

Examen successions
1^r Batxillerat
10 d'octubre de 2025

Nom i Cognoms: _____

1. (1 punt) Si a_n segueix una successió geomètrica obtingueu una fórmula per trobar la suma dels N primers termes.

Solució:

Fet a classe.

2. (1 punt) Sabent que una successió a_n és aritmètica i que $a_{12} = \frac{13}{2}$ i que $a_{20} = \frac{27}{2}$, calculeu-ne el terme general.

Solució:

De a_{12} fins a a_{20} s'ha sumat 8 vegades la diferència, d . Per tant:

$$8d = \frac{27}{2} - \frac{13}{2} = \frac{14}{2} \implies d = \frac{7}{8}$$

Així tindrem

$$a_n = \frac{13}{2} + (n - 12)\frac{7}{8}$$

3. (4 punts) Calculeu:

(a) (1 punt) La suma dels 2000 primers múltiples de 5.

Solució:

Els múltiples de 5 segueixen una progressió aritmètica de diferència 5. Hem de sumar des del 5 fins al $2000 \cdot 5 = 10.000$, que donarà:

$$(5 + 2000 \cdot 5) \cdot 1000 = 10.005.000$$

(b) (1 punt) La suma dels 200 primers múltiples de 5 que no ho són de 3.

Solució:

Només caldrà restar a la suma anterior el nombres que sigui múltiples de 5 i de 3, és a dir, els de 15. El primer nombre que cal treure és clarament 15. El darrer serà el múltiple de 15 més proper a 10.000, però més petit, que serà $666 \cdot 15$. Per tant, la suma serà:

$$10.005.000 - (15 + 30 + \dots + 666 \cdot 15) = 10.005.000 - 667 \cdot \frac{666}{2}.$$

(c) (1 punt) Sabent que una successió aritmètica compleix

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = 200$$

trobeu quant val $\sum_{n=5}^{36} a_n$.

Solució:

Fixem-nos que $a_1 + a_{40} = a_5 + a_{36}$, ja que de a_1 a a_5 hem sumat 4 vegades la diferència però de a_{30} a a_{36} l'hem restat també 4 vegades. Per tant:

$$200 = (a_1 + a_{40}) \cdot \frac{40}{2} \implies a_1 + a_{40} = 10$$

Per tant

$$a_5 + a_5 + \dots + a_{36} = (a_5 + a_{36}) \frac{32}{2} = 10 \cdot 16 = 160$$

- (d) (1 punt) Demostreu que la successió $a_n = \frac{3^{2n+1}}{2^n}$ és geomètrica. Trobeu-ne també la raó.

Solució:

Només cal veure que el quocient de dos termes consecutius és constant:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{3^{2n+1}}{2^n}}{\frac{3^{2(n-1)+1}}{2^{n-1}}} = \frac{3^{2n+1}2^{n-1}}{3^{2n-1}2^n} = \frac{3}{2}$$

Efectivament, és una geomètrica de raó $\frac{3}{2}$.

4. (2 punts) Considereu una successió donada per la relació de recurrència

$$a_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{a_{n-3}}, \quad a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = \frac{4}{3}$$

- (a) (1 punt) Trobeu a_4 i a_5 .

Solució:

Aplicant la relació de recurrència obtenim fàcilment a_4 i a_5 .

- (b) (1 punt) Demostreu que és una successió geomètrica.

Solució:

Comprovem que el quocient dels primers termes és el mateix:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3} \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

Fixem-nos ara que de la pròpia definició de la recurrència podem obtenir:

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \implies \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}$$

Això ens diu que el quocient de dos termes consecutius coincideix amb el quocient dels dos termes anteriors. Estenent-ho fins als primers termes obtenim:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \frac{a_{n-3}}{a_{n-4}} = \frac{a_{n-4}}{a_{n-5}} = \dots = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}$$

Per tant, efectivament, és geomètrica.

5. (2 punts) El conjunt de Cantor s'obté mitjançant un procés iteratiu que consisteix en, partint d'un segment de longitud 1, dividir-lo en tres parts iguals i eliminar la part del mig. A cada pas, tots els segments que queden es divideixen en tres parts i s'elimina la part central. Vegeu la següent figura:



- (a) (1 punt) Obtingueu una fórmula per obtenir la suma de tots els segments que queden un cop s'han fet n passos.

Solució:

Fixem-nos que, a cada pas, el nombre de segments es duplica, però la seva longitud es divideix entre tres. Per tant, si fem n passos, la longitud total serà

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \cdots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right)$$

La quantitat que cal treure a cada pas és la suma d'una successió geomètrica de raó $\frac{2}{3}$ que comença en $\frac{1}{3}$. Per tant tindrem:

$$1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

- (b) (1 punt) Justifiqueu que, si féssim el procés indefinidament, al final la suma de les longituds dels segments restants seria 0.

Solució:

Efectivament, com la raó de la successió geomètrica és menor que 1, obtenim que, si n infinitament gran aleshores $\left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ és infinitament petit. Per tant, la longitud dels segments acabarà sent:

$$1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 - 1 = 0$$