

Exercicis resolts (o no) de matemàtiques de 1^r de Batxillerat

Curs 23-24

Índex

1	Successions	3
	<i>Exercici: 1</i>	3
	<i>Exercici: 2</i>	4
	<i>Exercici: 3</i>	4
	<i>Exercici: 4</i>	4
	<i>Exercici: 5</i>	5
	<i>Exercici: 6</i>	5
	<i>Exercici: 7</i>	5
	<i>Exercici: 8</i>	6
	<i>Exercici: 9</i>	6
	<i>Exercici: 10</i>	6
	<i>Exercici: 11</i>	6
	<i>Exercici: 12</i>	7
	<i>Exercici: 13</i>	7
	<i>Exercici: 14</i>	7
2	Funcions	8
	<i>Exercici: 15</i>	8
	<i>Exercici: 16</i>	8
	<i>Exercici: 17</i>	8
	<i>Exercici: 18</i>	8
	<i>Exercici: 19</i>	9
	<i>Exercici: 20</i>	9
	<i>Exercici: 21</i>	9

<i>Exercici: 22</i>	10
<i>Exercici: 23</i>	10
<i>Exercici: 24</i>	11
<i>Exercici: 25</i>	11
<i>Exercici: 26</i>	11
3 Trigonometria	11
<i>Exercici: 27</i>	11
<i>Exercici: 28</i>	12
<i>Exercici: 29</i>	12
<i>Exercici: 30</i>	14
<i>Exercici: 31</i>	15
<i>Exercici: 32</i>	15
<i>Exercici: 33</i>	15
<i>Exercici: 34</i>	16
<i>Exercici: 35</i>	16
<i>Exercici: 36</i>	17
<i>Exercici: 37</i>	17
<i>Exercici: 38</i>	17
<i>Exercici: 39</i>	18
4 Geometria	21
4.1 Vectors	21
<i>Exercici: 1</i>	21
<i>Exercici: 2</i>	21
<i>Exercici: 3</i>	21
<i>Exercici: 4</i>	21
<i>Exercici: 5</i>	21
4.2 Rectes	22
<i>Exercici: 1</i>	22
<i>Exercici: 2</i>	22
<i>Exercici: 3</i>	22
<i>Exercici: 4</i>	22
<i>Exercici: 5</i>	23
<i>Exercici: 6</i>	23
<i>Exercici: 7</i>	24
<i>Exercici: 8</i>	26
<i>Exercici: 9</i>	26

<i>Exercici: 10</i>	27
<i>Exercici: 11</i>	28
<i>Exercici: 12</i>	28
<i>Exercici: 13</i>	28
4.3 Circumferència	29
<i>Exercici: 1</i>	29
<i>Exercici: 2</i>	30

1 Successions

Exercici 1.

Digueu si les següents successions són geomètriques. Doneu-ne la raó en cas que ho siguin.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)$

b) $a_n = 2^{n+3}$

c) $a_n = 3^{2n}$

d) $a_n = 5^{2n-3}$

e) $a_n = 3^{-n+2}$

Solució.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = 3^{-1}$. Geomètrica, $r = \frac{1}{3}$ i $a_1 = r$

b) $a_n = 2^{n+3} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-(n+3)} = 2$. Geomètrica, de raó $r = 2$ i $a_1 = 2^4$.

c) $a_n = 3^{2n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}} = 3^{2(n+1)-2n} = 3^2$. Geomètrica, de raó $r = 3^2$ i $a_1 = 3^2$

d) $a_n = 5^{2n-3} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{2(n+1)-3}}{5^{2n-3}} = 5^{2(n+1)-3-(2n-3)} = 5^2$. Geomètrica, de raó 5^2 i $a_1 = 5^{-1}$

$$e) a_n = 3^{-n+2} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)+2}}{3^{-n+2}} = 3^{-(n+1)+2-(-n+2)} = 3^{-1}. \text{ Geomètrica, de raó } r = \frac{1}{3} \text{ i } a_1 = 3.$$

Exercici 2.

Digueu si les següents successions són geomètriques. Doneu-ne la raó en cas que ho siguin i quant val la suma dels primers 50 nombres.

$$a) a_n = n^2$$

$$b) a_n = 2^{3n-2}$$

$$c) a_n = \frac{100^{n+1}}{10^{4n}}$$

$$d) a_n = \frac{9^{\frac{3n+1}{2}}}{3^{2n+2}}$$

$$e) a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2-1}$$

Exercici 3.

Calculeu els límits, si existeixen, de les següents successions:

$$a) a_n = \frac{\frac{1}{n^2}}{n^2 + 1}$$

$$d) a_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$$

$$b) a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2-1}$$

$$e) a_n = \frac{n+1}{\left(\frac{26}{25}\right)^{n^2+2}}$$

$$c) a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$f) a_n = \frac{10^{-n^4}}{10^{n+1}}$$

Exercici 4.

Digueu si en resoldre els següents límits s'obtenen indeterminacions o no. Resoleu-los en cas que no n'hi hagi.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{-1}{n}\right)^n =$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} =$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n^2 - n} =$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{-n^2} =$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^4 + 3n - 1} = \quad g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + n + 1}\right)^{\frac{1}{n^2}} =$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n^2 - 2}}{n^2 - 2n + 1} =$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{-n^2}$$

Exercici 5.

Calculeu els límits, si existeixen, de les següents successions:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{-3n^3 - n^2 - 3}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3n^2 + n + 1}{-2n^2 - n + 1}\right)^{\frac{n^2 + 1}{n}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n - 3} - \frac{-n^2 - 3n - 1}{2n + 1}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{n^2 - 1} - \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 1}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 2n + 1}{n - 3} - \frac{n^2 - 2n + 1}{n + 3}$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 + n + 1}\right)^{-n^2 + 2n + 1}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 1}{4n + 1} - \frac{n^2 + 2n + 3}{2n - 1}$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 2n + 3}$$

Exercici 6.

Considereu la successió definida amb la relació de recurrència

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

amb $a_1 = 1$ i $a_2 = 5$

a) Calculeu els 10 primers termes de la successió.

b) Doneu, si existeixen, una fita superior i una inferior

c) Trobeu, si existeixen, el màxim, el mínim, el suprem i l'ínfim

d) Trobeu, si existeix, el límit d'aquesta successió

Exercici 7.

Una llebre salta pel camp. De cop i volta decideix fer que la llargada de cada salt sigui la meitat de l'anterior.

- a) Si la llargada del primer salt és de 4m, fins on arribarà la llebre?
- b) Quina hauria de ser la llargada del primer salt per tal de poder arribar a una pastanaga que es troba a 10m de la posició inicial?
- c) La llebre decideix ara fer que cada salt sigui un 50% més llarg que el salt anterior. Si la llargada del primer salt és de 2m, quants salts haurà de fer per arribar a recórrer 1km?

Exercici 8.

Trobeu la suma dels termes entre l'1 i el 1000 que són múltiples de 3 o de 5.

Exercici 9.

Calculeu, si existeixen, els límits de les següents successions

- a) $\lim \frac{2n^3 - 1}{n^2} - \frac{3n^2 + 1}{2n} =$
- b) $\lim \frac{n^3 + n}{n^2 + n} - \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} =$
- c) $\lim \frac{n^4 - n^3 + 2n + 2}{n^2 - 1} - \frac{n^2 + 5n - 1}{n + 2} =$
- d) $\lim \frac{2n^2 - 3}{n + 2} - \frac{-n^2 + 5}{n - 2} =$
- e) $\lim \frac{n^5 - n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n^2 - 6n + 2} - \frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^2 + 3} =$
- f) $\lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} =$
- g) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{3n^3}$
- h) $a_n = \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2n + 1}\right)^{n^2 - 6n + 1}$
- i) $a_n = \left(2 - \frac{3n^2 - 1}{3n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1}$
- j) $a_n = \left(1 + \frac{n}{n^2 - 2n + 1}\right)^{-n^2 + 1}$

Exercici 10.

Calculeu el límit de les següents successions

- a) $a_n = \left(2 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{n^2 - 3}$
- b) $a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 - 3n + 10} - \frac{3n^3 + 10}{2n^3 - 2n + 6}$
- c) $a_n = \left(\frac{3n^2 + n + 10}{4n^2 - 5n + 1}\right)^{-n^3 + 10}$
- d) $a_n = \left(\pi + \frac{n^2 - 1}{n^4 + 2n^3 - 2n + 1}\right)^{\frac{2n^2 - n - 1}{4n^2 - 2n + 1}}$

Exercici 11.

Calculeu el límit de les següents successions

$$\begin{aligned} a) \ a_n &= \frac{n^2 - 3n + 1}{n + 3} - \frac{n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{n^2 - 1} & c) \ a_n &= \frac{n^5 + 3n^2 - 2n + 1}{n^4 + 10n^3 - 5n^2 + 1} - \frac{n^5 + 6n^4 - 10n^3 + 3n^2 - 2n + 2}{n^3 - n^2 + n - 2} \\ b) \ a_n &= \frac{n^4 + 3n + 1}{n^2 - 1} - \frac{n^3 + 2n - 1}{n + 1} \end{aligned}$$

Exercici 12.

Calculeu el límit de les següents successions

$$\begin{aligned} a) \ a_n &= \frac{n^2 - 3n + 1}{n + 3} - \frac{n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{n^2 - 1} & c) \ a_n &= \frac{n^5 + 3n^2 - 2n + 1}{n^4 + 10n^3 - 5n^2 + 1} - \frac{n^5 + 6n^4 - 10n^3 + 3n^2 - 2n + 2}{n^3 - n^2 + n - 2} \\ b) \ a_n &= \frac{n^4 + 3n + 1}{n^2 - 1} - \frac{n^3 + 2n - 1}{n + 1} \end{aligned}$$

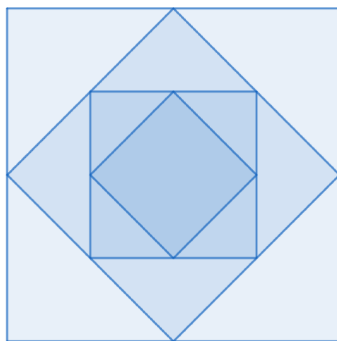
Exercici 13.

Calculeu el límit de les següents successions

$$\begin{aligned} a) \ a_n &= \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{2n^2 - 3n + 1} & c) \ a_n &= \left(2 - \frac{n + 1}{n - 1}\right)^{3n - 1} \\ b) \ a_n &= \left(1 + \frac{3}{n + 4}\right)^{4n - 2} & d) \ a_n &= \left(\frac{n - 1}{n + 2}\right)^{2n + 1} \end{aligned}$$

Exercici 14.

Considereu el quadrat exterior de la figura, que anomenarem Q_1 . Construïm el quadrat Q_2 unint els punts mitjos de cadascun dels quadrats Q_1 , el quadrat Q_3 unint els punts mitjos del quadrat Q_2 , i així successivament. A la imatge hi teniu representats fins a Q_4 , però el procés de construcció es pot fer indefinidament.



- a) Suposant que el costat del primer quadrat val 4, quant val el perímetre del quadrat Q_{15} ?
- b) Si repetíssim el procés indefinidament, quant valdria la suma dels perímetres de tots els quadrats?

2 Funcions

Exercici 15.

Trobeu el domini i els punts de tall amb els eixos de les funcions

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7x + 6}}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x + 6}$

e) $f(x) = \frac{3}{x^3 + x^2}$

Exercici 16.

Digueu si les següents funcions són simètriques, antisimètriques o bé cap de les dues coses:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$

Exercici 17.

Trobeu els valors del paràmetre a per tal que la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + a}{x^2 - 1}$$

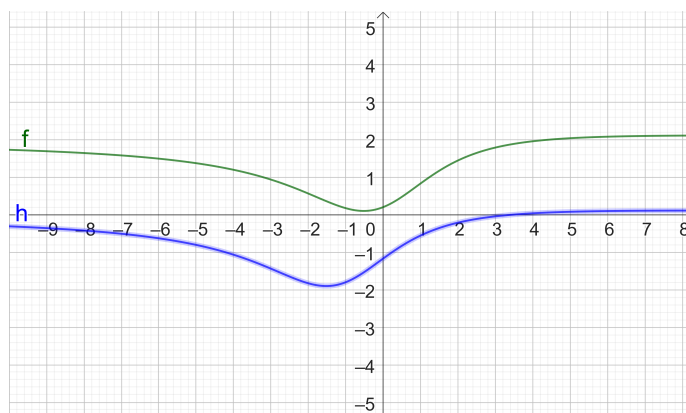
- a) Talli només un cop l'eix d'abscisses
- b) Tingui dos talls amb l'eix d'abscisses
- c) No talli l'eix d'abscisses

Exercici 18.

Sabent que la funció $f(x)$ de la gràfica té l'expressió

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5}$$

trobeu l'expressió de la funció $h(x)$. Comproveu-ho amb el Geogebra o el Wolframalpha.



Exercici 19.

Considereu la funció $f(x)$ de la gràfica. Digueu:

- a) $D(g)$ on $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- b) $D(g)$ on $g(x) = \sqrt{f(x)}$
- c) $D(g)$ on $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$
- d) $D(g)$ on $g(x) = \sqrt{-f(x)}$

Exercici 20.

Factoritzeu els següents polinomis

- a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ sabent que $x = 1$ és una arrel
- b) $x^2 + 2x + 1$
- c) $x^4 - 3x^3 + 2x^2$
- d) $x^4 - 3x^2 + 2$

Exercici 21.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 3x^2 - 10x - 24}, & x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 5}, & x > 2 \end{cases}$$

- Trobeu el domini de la funció $f(x)$. Haureu de fer Ruffini!
- Trobeu els punts de tall amb els eixos.
- Calculeu el comportament local (a prop) dels valors que no siguin del domini i també a prop de $x = 2$.
- Discutiu quin tipus de discontinuïtats té la funció en aquests valors, si és que en té.

Exercici 22.

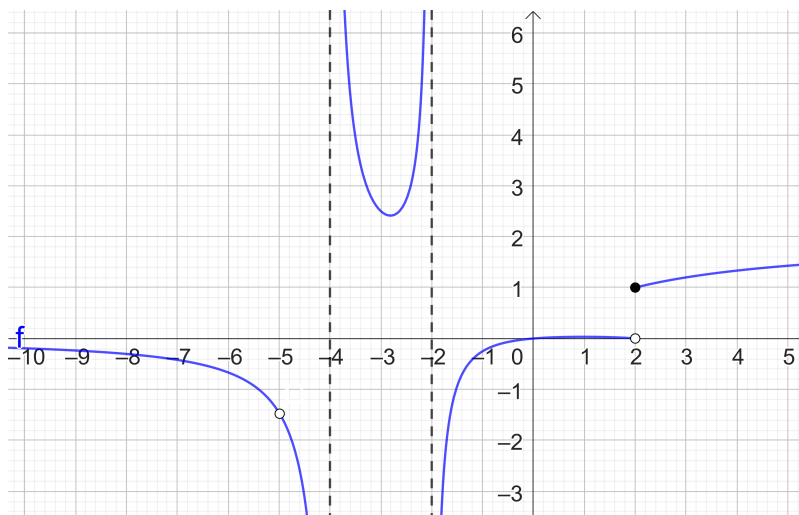
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a, & x < 2 \\ ax - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre real. Trobeu el valor de a per tal que f sigui contínua en $x = 2$.

Exercici 23.

Considereu la funció de la següent gràfica.



- Trobeu-ne el domini
- Calculeu $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, distingint entre límits laterals, si cal.
- Digueu quin tipus de discontinuïtats té aquesta funció.

Exercici 24.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne el domini
- b) Trobeu-ne els punts de tall amb els eixos
- c) Estudieu la seva continuïtat

Exercici 25.

Discutiu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercici 26.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + x}{x^2 - 4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne el domini
- b) Discutiu-ne la continuïtat
- c) Fels els límits

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

3 Trigonometria

Exercici 27.

Considereu un polígon de n costats (n -àgon) de radi r .

1. Calculeu-ne el perímetre i l'àrea en funció del nombre de costats

2. Deduïu el perímetre i l'àrea d'una circumferència fent el límit $n \rightarrow \infty$.

Exercici 28.

Ajudant-vos *d'aquest applet de Geogebra* trobeu fórmules pels següents càlculs en funció de $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ i $\tan(\alpha)$:

a) $\sin(-\alpha) =$

j) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$

b) $\cos(-\alpha) =$

k) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$

c) $\tan(-\alpha) =$

l) $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$

d) $\sin(\alpha + \pi) =$

m) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$

e) $\cos(\alpha + \pi) =$

n) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$

f) $\tan(\alpha + \pi) =$

o) $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$

g) $\sin(\pi - \alpha) =$

p) $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$

h) $\cos(\pi - \alpha) =$

q) $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$

i) $\tan(\pi - \alpha) =$

r) $\tan(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$

Exercici 29.

Feu servir *aquesta applet de Geogebra* per respondre les següents preguntes:

a) Trobeu fórmules per calcular

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

b) Feu servir les fórmules per trobar noves fórmules per calcular:

$$\sin(2\alpha) =$$

$$\cos(2\alpha) =$$

$$\sin(\alpha - \beta) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) =$$

c) Fent servir aquestes fórmules comproveu les següents igualtats de l'exercici 28: a), d), h), j) i q).

Solució.

a) Fet a classe. Les fórmules són:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

b) Per tal de calcular els sinus i cosinus de l'angle doble a partir de les fórmules anteriors fem el següent:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \\ &= \boxed{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)} \\ \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \sin(\alpha) = \\ &= \boxed{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}\end{aligned}$$

El fet que $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ve del fet que $\sin(\alpha)$ és una funció senar (anti-simètrica), i que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ve del fet que $\cos(\alpha)$ és una funció parella (simètrica).

Pel que fa a l'angle resta podem fer el següent:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin(\alpha) \underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos(\beta)} + \cos(\alpha) \underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)} = \\ &= \boxed{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)} \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos(\alpha) \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \sin(-\beta) = \\ &= \boxed{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}\end{aligned}$$

c)

$$\sin(-\alpha) = \sin(0 - \alpha) = \overbrace{\sin(0)}^0 \cdot \cos(\alpha) - \overbrace{\cos(0)}^1 \cdot \sin(\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \pi) = \sin(\alpha) \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} + \cos(\alpha) \cdot \overbrace{\sin(\pi)}^0 = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} \cdot \cos(\alpha) + \overbrace{\sin(\pi)}^0 \cdot \sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha) \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^0 + \cos(\alpha) \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^1 = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^0 - \sin(\alpha) \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{-1} = -(-\sin(\alpha)) = \sin(\alpha)$$

Exercici 30.

Dues antenes separades 10 Km apunten a un satèl·lit tal com es mostra a la següent figura. A quina altura orbita el satèl·lit?



Solució.

El satèl·lit i les antenes formen un triangle d'angles:

$$A = 83.9^\circ$$

$$B = 180 - 86.2 = 93.8^\circ$$

$$C = 180 - A - B = 2.3^\circ$$

L'altura a la que "vola" el satèl·lit la podem trobar fent:

$$h = b \cdot \sin(A),$$

on b és el costat oposat a l'angle B .

Per trobar b només cal aplicar el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{10}{\sin(2.3)} \implies b = 248.63 \text{ Km}$$

Per tant

$$h = 247.22 \text{ Km}$$

Exercici 31.

Calculeu

$$\cos(2 \arcsin(0.6))$$

Solució.

Fixem-nos que $\arcsin(0.6)$ és un angle, anomenem-lo α . Amb la fórmula de l'angle doble tenim

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Trobem $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 0.64$ i quedarà

$$\cos(2 \arcsin(0.6)) = 0.64 - 0.6^2 = 0.64 - 0.36 = 0.28$$

Exercici 32.

Una persona observa un objecte que té davant i a la seva esquerra. L'ull esquerra apunta amb un angle de 7° respecte la frontal (perpendicular sortint del front), mentre que el dret ho fa amb un angle de 10° . Sabent que la distància entre els ulls és de 63mm, a quina distància es troba l'objecte de l'ull més proper?

Solució.

Els dos ulls i l'objecte formen un triangle obtusangle d'angles 97° (ull esquerra), 80° (ull dret) i $180 - 97 - 80 = 3^\circ$. L'ull més proper és l'esquerra, i amb el teorema del sinus trobem la distància a la que es troba:

$$\frac{x}{\sin(80)} = \frac{63}{\sin(3)} \implies x = 1.185m$$

Exercici 33.

Sabent que $\cos(\alpha) = 0.8$ i que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, trobeu de manera exacta i sense trobar els angles quant val $\sin(2\alpha + \beta)$

Solució.

Si escrivim

$$\sin(2\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \alpha + \beta) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) = 0.8$$

Exercici 34.

Els costats d'un paral·lelogram mesuren 12 i 7 cm, i l'angle que formen és 115° .
Quant mesuren les diagonals d'aquest paral·lelogram?

Solució.

Si fem un dibuix del paral·lelogram i les seves diagonals, veurem que hem de resoldre dos triangles (no rectangles!). D'un d'ells (el de la diagonal més gran) sabem dos costats i un angle, i volem conèixer el costat "oposat a l'angle". El teorema del cosinus ens el dona directament:

$$D^2 = 12^2 + 7^2 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cos 115^\circ,$$

d'on $D = 16.248\text{cm}$. L'altre triangle el podem resoldre de la mateixa manera, però ens falta un angle, que és $180 - 115 = 65^\circ$. Per tant, tenim

$$d^2 = 12^2 + 7^2 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cos 65^\circ,$$

d'on $d = 11.045\text{cm}$.

Exercici 35.

Sabent que $\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$ i que α pertany al primer quadrant, calculeu de manera exacta i sense calcular l'angle:

a) $\sin(\alpha)$

b) $\tan(-\alpha)$

Solució.

a) Fent servir que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ trobem

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}.$$

Com ens diu que l'angle és la primer quadrant, la solució correcta és la positiva,
 $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$.

b) Fem servir que

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{12}{5}.$$

La primera igualtat simplement ve de canviar el signe a un angle (feu un dibuix pintant els angles α i $-\alpha$ a la circumferència unitat i ho veureu clar). La segona igualtat s'ha de saber.

Exercici 36.

Calculeu els límits:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin(x))^{\tan(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2^x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\sin(x)}$

Exercici 37.

Trobeu tots els angles que compleixen les següents equacions:

1. $\sin(x) = -1$

3. $\sin(x + \pi) = 1$

2. $\tan(x) = 1$

4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$

Solució.

a) l'angle x correspon als angles que "cauen" als $\frac{3\pi}{2}$. Per tant, els angles seran de la forma $\frac{3\pi}{2}$ més voltes, és a dir:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

b) l'angle x correspon als angles que cauen a $\frac{\pi}{4}$ o bé $\frac{5\pi}{4}$. Per tant, seran angles de la forma $\frac{\pi}{4}$ més mitges voltes, és a dir:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

c) l'angle $x + \pi$ ha de caure als $\frac{\pi}{2}$. Per tant, l'angle x ha de caure a $\frac{3\pi}{2}$. Per tant x serà de la forma:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

d) l'angle $x + \frac{\pi}{2}$ ha de caure a l'angle π . Per tant, x ha de caure a $\frac{\pi}{2}$, i serà de la forma:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Exercici 38.

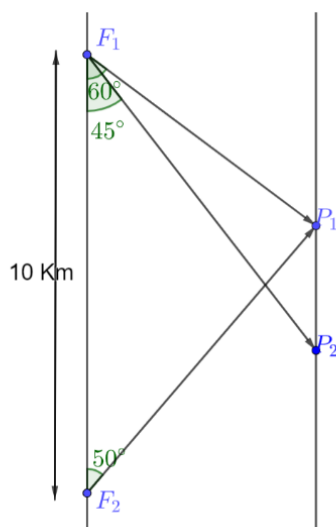
Trobeu tots els angles que compleixen les següents equacions:

a) $\tan(x) - \sin(x) \cdot \tan(x) = 0$

b) $\sin(2x) = \tan(x)$

Exercici 39.

Un vaixell navega paral·lelament a la línia que uneix dos fars F_1 i F_2 , situats a una distància de 10km un de l'altre. En un moment donat, la visual dirigida al vaixell des del far F_1 forma un angle de 60° amb F_1F_2 , i la visual des de F_2 forma un angle de 50° amb aquesta mateixa recta. Al cap de 10 minuts, la visual des de F_1 forma un angle de 45° amb F_1F_2 . A quina velocitat navega el vaixell? (suposeu que navega a velocitat constant).



Solució.

Tot seguit es presenten dues possibles solucions:

1. La situació es resumeix a la següent figura. A la Figura 1 hi ha representat el punt P_1 on es troba el vaixell en el moment de la primera mesura, i P_2 en el moment de la segona. Per tal de saber a quina velocitat es mou el vaixell només cal saber la distància $x = P_1P_2$ recorreguda en 10 min. Per tal de conèixer la distància x fixem-nos que

$$x = a - b$$

Per tal de trobar b només caldrà trobar la distància F_1P_1 i fer

$$b = F_1P_1 \cos(60)$$

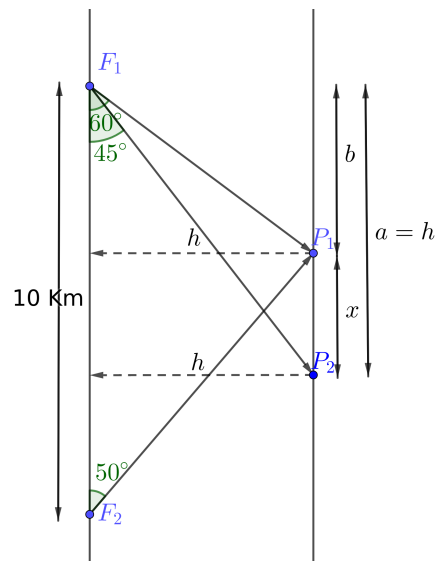


Figura 1: Situació solució 1

Podem trobar la distància F_1P_1 aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{F_1P_1}{\sin(50)} = \frac{10}{\sin(180 - 60 - 50)}$$

d'on

$$F_1P_1 = 8.152 \text{ Km}$$

i

$$b = 8.152 \cos(60) = 4.076 \text{ Km}$$

Ara, per trobar a , fixem-nos que en ser l'angle corresponent de 45° , tindrem que

$$a = h$$

Per tant, només cal trobar h fent servir

$$h = F_1P_1 \sin(60) = 7.06 \text{ Km}$$

Per tant:

$$x = a - b = 2.983 \text{ Km}$$

i la velocitat serà:

$$\frac{x}{10 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \boxed{17.9 \text{ Km/h}}$$

2. La segona opció és més directa. A partir dels angles que ens han donat podem trobar els angles marcats en rosa a la Figura 2.

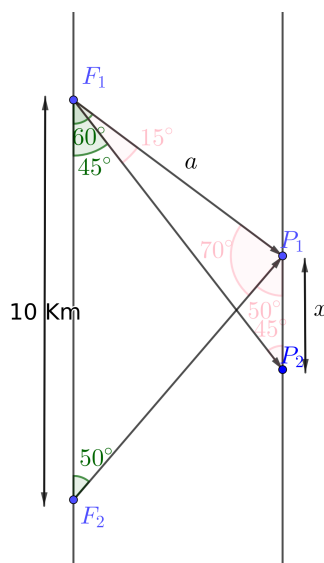


Figura 2: Situació solució 2.

- L'angle de 15° surt de restar $60^\circ - 45^\circ$
- L'angle de 70° surt del fet que els angles del triangle $F_1F_2P_1$ han de sumar 180° : $180 - 60 - 50 = 70$
- L'angle de 50° surt del fet que les dues rectes són paral·leles i aquest angle queda emparellat amb l'angle de 50°
- L'angle de 45° també surt del fet que les dues rectes són paral·leles, i aquest angle queda emparellat amb l'angle de 45°

Diem ara a a la distància entre F_1 i P_1 . Aplicant el teorema del sinus al triangle $F_1F_2P_1$ tindrem:

$$\frac{\sin(50)}{a} = \frac{\sin(70)}{10} \implies a = \frac{10 \sin(50)}{\sin(70)}$$

Un cop tenim a podem trobar x tornant a aplicar el teorema del sinus amb el triangle $F_1P_1P_2$:

$$\frac{\sin(45)}{a} = \frac{\sin(15)}{x} \implies x = \frac{a \sin(15)}{\sin(45)} = \frac{10 \cdot \sin(50) \cdot \sin(15)}{\sin(70) \cdot \sin(45)} = 2.983 \text{ km}$$

Per tant, la velocitat serà de

$$\frac{x}{10 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \boxed{17.9 \text{ Km/h}}$$

4 Geometria

4.1 Vectors

Exercici 1.

Trobeu:

- a) $\text{proj}_{(2,1)}(3, 2)$
- b) $\text{proj}_{(0,1)}(2, -3)$
- c) $\text{proj}_{(1,-3)}(3, 1)$

Exercici 2.

Trobeu l'angle entre els vectors $(1, -2)$ i $(1, 5)$.

Exercici 3.

Un segment té un vèrtex al punt $(1, 3)$, i el seu punt mig és el punt $(2, 5)$. Trobeu el punt on es troba l'altre vèrtex.

Exercici 4.

Trobeu el baricentre d'un triangle de vèrtexs $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ i $C = (2, 3)$.

Exercici 5.

D'un triangle coneixem dos vèrtexs, $V_1 = (1, 0)$ i $V_2 = (0, 3)$, i el seu baricentre, $B = (2, 1)$. Trobeu les coordenades del tercer vèrtex.

Solució.

Sabem que el baricentre d'un triangle es troba a $1/3$ entre el punt mig de dos vèrtexs i el vèrtex oposat. Si $M = \frac{V_1+V_2}{2}$ és el punt mitjà entre V_1 i V_2 , el tercer vèrtex l'obtidrem col·locant el vector $\overrightarrow{MB}$ allargat el triple sortint de M :

$$\begin{aligned} V_3 &= M + 3 \cdot \overrightarrow{MB} = M + 3(B - M) = M + 3B - 3M = 3B - 2 \cdot M \\ &= 3 \cdot B - 2 \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} = 3B - V_1 - V_2 = (6, 3) - (1, 0) - (0, 3) = \boxed{(5, 0)} \end{aligned}$$

4.2 Rectes

Exercici 1.

Donada la recta

$$r : (x, y) = (1, 3) + \lambda \cdot (1, 2)$$

- a) Digueu si els punts $(-1, -1)$, $(0, 1)$ i $(3, 6)$ pertanyen a la recta o no.
- b) Trobeu l'equació vectorial de la recta que és paral·lela a recta r però que passi pel punt $(2, 3)$.
- c) Trobeu l'equació vectorial de la recta perpendicular a r que passi pel punt $(0, 0)$.

Exercici 2.

Donat un triangle de vèrtexs $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$ i $C = (-1, -1)$ trobeu:

- a) Les equacions vectorials de les tres mitjanes
- b) Les equacions vectorials de les tres mediatrises
- c) Les equacions vectorials de les tres altures

Exercici 3.

Considereu la recta l'equació general de la qual és

$$r : 2x - y + 3 = 0$$

Digueu si el vector $(3, 6)$ és un vector director o no.

Solució.

Si $(3, 6)$ és un vector director aleshores haurà de ser perpendicular al vector gradient $(2, -1)$. Ho comprovem fent servir el producte escalar:

$$(3, 6) \cdot (2, -1) = 6 - 6 = 0$$

Efectivament, és un vector director.

Exercici 4.

Trobeu la distància entre el punt $P = (1, 3)$ i la recta $r : (x, y) = (2, 2) + \lambda(1, 1)$

Solució.

Per tal de trobar $d(P, r)$ ens aniria bé escriure la recta r en forma general. Com $(1, 1)$ és un vector director, el vector $(1, -1)$ en serà el gradient, i la recta serà:

$$x - y + C = 0$$

Ara trobem C imposant que el punt $(2, 2)$ compleixi l'equació:

$$2 - 2 + C = 0 \implies C = 0$$

Per tant, la recta en forma general tindrà la forma $x - y = 0$. Ara podem aplicar la fórmula de la distància entre un punt i la recta:

$$d(P, r) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

Exercici 5.

Considereu el punt $P(2, 3)$ i la recta $r : 2x + y + 1 = 0$.

- a) Trobeu $d(P, r)$*
- b) Trobeu el punt simètric de P respecte de r .*

Exercici 6.

Trobeu la posició relativa entre les rectes:

$$\begin{aligned} r : (x, y) &= (3, 1) + \lambda(2, -1) \\ s : 2x + 4y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

- a) Trobeu la posició relativa entre elles*
- b) En cas que siguin secants trobeu-ne l'angle de tall i el punt d'intersecció. En cas que siguin paral·leles trobeu-ne la distància entre elles. En cas que siguin coincidents no feu res més.*

Solució.

- a) Observem que els vector directors de r i el gradient de s són perpendiculars:*

$$(2, -1) \cdot (2, 4) = 4 - 4 = 0$$

Per tant, les rectes són paral·leles i bé la mateixa. Per distingir-ho comprovem si el punt $(3, 1)$ pertany a s simplement comprovant si compleix l'equació:

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 4 = 6 + 4 + 4 = 14 \neq 0$$

Per tant, les dues rectes són paral·leles.

Per trobar la distància entre elles només caldrà calcular la distància entre un punt qualsevol d'una d'elles i l'altra. Com s'està en vectorial escollim el punt $P = (3, 1)$ de la recta r , i obtenim:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{14}{\sqrt{20}} = \frac{14}{\sqrt{4 \cdot 5}} = \frac{2 \cdot 7}{2\sqrt{5}} = \boxed{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$$

Exercici 7.

Donat un triangle de vèrtexs $A = (0, 2)$, $B = (1, 4)$ i $C = (-2, 1)$, trobeu:

- Les coordenades del baricentre
- Les coordenades del punt on es tallen les mediatrises (circumcentre)
- Les coordenades del punt on es tallen les altures (ortocentre)

Solució.

a) El baricentre es troba a un terç entre el punt mig d'un costat i el vèrtex oposat:

$$\begin{aligned} B &= M_{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{A+B}{2} + \frac{C-M}{3} = \frac{3A+3B+2C-2M}{6} \\ &= \frac{3A+3B+2C-2\frac{A+B}{2}}{6} = \frac{3A+3B+2C-A-B}{6} \\ &= \frac{2A+2B+2C}{6} = \frac{A+B+C}{3} = \frac{(0,2)+(1,4)+(-2,1)}{3} = \frac{(-1,7)}{3} \\ &= \boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)} \end{aligned}$$

b) Només caldrà calcular la intersecció entre dues mediatrises, m_{AB} i m_{BC} , per exemple. Els vectors gradients seran $B-A = (1, 2)$ i $B-C = (-3, -3)$, respectivament. Per comoditat, canviarem el gradient de m_{BC} pel vector $(1, 1)$, que té la mateixa direcció que $(-3, -3)$. Per tant, les equacions generals seran:

$$m_{AB} : x + 2y + C_{AB} = 0$$

$$m_{BC} : x + y + C_{BC} = 0$$

Ara cal trobar les constants C_{AB} i C_{BC} imposant que aquestes rectes passin per $M_{AB} = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, 3)$ i $M_{BC} = \frac{B+C}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, respectivament:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + 2 \cdot 3 + C_{AB} &= 0 \implies C_{AB} = -\frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + C_{BC} &= 0 \implies C_{BC} = -2\end{aligned}$$

Ara, per trobar el punt d'intersecció només caldrà resoldre el següent sistema:

$$\left. \begin{aligned}x + 2y - \frac{13}{2} &= 0 \\ x + y - 2 &= 0\end{aligned} \right\}$$

Fent reducció restant la primera equació menys la segona obtenim:

$$y - \frac{13}{2} + 2 = 0 \implies y = \frac{9}{2}$$

Substituint a la segona equació obtenim

$$x + \frac{9}{2} - 2 = 0 \implies x = -\frac{5}{2}$$

i circumcentre serà el punt $(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$.

Les alterures són paral·leles a les mediatrises, però passant pel vèrtex oposat enlloc del punt mig. Així només recalcular les constants C de l'apartat anterior:

$$h_c : x + 2y + C_C = 0$$

$$h_A : x + y + C_A = 0$$

Imposant ara que h_c passi per C i h_A passi per A obtenim:

$$-2 + 2 \cdot 1 + C_C = 0 \implies C_C = 0$$

$$0 + 2 + C_A = 0 \implies C_A = -2$$

Ara, per trobar l'ortocentre, només caldrà resoldre els sistema:

$$\left. \begin{aligned}x + 2y &= 0 \\ x + y - 2 &= 0\end{aligned} \right\}$$

Restant la primera equació menys la segona obtenim $y + 2 = 0 \implies y = -2$, i substituint a la segona equació obtenim $x - 2 - 2 = 0 \implies x = 4$. Per tant, l'ortocentre estarà al punt $(4, -2)$.

Exercici 8.

Considereu la recta $r : 2x - y + 2 = 0$ i el punt $P = (0, 0)$.

- Trobeu l'equació de la recta s perpendicular a r que passa per P .
- Trobeu el punt de tall entre r i s .
- Trobeu el punt simètric del punt P respecte la recta r .

Solució.

Podeu seguir la solució a l'applet de Geogebra:

<https://www.geogebra.org/classic/thdrkash>

- Una recta perpendicular a r serà de la forma $x + 2y + C = 0$, ja que només cal girar el gradient 90° . Ara imposem que passi per P : $0 + 0 + C = 0 \implies C = 0$, i la recta serà $x + 2y = 0$.
- Només cal resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\}$$

Si multipliquem la segona equació per 2 i li restem la primera obtenim l'equació $5y - 2 = 0 \implies y = \frac{2}{5}$. Substituïm a la segona obtenim $x + 2 \cdot \frac{2}{5} = 0 \implies x = -\frac{4}{5}$. L'ortocentre serà doncs el punt $(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) = (-0.8, 0.4)$.

- Anomenem $Q = (-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ al punt d'intersecció que hem trobat a l'apartat anterior. Per trobar el punt simètric de P respecte de r només cal situar a Q el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = Q + Q - P = 2Q - P$$

Exercici 9.

D'un triangle d'àrea 4 en coneixem dos vèrtex, $V_1 = (-1, 2)$ i $V_2 = (1, 0)$. Trobeu les coordenades del tercer vèrtex sabent que aquest es troba sobre la recta $2x + y - 4 = 0$.

Solució.

Podeu seguir la solució a l'applet de Geogebra:

<https://www.geogebra.org/classic/hxmn4m8f>

L'àrea d'un triangle és la meitat del producte d'una base per l'altura corresponent. Com tenim dos vèrtexs podem calcular una base:

$$b = \|\overrightarrow{V_1V_2}\| = \|(2, -2)\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Per tant, l'altura serà

$$\frac{h \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4 \implies h = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Ara ens caldrà trobar un punt de la recta $r : 2x + y - 4 = 0$ que estigui a distància h de la recta que passa per V_1 i V_2 . Trobem aquesta darrera recta en forma general. El gradient l'obtidrem girant 90° el vector $\overrightarrow{V_1V_2} = V_2 - V_1 = (2, -2)$, que serà el vector $(2, 2)$. Ara, per facilitar els càlculs, agafem com a gradient el vector $(1, 1)$, que té la mateixa direcció que el vector $(2, 2)$. Per tant, la recta que passa per V_1 i V_2 té és de la forma

$$x + y + C = 0$$

Troblem C imposant que passi per V_2 : $1 + 0 + C = 0 \implies C = -1$, i la recta que passa per aquests dos vèrtexs és la recta

$$s : x + y - 1 = 0$$

Ara ens caldrà buscar un punt de la recta de l'enunciat que estigui a distància $2\sqrt{2}$ de r :

$$d((x, y), r) = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

Com el punt (x, y) ha de ser de la recta $2x + y - 4 = 0$, podem aïllar $y = -2x + 4$ i substituir-ho a l'equació anterior:

$$\frac{x - 2x + 4 - 1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \implies |-x + 3| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \implies |-x + 3| = 4$$

L'equació $|3 - x| = 4$ té dues possibles solucions: $3 - x = 4 \implies x = -1$ o bé $-(3 - x) = 4 \implies x = -7$. Substituint a l'equació de la recta de l'enunciat trobem els corresponents valors de y , i obtenim els punts:

$$V_3 = (-1, 6) \quad V_3 = (7, -10)$$

Exercici 10.

Demostreu que el baricentre d'un triangle es troba a distància $\frac{1}{3}$ entre el punt mig d'un costat i el vèrtex oposat.

Exercici 11.

Donades les rectes

$$\begin{aligned}r &: (x, y) = (2, 0) + \lambda(1, -1) \\s &: \frac{x-2}{3} = y+1\end{aligned}$$

- a) *Trobeu-ne la posició relativa*
- b) *En cas que sigui paral·les trobeu-ne la distància entre ells, en cas que sigui iguals no feu res, i en cas que siguin secants trobeu-ne el punt d'intersecció i l'angle de tall*

Exercici 12.

Trobeu el valor de q per tal que les rectes

$$\begin{aligned}r &: (x, y) = (2, 3) + \lambda(3q, 2q) \\s &: qx - y + 3 = 0\end{aligned}$$

siguin:

- a) *Paral·leles*
- b) *Perpendiculars*

Exercici 13.

Trobeu tots els punts que es troben a la mateixa distància de les rectes

$$\begin{aligned}r &: 2x + 3y + 1 = 0 \\s &: y = -\frac{2}{3}x + 4\end{aligned}$$

Solució.

Fixem-nos que les rectes són paral·leles. En efecte, si passem s a general tenim $s: 2x + 3y - 12 = 0$. Com els gradients són iguals, però les constants no ho són, les rectes tenen la mateixa direcció però passen per punts diferents: són paral·leles.

Els punts que es troben a la mateixa distància de les rectes es trobaran sobre una altra recta que estarà entre r i s . Diguem $P = (x, y)$ a un punt d'aquesta recta. Aleshores $P = (x, y)$ haurà de complir:

$$d(P, r) = d(P, s) \implies \frac{|2x + 3y + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2x + 3y - 12|}{\sqrt{13}}$$

Per tant, l'equació de la recta vindrà de l'equació:

$$|2x + 3y + 1| = |2x + 3y - 12|$$

Ara caldrà eliminar els valors absoluts. Una equació de l'estil $|f(x)| = |g(x)|$ té 4 opcions, que acaben sent dues:

$$f(x) = g(x)$$

$$-f(x) = g(x)$$

$$f(x) = -g(x) \text{ Com la segona}$$

$$-f(x) = -g(x) \implies f(x) = g(x) \text{ Com la primera}$$

Per tant provem:

$$2x + 3y + 1 = 2x + 3y - 12 \implies 1 = -12? \text{ No pot ser}$$

$$-(2x + 3y + 1) = 2x + 3y - 12 \implies -2x - 3y - 1 = 2x + 3y - 12 \implies 4x + 6y - 11 = 0$$

I aquesta darrera és la solució.

4.3 Circumferència

Exercici 1.

Trobeu l'equació de la circumferència que:

- a) Té centre $(1, -2)$ i radi 2.
- b) Té centre $(1, 4)$ i és tangent a l'eix d'ordenades
- c) Té centre $(1, 4)$ i és tangent a l'eix d'abscisses
- d) Està circumscrita al triangle de vèrtexs $(1, 0)$, $(0, 3)$ i $(0, 0)$.
- e) Té centre $(1, 3)$ i és tangent a la recta $2x + 3y + 2 = 0$
- f) Té centre $(2, 5)$ i és tangent a la circumferència $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ (alerta que n'hi ha dues!)
- g) Té centre $(1, 2)$ i és tangent a la circumferència $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ (alerta que n'hi ha dues!).

Exercici 2.

Trobeu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ i $C = (4,0)$.

Solució.

Es tracta de la circumferència circumscrita al triangle ABC , el centre de la qual es troba al punt on es tallen les mediatrïus. Trobem-les.

- Mediatriu AB . Com és perpendicular a AB , el vector $\overrightarrow{AB}$ serà el gradient: $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,1)$. Per tant la recta té la forma $x + y + C = 0$. Ara impossem que passi pel punt mig del segment AB , $M = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, d'on traiem que $c = -1$.
- Mediatriu AC . Com els punts A i C es troben a l'eix d'abscisses, la mediatriu serà una recta vertical passant per la meitat: $x = 2$. Sinó, procedint com amb la mediatriu del segment AB obtindríem el mateix.

Ara caldria trobar el punt on es tallen aquestes mediatrïus, cosa que farem resolent el sistema:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

I el centre de la circumferència serà el punt $O = (2, -1)$.

Ara ens cal trobar el radi. Aquest serà la distància entre el punt O i qualsevol dels 3 vèrtexs:

$$R = d(O, B) = d(O, C) = d(O, A) = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Per tant, l'equació de la circumferència que estem buscant serà:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

Recordeu que el radi apareix elevat al quadrat i l'arrel marxa.