

Examen funcions-successions

1^r Batxillerat

6 de febrer de 2026

Nom i Cognoms: _____

1. (1 punt) Considereu el següent polinomi de grau n a coeficients enters:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

Demostreu que, si $a \in \mathbb{Z}$ és un arrel entera de $p(x)$ aleshores a divideix a_0 .

Solució:

Pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra, si a és una arrel de $p(x)$, aleshores $(x - a)$ és un factor del polinomi. Podem escriure $p(x)$ com:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x)$$

on $q(x)$ és un polinomi que també té coeficients enters (ja que $p(x)$ té coeficients enters i el coeficient líder de $(x - a)$ és 1).

Avaluem el polinomi en $x = 0$:

$$p(0) = a_0 + a_1(0) + \cdots + a_n(0)^n = a_0$$

D'altra banda, substituint a l'expressió factoritzada:

$$p(0) = (0 - a) \cdot q(0) = -a \cdot q(0)$$

Igualant les dues expressions tenim que $a_0 = -a \cdot q(0)$. Com que $q(0)$ és un nombre enter (el terme independent de $q(x)$), això demostra que a és un divisor de a_0 .

2. (1.5 punts) Considereu la següent funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x^2 - 8}{x - 2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) (0.75 punts) Trobeu el seu domini

Solució:

Estudiem el domini de cada branca per separat:

- **Branca 1** ($x < 1$): El denominador s'anul·la quan $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$. D'aquests dos valors, el que cau dins l'interval $x < 1$ és $x = -1$.
- **Branca 2** ($x \geq 1$): El denominador s'anul·la quan $x - 2 = 0 \implies x = 2$. Aquest valor cau dins l'interval $x \geq 1$, així que l'hem de treure.

Per tant, el domini és: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

(b) (0.75 punts) Trobeu els punts de tall amb els eixos de coordenades

Solució:

- **Tall eix Y** ($x = 0$): Fem servir la primera branca ($0 < 1$).

$$f(0) = \frac{2(0)}{0^2 - 1} = 0 \implies \text{Punt } (0, 0)$$

- **Tall eix X** ($f(x) = 0$):

– Branca 1: $\frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \implies 2x = 0 \implies x = 0$ (Vàlid perquè $0 < 1$).

– Branca 2: $\frac{2x^2 - 8}{x - 2} = 0 \implies 2x^2 - 8 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$. El valor $x = -2$ no pertany a la branca ($x \geq 1$). El valor $x = 2$ pertany a la definició de la branca, però **no pertany al domini** (fa zero el denominador), per tant no és un punt de tall.

L'únic punt de tall és el $(0, 0)$.

3. (2 punts) Considereu la funció

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$$

(a) (1 punt) Calculeu la funció inversa $f^{-1}(x)$.

Solució:

Escrivim $y = f(x)$ i aïllem la variable x :

$$\begin{aligned}y &= \frac{3x - 1}{x + 2} \\y(x + 2) &= 3x - 1 \\xy + 2y &= 3x - 1 \\2y + 1 &= 3x - xy \\2y + 1 &= x(3 - y) \\x &= \frac{2y + 1}{3 - y}\end{aligned}$$

Finalment, intercanviem x i y per obtenir l'expressió de la inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{3 - x}$$

(b) (1 punt) Comproveu el resultat

Solució:

Comprovem que $f^{-1}(f(x)) = x$. Substituïm $f(x)$ dins de $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) + 1}{3 - \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)}$$

Per simplificar, multipliquem numerador i denominador per $(x + 2)$:

$$\begin{aligned}&= \frac{2(3x - 1) + 1(x + 2)}{3(x + 2) - (3x - 1)} \\&= \frac{6x - 2 + x + 2}{3x + 6 - 3x + 1} \\&= \frac{7x}{7} = x\end{aligned}$$

El resultat és correcte.

4. (1.5 punts) Calculeu el domini de la següent funció:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 4}$$

Solució:

Per a que l'arrel existeixi, el radicand ha de ser no negatiu: $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$. Factoritzem el polinomi aplicant la regla de Ruffini (provem $x = -1$):

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

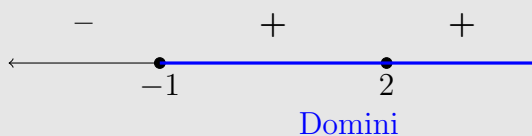
Obtenim $p(x) = (x + 1)(x^2 - 4x + 4)$. El segon factor és una identitat notable:

$$p(x) = (x + 1)(x - 2)^2$$

Estudiem el signe segons la multiplicitat de les arrels:

- L'arrel $x = 2$ té multiplicitat 2 (parella), per tant és una arrel doble i el signe **no canvia** al seu voltant. De fet $(x - 2)^2$ sempre és positiu o zero.
- L'arrel $x = -1$ té multiplicitat 1 (imparella), per tant és una arrel simple i el signe **sí que canvia**.

Representació gràfica del signe:



Per tant, el domini és $\mathcal{D}(f) = [-1, +\infty)$.

5. (2 punts) Calculeu el següent límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n - 1}{n + 1} - \frac{n^2 - 3n - 2}{n - 1} \right)^{\frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1}}$$

Solució:

Primer resollem la resta dins del parèntesi fent comú denominador ($n^2 - 1$):

$$\begin{aligned} \text{Base} &= \frac{(n^2 + 2n - 1)(n - 1) - (n^2 - 3n - 2)(n + 1)}{n^2 - 1} \\ &= \frac{(n^3 - n^2 + 2n^2 - 2n - n + 1) - (n^3 + n^2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2)}{n^2 - 1} \\ &= \frac{(n^3 + n^2 - 3n + 1) - (n^3 - 2n^2 - 5n - 2)}{n^2 - 1} \\ &= \frac{3n^2 + 2n + 3}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

El límit de la base quan $n \rightarrow \infty$ és el quocient dels coeficients de major grau: $3/1 = 3$.

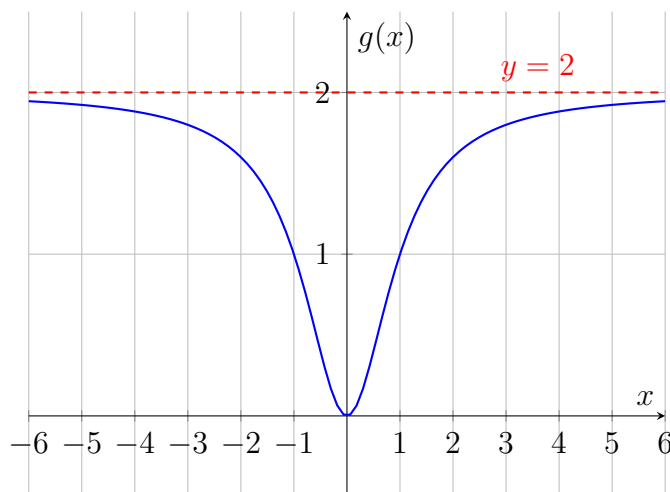
El límit de l'exponent és $1/2$. Per tant, el límit és:

$$L = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

6. (1 punt) Considereu la funció

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Sigui també $g(x)$ la funció de la següent gràfica:



Trobeu el domini de $(f \circ g)(x)$.

Solució:

Volem el domini de $f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1}$. Això imposa la condició $g(x) - 1 \geq 0 \implies g(x) \geq 1$. Observem la gràfica per veure quan la funció $g(x)$ (línia blava) està per sobre o a l'alçada de $y = 1$. Sabem que els talls són a $x = -1$ i $x = 1$ (marcats amb punts). Entre -1 i 1, la funció està per sota d'1. A la resta, està per sobre. Per tant, el domini és:

$$\mathcal{D}(f \circ g) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$