

Successions
1^{er} Batxillerat
27 d'octubre 2023

Nom i Cognoms: _____

1. (2.5 punts) Calculeu, justificadament, els següents límits:

(a) (0.5 punts) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^3 + 10} =$

Solució:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2 - n + 1}}{\cancel{n^3 + 10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0$$

(b) (0.5 punts) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 - n^2 + 10n + 1} \right)^{n^2 - 1} =$

Solució:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cancel{n^3 - 2n^2 + 1}}{\cancel{2n^3 - n^2 + 10n + 1}} \right)^{\cancel{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{\infty} = \infty \text{ perquè } \left| 1 + \frac{1}{2} \right| > 1$$

(c) (0.5 punts) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n + 1}{3n + 3} \right)^{n+1} =$

Solució:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\cancel{n + 1}}{\cancel{3n + 3}} \right)^{\cancel{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{3} \right)^{\infty} = 0 \text{ perquè } \left| 1 - \frac{1}{3} \right| < 1$$

(d) (0.5 punts) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 - 10n + 10} \right)^{-2n^2 + 3n + 1} =$

Solució:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 - 10n + 10} \right)^{-2n^2 + 3n + 1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)^{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

(e) (0.5 punts) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 1}{n^2 - 3} \right)^{-\frac{n^2 + 3}{n + 3}} =$

Solució:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2-3} \right)^{-\frac{n^2+3}{n+3}} = (0)^{-\infty} = \frac{1}{0^{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

2. (1 punt) Calculeu el següent límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 - 1}{n^2 - n} - \frac{n^4 + 2n^3 - 3n^2 + 10}{n^3 - n^2} =$$

Solució:

D'entrada el límit dóna una indeterminació del tipus $\infty - \infty$. Provem primer de resoldre-la simplificant els termes de grau més petit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} - \cancel{2n^2} - 1}{\cancel{n^2} - \cancel{n}} - \frac{\cancel{n^4} + \cancel{2n^3} - \cancel{3n^2} + 10}{\cancel{n^3} - \cancel{n^2}} = 0 - 0$$

Aquest resultat no ens diu que el límit sigui zero sinó que els termes de grau més alt es cancel·len i, per tant, caldrà considerar els termes de grau més petit. Per fer-ho caldrà agrupar les dues fraccions. Fixem-nos que si multipliquem el denominador de la segona fracció per n obtenim el de la primera fracció. Per tant tindrem:

$$\begin{aligned} \frac{n^3 - 2n^2 - 1}{n^2 - n} - \frac{n^4 + 2n^3 - 3n^2 + 10}{n^3 - n^2} &= \frac{n \cdot (n^3 - 2n^2 - 1) - (n^4 + 2n^3 - 3n^2 + 10)}{n^3 - n^2} = \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - n^4 - 2n^3 + \dots}{n^3 - n^2} = \frac{-4n^3 + \dots}{n^3 + \dots} = \boxed{-4} \end{aligned}$$

3. (1.5 punts) Sumeu tots els nombres menors que 1000 que siguin múltiples de 7 però no de 4.

Solució:

Volem fer la suma: El múltiple de 7 mes gran i menor que 1000 és el $994 = 7 \cdot 142$. Per tant, la suma que volem fer serà

$$7 + 14 + 21 + \cancel{28} + 35 + 42 + 49 + \cancel{56} + \dots + 994$$

Això és la suma de tots els múltiples de 7 i restant-hi els múltiples de 4 i 7, que són els múltiples de 28.

L'últim múltiple de 28 abans del 1000 és el $980 = 28 \cdot 35$. Això ens diu que abans

d'arribar al 1000 trobarem 142 múltiples de 7 i 35 múltiples de 28. Per tant la suma serà:

$$(7 + 14 + 21 + 28 + 35 + \dots + 994) - (28 + 56 + \dots + 980)$$

Com es tracta de restar dues sumes aritmètiques, tenim una fórmula que ens ho permet fer ràpid:

$$\begin{aligned} (7 + 14 + 21 + 28 + 35 + \dots + 994) - (28 + 56 + \dots + 980) = \\ (7 + 994) \cdot \frac{142}{2} - (28 + 980) \cdot \frac{35}{2} = 53431 \end{aligned}$$

4. (2 punts) Responen:

- (a) (1 punt) Expliqueu en què consisteix una successió geomètrica, què ha de complir i doneu-ne un exemple.

Solució:

Les successions geomètriques són aquelles que compleixen que cada terme s'obté multiplicant l'anterior per una certa quantitat que és igual per tots els termes. Aquesta quantitat s'anomena raó, i es representa normalment amb r . És a dir, per tots els valors de n es compleix

Un exemple podria ser les potències de 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

Que té com a terme

$$a_n = 2^n$$

- (b) (1 punt) Fent servir la fórmula de la suma dels N primers termes, expliqueu raonadament si és possible sumar TOTS els termes d'una successió geomètrica. És a dir, és possible que la suma convergeixi quan $N \rightarrow \infty$?

Solució:

Les successions geomètriques és de les poques per les quals tenim una fórmula per sumar tants termes com desitgem sense haver de fer la suma. Si tenim una

$$S_N = \frac{a_1 - a_1 r^N}{1 - r}$$

Aquesta suma, quan $|r| < 1$ convergeix quan $N \rightarrow \infty$, i el seu valor és

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

ja que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_1 r^N = 0 \text{ si } |r| < 1$$

5. (1 punt) Demostreu que, si a_n és una successió aritmètica, aleshores es compleix que

$$\sum_{n=0}^N a_n = (a_1 + a_N) \cdot \frac{N}{2}$$

Solució:

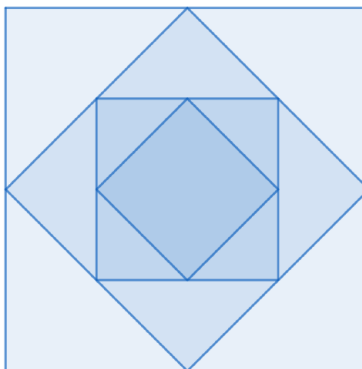
La demostració ve d'observar que els termes agrupats primer amb últim, segon amb penúltim, etc sempre sumen el mateix:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$$

Així, la suma consistirà ens sumar la suma $a_1 + a_N$ la meitat de les vegades que apareix:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N = (a_1 + a_N) \frac{N}{2}$$

6. (2 punts) Considereu el quadrat exterior de la figura, que anomenarem Q_1 . Construïm el quadrat Q_2 unint els punts mitjos de cadascun dels quadrat Q_1 , el quadrat Q_3 unint els punts mitjos del quadrat Q_2 , i així successivament. A la imatge hi teniu representats fins a Q_4 , però el procés de construcció es pot fer indefinidament.



- (a) (1 punt) Suposant que el costat del primer quadrat val 4, quant val l'àrea del quadrat Q_{20} ?

Solució:

El problema es pot resoldre geomètricament observant que apareixen triangles que fan que l'àrea del següent quadrat sigui meitat de l'anterior. Ara bé, també es pot demostrar analíticament. Si c és el que mesura el costat d'un quadrat, aleshores, aplicant el teorema de Pitàgores, el següent costat mesurarà

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

És a dir, el valor del següent costat s'obté dividint entre $\sqrt{2}$ el costat anterior. Per veure quina relació hi ha entre les àrees, només caldrà elevar al quadrat els costats. Així, si l'àrea d'un costat és c^2 l'àrea del següent serà $\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{c^2}{2}$. És a dir, l'àrea es divideix entre 2 a cada pas. Així, la successió d'àrees dels quadrats és geomètrica de raó $\frac{1}{2}$ i comença per 16. Per tant, l'àrea de Q_{20} serà:

$$16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{16}{2^{19}}$$

- (b) (1 punt) Si repetíssim el procés indefinidament, quant valdria la suma de les àrees de tots els quadrats? Es tracta de sumar els infinits termes d'una successió ge-

omètrica de raó $\frac{1}{2}$, per la qual tenim una fórmula:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$$