

## Funcions: continuïtat

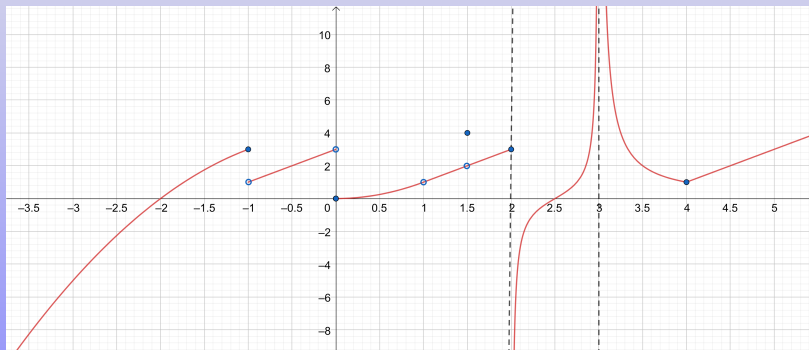
# Quan una funció NO és contínua?

## Definició naïf

Una funció NO és contínua si per algun valor de  $x$  hem d'aixecar el llapis del paper en fer-ne la gràfica.

# Exemple gràfic

## La funció



no és contínua en  $x = -1$  (té un salt), en  $x = 0$  (salt),  $x = 1$  (evitable), en  $x = 1.5$  (evitable), en  $x = 2$  (asimptòtica) ni  $x = 3$  (asimptòtica).

# Què ha de passar perquè una funció sigui contínua?

Una funció és contínua en  $x = a$  si

valors infinitament propers a  $x = a$  tenen imatges infinitament properes a  $f(a)$ .

<https://www.geogebra.org/m/pbpnfbzz>

La manera més estàndard d'escriure això és:

Una funció és contínua en  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

o, equivalentment,

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

# Tipus de discontinuïtats

La condició

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

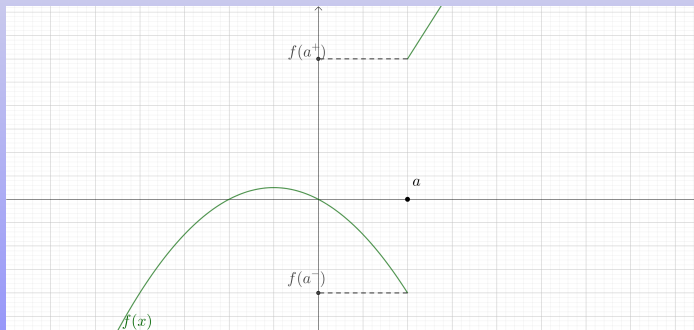
pot no complir-se per tres motius diferents donant lloc a tres tipus de discontinuïtats:

- Discontinuitat de salt
- Discontinuitat asimptòtica
- Discontinuitat evitable

# Discontinuitat de salt en $x = a$

Els límits laterals **existeixen** però són diferents:

$$f(a^-) \neq f(a^+)$$



**Observació**

*No importa el valor de  $f(a)$ .*

# Discontinuitat de salt en $x = a$

## Exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Tenim que

$$D(f) = \mathbb{R}$$

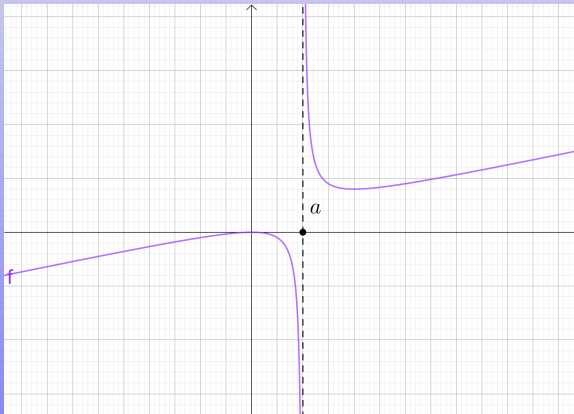
No obstant,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1^-) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1^+) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1^-) \neq f(1^+) \Rightarrow \text{Discontinuitat de salt}$$

# Discontinuitat asimptòtica en $x = a$

La funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica en  $x = a$  si algun dels dos (o tots dos) límits laterals són  $+\infty$  o  $-\infty$ :

$$f(a^-) = \pm\infty \quad \text{o} \quad f(a^+) = \pm\infty$$





# Discontinuitat asimptòtica en $x = a$

En una discontinuïtat asimptòtica es compleix:

- Apropant  $x$  a  $a$  podem fer que  $|f(x)|$  sigui tan gran com vulguem.
- La funció no està fitada prop de  $x = a$ .
- La gràfica de la funció s'apropa a la d'una recta vertical, que s'anomena **asímtota vertical**.

# Discontinuitat asimptòtica en $x = a$

## Exemple

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Com

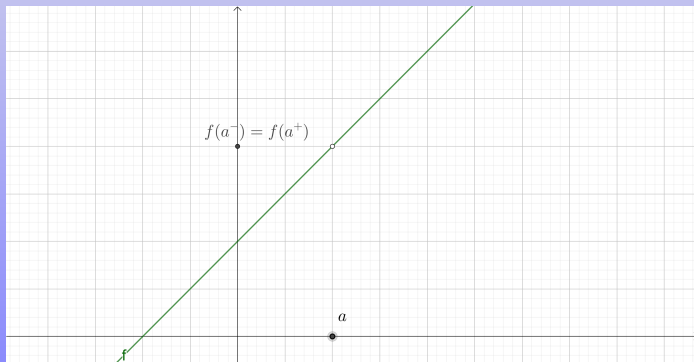
$$\left. \begin{aligned} f(4^-) &= \frac{7}{0^-} = -\infty \\ f(4^+) &= \frac{7}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \implies \text{Discontinuitat asimptòtica en } x = 4$$

# Discontinuitat evitable

Si

$$f(a^-) = f(a^+) \neq f(a)$$

tindrem una discontinuïtat evitable en  $x = a$



# Discontinuitat evitable

En una discontinuïtat evitable en  $x = a$ :

- La funció té un forat
- Es diu evitable perquè es pot evitar, simplement omplint el forat.
- $f(a)$  no existeix o bé té un valor diferent a  $f(a^-)$  i  $f(a^+)$
- Normalment venen d'espressions que es poden simplificar

# Discontinuitat evitable

## Exemple

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

Tenim que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

En fer el límit obtenim una indeterminació:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

La resoltem simplificant:

$$\frac{x}{x} = 1 \text{ si } x \neq 0$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(0^-) = f(0^+) = 1 \neq f(0) \ (\nexists) \implies \text{Discontinuitat evitable}$$

# Estudi de la continuïtat d'una funció

Donada una funció, volem saber si és contínua o no. En cas que no ho sigui, quins tipus de discontinuïtats té?

- 1 Trobar el domini
- 2 Estudiar el comportament local (fent els límits laterals) als punts que no siguin del domini (principalment denominadors que s'anul·len)
- 3 Estudiar el comportament local (fent els límits laterals) als canvis de branca en funcions definides a trossos

# Estudi de la continuïtat d'una funció

## Exemple

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{3x}{x + 3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

### ❶ Domini.

- ❶ Canvis de branca: la funció està ben definida en tots ells, per tant ok.
- ❷ Denominadors que s'anul·len.
  - ❶ Primera branca:  $x = -1$  i  $x = 0$ . Però  $x = 0$  s'entra per la 2a branca, només caldrà descartar  $x = -1$ .
  - ❷ Segona branca:  $x = -3$  i  $x = 3$ . Cap d'ells quedarà descartat.
  - ❸ Tercera branca:  $x = -3$ . Tampoc el descartem

Per tant

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

# Estudi de la continuïtat d'una funció

## 2 Estudi en punts que no són del domini:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 + x} = \frac{-1}{0}$$

Serà una discontinuïtat asimptòtica. Caldrà fer els laterals. Estudiem el canvi de signe del denominador:

$$x^2 + x \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & + & & - & & + \\ & & 0^+ 0^- & & 0^- 0^+ & & \\ \cdots & \cdots & | & \cdots & | & \cdots & \\ & & -1 & & 0 & & \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



# Estudi de la continuïtat d'una funció

## 3 Estudi local en canvis de branca

- En  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \text{ Indet}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 9}{x^2 - 9} = \frac{-9}{-9} = 1$$

Resolem la indeterminació factoritzant i simplificant:

$$\frac{x}{x^2 + x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x + 1)} = \frac{1}{x + 1} \text{ si } x \neq 0$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x + 1} = 1$$

Com

$$f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 1$$

la funció és contínua en  $x = 0$ .

# Estudi de la continuïtat d'una funció

## 3 Estudi local en canvis de branca

- En  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x - 9}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x}{x + 3} = \frac{9}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Resolem la indeterminació factoritzant i simplificant:

$$3x - 9 = 0 \implies x = 3$$

$$\implies 3x - 9 = 3(x - 3)$$

$$x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 3$$

$$\implies x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Per tant:

$$\frac{3x - 9}{x^2 - 9} = \frac{3\cancel{(x - 3)}}{(x + 3)\cancel{(x - 3)}} = \frac{3}{x + 3} \text{ si } x \neq 3$$

El límit quedarà:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x + 3} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

# Estudi de la continuïtat d'una funció

## 3 Estudi local en canvis de branca

- En  $x = 3$ : Com que

$$\frac{1}{2} = f(3^-) \neq f(3^+) = \frac{3}{2}$$

la funció tindrà una discontinuïtat de salt en  $x = 3$ .

# Estudi de la continuïtat d'una funció

## Exemple 2

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4}$$

❶ Domini:

$$1 - x^4 = 0 \implies x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

# Estudi de la continuïtat d'una funció

## 2 Estudi local en punts que no són del domini:

- En  $x = -1$ . Comencem fent el límit:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-12}{0}$$

La funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica en  $x = -1$ .

Cal estudiar els límits laterals per completar l'estudi:

$$1 - x^4 \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & - & & + & & - \\ & & 0^- & 0^+ & & 0^+ & 0^- \\ \cdots & & | & & | & & \cdots \\ & & -1 & & 1 & & \end{array}$$

Per tant ens quedarà:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$

# Estudi de la continuïtat d'una funció

## 2 Estudi local en punts que no són del domini:

- En  $x = 1$ . Comencem fent el límit:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació caldrà factoritzar i simplificar:

$$-2x^2 + 6x - 4 = -2 \overbrace{(x^2 - 3x + 2)}^{=0 \Rightarrow x=1, x=2} = -2(x-1)(x-2)$$

## Factorització de $1 - x^4$ . Opció 1: per Ruffini

Sabem que  $x = 1$  és una arrel. Per tant:

$$1 - x^4 = (x - 1)q(x)$$

Per trobar  $q(x)$  hem de dividir  $1 - x^4$  entre  $x - 1$ . Ho fem per Ruffini.  
Escrivim

$$1 - x^4 = -x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$$

$$1 \left| \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right.$$

d'on

$$1 - x^4 = (x - 1) \overbrace{(-x^3 - x^2 - x - 1)}^{q(x)}$$

## Factorització de $1 - x^4$ . Opció 1: per Ruffini

Tenim que

$$1 - x^4 = (x - 1)(-x^3 - x^2 - x - 1)$$

Saben que  $x = -1$  és arrel de  $-x^3 - x^2 - x - 1$ . Per tant:

$$-x^3 - x^2 - x - 1 = (x + 1)q(x)$$

Troblem  $q(x)$  dividim aquest polinomi entre  $x + 1$  per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

d'on

$$-x^3 - x^2 - x - 1 = (x + 1)(-x^2 - 1)$$

Resumint:

$$1 - x^4 = (x - 1)(x + 1)(-x^2 - 1)$$



## Factorització de $1 - x^4$ . Opció 2: identitat notable

Si ens fixem,  $1 - x^4$  és una diferència de quadrats. Per tant:

$$1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2)$$

El factor  $(1 + x^2)$  és irreductible (grau 2 sense arrels reals). El terme  $1 - x^2$  també és una diferència de quadrats:

$$1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$$

Per tant,

$$1 - x^4 = (1 + x)(1 - x)(1 + x^2)$$

Fixem-nos que dóna el mateix que abans, només cal canviar el signe de dos factors:

$$(1 + x)(1 - x)(1 + x^2) = (1 + x)(-1 + x)(-1 - x^2) = (x + 1)(x - 1)(-x^2 - 1)$$

## Factorització de $1 - x^4$ . Opció 3: divisió euclidiana

Sabem que  $1 - x^4$  té arrels  $-1$  i  $1$ . Per tant, es podrà escriure com

$$1 - x^4 = (x + 1)(x - 1)q(x) = (x^2 - 1)q(x)$$

Per trobar  $q(x)$  només cal dividir  $1 - x^4$  entre  $x^2 - 1$ :

$$\begin{array}{r} \phantom{x^2 - 1) } -x^2 - 1 \\ \hline x^2 - 1 \big) -x^4 \phantom{+ 1} \\ \phantom{x^2 - 1) } x^4 - x^2 \\ \hline \phantom{x^2 - 1) } \phantom{x^4 - } -x^2 + 1 \\ \phantom{x^2 - 1) } \phantom{x^4 - } x^2 - 1 \\ \hline \phantom{x^2 - 1) } \phantom{x^4 - } 0 \end{array}$$

Per tant:

$$1 - x^4 = (x + 1)(x - 1)(-x^2 - 1)$$

# Resolució de la indeterminació

Retornant al problema, la funció la podem simplificar:

$$\frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4} = \frac{-2\cancel{(x-1)}(x-2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}(-1-x^2)}$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-2(x-2)}{(x+1)(-1-x^2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Per tant, la funció tindrà una discontinuïtat evitable en  $x = 1$ .