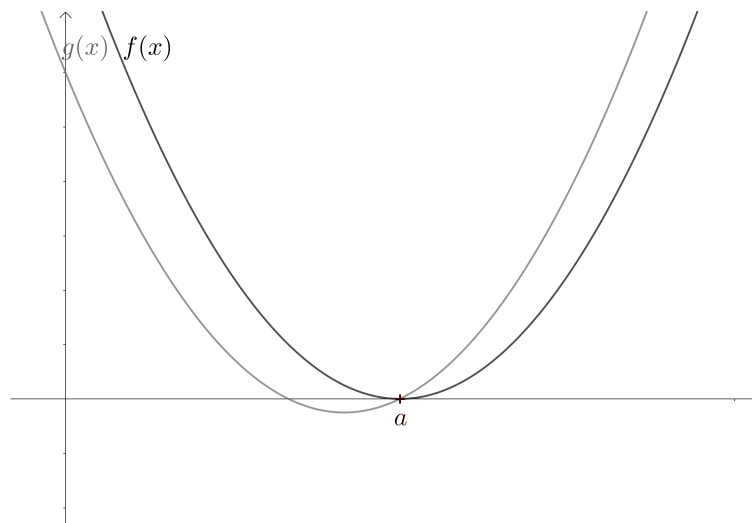
- En $x = 3$ el denominador s'anul·la però el numerador no. Per tant $h(x)$ tindrà una discontinuïtat assintòtica en $x = 3$. Fixem-nos que $g(x)$ passa de ser negativa a positiva en $x = 3$, i que $f(x)$ és negativa en $x = 3$. Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \frac{< 0}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \frac{< 0}{0^+} = -\infty$$

- En $x = 2$ totes dues funcions s'anul·len. Com cap d'elles té una arrel doble (les paràboles no reboten), en factoritzar els factors $x - 2$ desapareixeran del numerador i del denominador, i $h(x)$ tindrà una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

5. (1 punt) Considereu les dues funcions de la gràfica següent



Calculeu raonadament el límit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Solució:

Totes dues funcions s'anul·len en $x = a$ i per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Caldrà factoritzar i simplificar. Fixem-nos que el numerador té una arrel doble en $x = a$ i el denominador no. Per tant, en simplificar ens quedarà un factor $(x - a)$ al numerador però al denominador no. Així, el límit valdrà:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-a)^2 \cdot Q(x)}{(x-a) \cdot P(x)} = \frac{(a-a) \cdot Q(a)}{P(a)} = 0$$