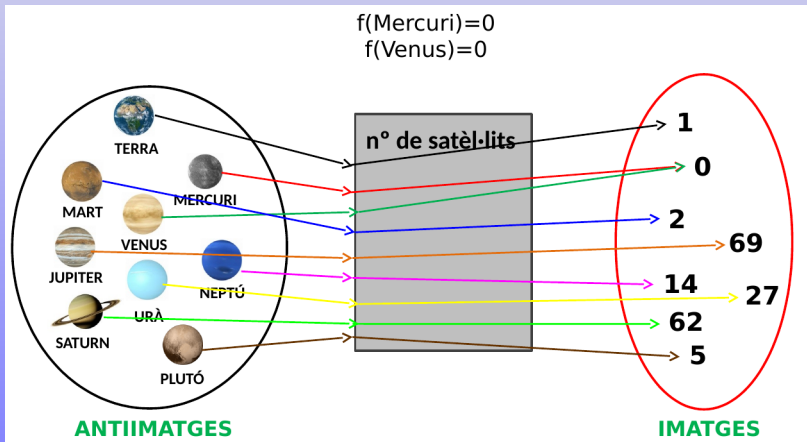


Funcions

Què és una funció?

Definició

Una funció és una “cosa” que assigna “coses” a altres “coses”



Funcions reals de variable real

Nosaltres considerem funcions que van del conjunt dels nombres reals al conjunt dels nombres reals. Aquestes funcions es diuen “funcions reals (perquè tornen un nombre real) de variable real (perquè la variable independent, x , també és un nombre real)”.

Això es representa de la següent manera:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Funcions reals de variable real

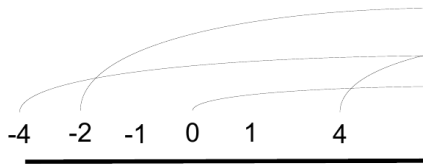
Definició

A cada nombre s'hi assigna un altre nombre, mitjançant, en general, una expressió algebraica.

Per exemple, $f(x) = x^2$

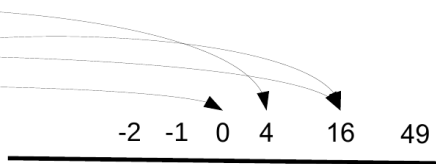
SORTIDA (NOMBRES REALS)

x (variable independent)



ANTIIMATGES

**ARRIBADA
(NOMBRES REALS)**

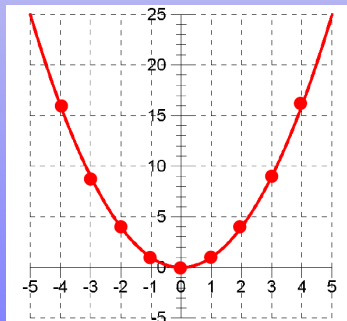


IMATGES

Funcions reals de variable real: taula de valors

$$f(x) = x^2$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{2}$
f(x)	9	4	1	0	1	4	9	2



Punts de tall amb els eixos

- **Eix vertical (ordenades):** ordenada a l'origen o bé imatge del zero: $f(0)$. El punt és de la forma $(0, f(0))$
- **Eix horitzontal (abscisses):** busquem el valor de x que fa que $f(x) = 0$, són punts de la forma $(a, 0)$ on $x = a$ és una solució de l'equació:

$$f(x) = 0$$

Domini d'una funció

No tots els valors de x tenen perquè tenir imatge.

Definició

Domini: són tots els valors d' x pels quals la funció ens retorna algun valor (tenen imatge)

Motius pels quals una funció no retorna alguna valor:

- Denominadors que s'anul·len: caldrà veure per quins valors d' x el denominador s'anul·la i treure aquells valors del domini.
- Arrels que es fan negatives.
- Funcions definides a trossos: cal assegurar-se que estiguin ben definides als canvis de branca.
- Logaritmes que s'anul·len o són negatius.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

Domini:

$$x + 2 = 0 \implies x = -2$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Punts de tall amb els eixos:

- Eix d'ordenades: $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2} \implies \boxed{\left(0, -\frac{1}{2}\right)}$

- Eix d'abscisses:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$$

$$\boxed{(-1, 0)}$$

$$\boxed{(1, 0)}$$

Taula de valors

x	$f(x)$
0	$-\frac{1}{2}$
1	0
-1	0
2	$\frac{3}{4}$
-2	$\frac{7}{4}$

Exemple 2

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$$

Domini: lo de dins de l'arrel (radicand) no pot ser negatiu.

- 1 Mirem quan val 0: $x^2 - x - 6 = 0 \implies x = -2$ i $x = 3$
- 2 Mirem quan és negatiu avaluant el radicand:



- 3 Ens quedem amb els valors que fan que el radicand sigui positiu o 0:

$$D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$$

Trobar els dominis i punts de tall de les següents funcions:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

$$g(x) = \sqrt{x - 10}$$

$$h(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

Domini: problemes si el denominador s'anul·la:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Punts de tall eix abscisses: $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2 \implies (-2, 0) \quad (2, 0)$.

Punts de tall eix ordenades: $(0, f(0)) = (0, \frac{0-4}{0-0+1}) = (0, -4)$.

$$g(x) = \sqrt{x - 10}$$

Domini: necessitem

$$x - 10 \geq 0 \implies x \geq 10$$

o bé gràficament: busquem quan $x - 10 = 0$ i avaluem en algun valor per mirar els signes:

$$\begin{array}{c} - \quad \quad + \\ \cdots \text{---} | \text{---} \cdots \\ 10 \end{array}$$

Per tant

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, 10) = [10, \infty)$$

Tall eix abscesses: $\sqrt{x - 10} = 0 \implies x - 10 = 0 \implies x = 10 \implies (10, 0)$.

Tall eix ordenades: $f(0) = \sqrt{-10} \nexists \implies$ No talla l'eix y .

$$h(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$$

Domini:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \implies x = -1 \quad x = -2$$

Per tant,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

Punts de tall abscisses: $x+1=0 \implies x=-1$.

Però alerta!!!!

$$-1 \notin D(f) \implies \text{no talla l'eix } x$$

Tall ordenades: $f(0) = \frac{1}{2} \implies (0, \frac{1}{2})$

Definicions

Podem seguir les definicions amb el següent enllaç a Geogebra:

<https://www.geogebra.org/m/d57hb87x>

- **Recorregut o imatge d'una funció:** és el conjunt de valors pels quals **tenim antiimatge**. Per exemple, si $f(x) = x^2$ tenim que 2 i -2 són les antiimatges de 4, però en canvi -1 no té cap antiimatge. Per tant $\text{Im}(f) = [0, \infty)$. El recorregut pertany a l'espai d'arribada (eix d'ordenades).
- **Injectiva:** una funció és injectiva si cada valor té com a **molt una antiimatge**. Per exemple, $f(x) = x^2$ no és injectiva, ja que tenim valors amb més d'una antiimatge. Per exemple $f(1) = f(-1) = 1$ (1 té dues antiimatges, $x = 1$ i $x = -1$).
- **Exhaustiva:** una funció és exhaustiva si **omple tot l'espai d'arribada**. És a dir, tots els valors tenen alguna antiimatge. Per exemple, $f(x) = x^2$ no és exhaustiva, ja que els negatius no tenen antiimatges. També podem dir que f és exhaustiva si

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

- **Bijectiva:** diem que f és bijectiva si és bf exhaustiva i injectiva. $\implies$ correspondència 1 a 1 entre els conjunts de sortida i arribada.
- **Nucli:** el nucli d'una funció són els valors que van a parar el zero: $\text{Nuc}(f)$. El nucli pertany a l'espai de sortida.

Definicions alternatives

- **Recurregut d'una funció**: són els valors de l'eix vertical pels quals, si tracem un recta horitzontal tallem la funció en algun punt.
- Una funció és **injectiva** si qualsevol recta horitzontal talla la funció **com a molt** un cop (pot no tallar!).
- Una funció és **exhaustiva** si qualsevol recta horitzontal la talla **com a mínim** un cop (pot tallar més d'un cop!)
- Una funció és bijectiva si **totes** les rectes horitzontals la tallen **exactament** un cop.
- El **nucli** d'una funció ($\text{Nuc}(f)$) són les coordenades x els punts de tall amb l'eix d'abscises.

Excepte les verticals, són de la forma:

$$f(x) = mx + n$$

- m : pendent de la recta:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan(\alpha)$$

L'angle α és l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscises.

- n : ordenada a l'origen (punt de tall amb l'eix vertical o d'ordenades), ja que $f(0) = n$

Una funció és lineal si compleix el següent:

- ❶ $f(\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot f(x_1)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$
- ❷ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Funcions lineals

Les úniques funcions lineals són les rectes que passen per l'origen ($n = 0$):

$$f(x) = mx$$

Vegem-ho:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f(\lambda \cdot x) &= m \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \overbrace{m \cdot x}^{f(x)} = \lambda \cdot f(x) \quad (\text{Proporcionalitat directa!}) \\ \textcircled{2} \quad f(x_1 + x_2) &= m(x_1 + x_2) = \overbrace{m \cdot x_1}^{f(x_1)} + \underbrace{m \cdot x_2}_{f(x_2)} \end{aligned}$$

Funcions afins

Són funcions de la forma:

$$f(x) = mx + n$$

Són funcions lineals llevat d'un "offset", és a dir, si restem una certa quantitat fixa a la funció obtenim una funció lineal:

$$g(x) = f(x) - n = mx$$

La funció $g(x)$ és lineal.

Paràboles

Les que tenen l'eix vertical són de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Si $a > 0$ mira amunt (convexa)
- Si $a < 0$ mira avall (còncava)
- Punt de tall amb l'eix d'ordenades (vertical): $(0, c)$, ja que $f(0) = c$
- Punts de tall amb l'eix d'abscisses. N'hi pot haver un, dos o cap, segons el nombre de solucions de l'equació:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vèrtex d'una paràbola: (x_v, y_v)

Per trobar la coordenada x del vèrtex, x_v , primer escrivim

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Ara, si ho poguéssim escriure com

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + A)^2 + C$$

el vèrtex estarà quan $x + A = 0$, d'on $x_v = -A$.

Si desfem la banda dreta ens queda

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2Ax + A^2 + C$$

Per tant, igualant coeficients trobem

$$2A = \frac{b}{a} \implies A = \frac{b}{2a} \implies x_v = -\frac{b}{2a} \implies y_v = f(x_v)$$

Operacions amb funcions

Segui amb l'applet de Geogebra

<https://www.geogebra.org/m/uhcx2hku>

Si tenim dues funcions $g(x)$ i $f(x)$ podem:

- **Multiplicar per un escalar:** $\lambda \cdot f(x)$, on $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **Sumar:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Multiplicar:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Funció inversa respecte el producte:** $(1/f)(x) = \frac{1}{f(x)}$

La resta i la divisió de funcions no són més que

- **Resta:** suma de l'oposat:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x)$$

- **Divisió:** producte per l'invers (respecte el producte):

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

Dominis d'operacions entre funcions

- **Producte per escalar:**

$$D(\lambda \cdot f) = D(f)$$

- **Suma** o resta:

$$D(f + g) = D(f - g) = D(f) \cap D(g)$$

- **Funció producte:**

$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

- **Funció inversa respecte el producte:**

$$D(1/f) = D(f) \setminus \text{Nuc}(f)$$

- **Funció quocient.**

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \text{Nuc}(g)$$

Nuclis d'operacions entre funcions

Si coneixem $\text{Nuc}(f)$ i $\text{Nuc}(g)$ coneixem les solucions de

$$f(x) = 0 \quad g(x) = 0$$

Què podem dir de:

- $\text{Nuc}(f \cdot g)$
- $\text{Nuc}(f + g)$
- $\text{Nuc}(f/g)$

Nucli del producte: $\text{Nuc}(f \cdot g)$

Busquem solucions de l'equació

$$f(x) \cdot g(x) = 0$$

si $a \in \text{Nuc}(f)$ i $b \in \text{Nuc}(g)$ aleshores

$$f(a) \cdot g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$$

$$f(b) \cdot g(b) = f(b) \cdot 0 = 0$$

sempre i quan... puguem avaluar $g(a)$ i $f(b)$! A més a més

$$f(a) \cdot g(a) = 0 \implies f(a) = 0 \text{ o } g(a) = 0$$

Per tant,

$$\text{Nuc}(f \cdot g) = \left(\text{Nuc}(f) \cap D(g) \right) \cup \left(\text{Nuc}(g) \cap D(f) \right)$$

Nucli de la suma: $\text{Nuc}(f + g)$

Busquem solucions de l'equació

$$f(x) + g(x) = 0$$

Si $a \in \text{Nuc}(f)$ però $a \notin \text{Nuc}(g)$ aleshores

$$f(a) + g(a) = 0 + g(a) = g(a) \neq 0 \implies a \notin \text{Nuc}(f + g)$$

En canvi, si $a \in \text{Nuc}(f)$ i $a \in \text{Nuc}(g)$ és a dir, $a \in \text{Nuc}(f) \cap \text{Nuc}(g)$,

$$f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0 \implies a \in \text{Nuc}(f + g)$$

Per tant:

$$\text{Nuc}(f + g) \supseteq \text{Nuc}(f) \cap \text{Nuc}(g)$$

És a dir, el nucli de $f + g$ conté la intersecció dels nuclis de f i g :

Fixem-nos, si

$$f(a) + g(a) = 0 \not\Rightarrow g(a) = 0 \text{ i } f(a) = 0$$

Nucli del quocient: $\text{Nuc}(f/g)$

Busquem solucions de l'equació:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

D'una banda necessitem $f(a) = 0$, però també:

- poder avaluar $g(x)$ en $x = a$ ($a \in D(g)$)
- que $g(a) \neq 0$ ($a \notin \text{Nuc}(g)$)

Per tant,

$$\text{Nuc}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\text{Nuc}(f) \cap D(g)\right) \setminus \text{Nuc}(g)$$

Composició de funcions

Definició (Composició de dues funcions)

Donades dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, definim la funció “ f composta amb g ” com

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

(primer fem g i el que ens dóna ho “fiquem” a f)

$$\begin{array}{ccccc} & g & & f & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Composició de funcions: exemple

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$$

aleshores

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{3x+1}{x-1} + 2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = \frac{3\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+2} - 1}$$

Composició de funcions: propietats

- ❶ **No és commutativa:** $f \circ g \neq g \circ f$
- ❷ **És associativa:** $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- ❸ **No és distributiva respecte la suma:** $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$
- ❹ **Element neutre:** $Id(x) = x$, funció **identitat** (funció que no fa res):

$$(f \circ Id)(x) = f(Id(x)) = f(x)$$

$$(Id \circ f)(x) = Id(f(x)) = f(x),$$

no fa res en operar-la amb la composició.

- ❺ **Funció inversa:** $f^{-1}(y)$ desfà el que fa una funció $f(x)$:

$$(f \circ f^{-1})(x) = Id(x) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = Id(x) = x$$

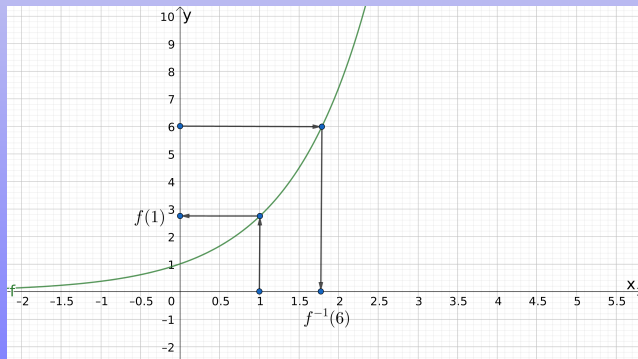
No sempre existeix!!!

La funció inversa

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

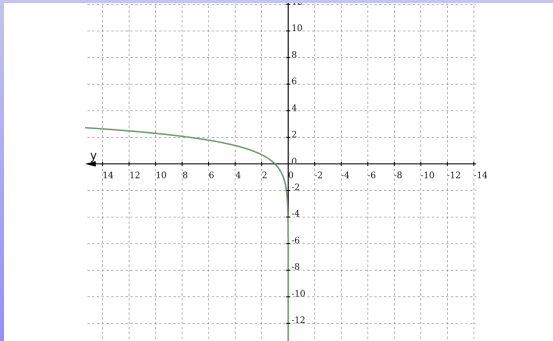
$$x \longmapsto f(x) = y$$

$$x = f^{-1}(y) \longleftarrow y$$

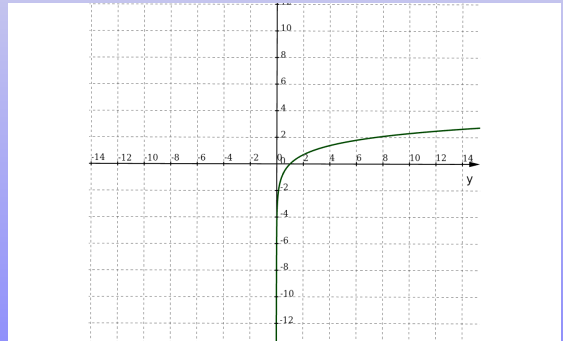


Gràfica de la funció inversa

- 1 Girar 90° en sentit antihorari
- 2 Fer una simetria

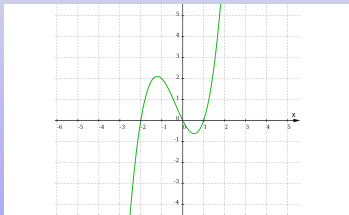


(a) Gràfica girada 90° , l'eix y queda invertit.

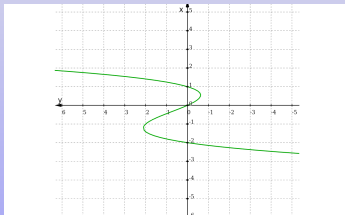


(b) Gràfica girada 90° després de la simetria.

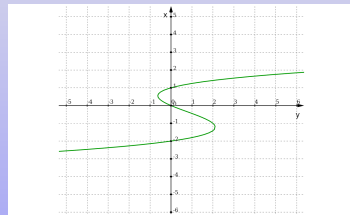
Funció inversa d'una funció no injectiva



(a) Funció no injectiva



(b) Gràfica girada 90°



(c) Simètrica de la gràfica girada 90° .

NO és una funció!!!!

Càlcul de la funció inversa

Cal escriure x en funció de y ; és a dir, cal aïllar x de l'equació

$$f(x) = y$$

Càlcul de la funció inversa

Exemple

$$f(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

$$y = \frac{x+3}{x-1}$$

$$\begin{aligned} y(x-1) &= x+3 \longrightarrow y(x-1) - x - 3 = 0 \longrightarrow yx - y - x - 3 = 0 \\ &\longrightarrow x(y-1) - y - 3 = 0 \longrightarrow x = \frac{y+3}{y-1} \end{aligned}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-1}$$

Domini de la composició i la inversa

Domini de la inversa

Si f és injectiva aleshores:

$$D(f^{-1}) = R(f)$$

Domini de la composició

Per avaluar $(f \circ g)(x)$ ens caldrà:

- Poder avaluar g : $D(f \circ g) \subseteq D(g)$
- Caldrà descartar els valors que facin que $g(x) \notin D(f)$

Domini de la composició i la inversa

Exemple

Exercici 22 dels problemes resolts.

Funcions definides a trossos

Són funcions de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \text{funció 1} & \text{Si } x \dots \\ \text{funció 2} & \text{Si } x \dots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Per exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Infinitat d'aplicacions

- Electrònica (transistors)
- Neurociència (neurones que descarreguen de sobte)
- Robòtica/mecànica (robots que caminen)
- Biologia (alliberació sobtada d'hormones)

Límits laterals

Què són?

Ens preguntem quant val la funció quan x **s'apropa** a un cert valor (a)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow A$ quin valor s'apropa la funció quan x s'apropa a a ?

A $x = a$ ens hi podem apropar per la dreta o per l'esquerra:

A horizontal line with a central point labeled a . To the left of a is a point labeled a^- , and to the right is a point labeled a^+ . The line is dotted at both ends.

Límits laterals

Distingim si ens apropem per la dreta o per l'esquerra fem els **límits laterals**:

Per l'esquerra

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-)$$

Per la dreta

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+)$$

A la pràctica

Els límits laterals en $x = a$ valen el que val la funció en $x = a$ a no ser que $f(x)$ tingui “algun problema” en $x = a$.

Per tant, **en principi**, els límits valen el mateix que $f(a)$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

i només caldrà avaluar $f(x)$ en $x = a$.

Límits laterals

Laterals iguals

Quan els límits laterals són iguals:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

aleshores diem que el límit (sense laterals) existeix i val el mateix que els laterals:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Laterals diferents

En canvi, si els laterals són diferents, aleshores el límit (sense laterals) no existeix (perquè depèn de per s'apropi x a a):

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) \nexists$$

Límits laterals

Per què fem els límits laterals?

Per estudiar el comportament de la funció allà on hi ha problemes.

Possibles problemes:

- **Punts que no siguin del domini:** volem saber què fa la funció quan ens apropem a un valor que no és del domini.
- **Canvis de branca en funcions definides a trossos:** en canviar de branca, les enganxem bé?

Exemple gràfic

<https://www.geogebra.org/m/pbpnfbzz>

Límits laterals en canvis de branca

Si tenim

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < a \\ f_2(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Aleshores

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f_1(a^-) \quad \text{perquè } a^- < a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f_2(a^+) \quad \text{perquè } a^+ > a$$

Si f_1 i f_2 no tenen “cap problema” en $x = a$, aleshores només caldrà substituir:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f_1(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f_2(a)$$

Límits laterals en punts on s'anul·la el denominador

Tenim dos casos possibles

- 1 Que **només** s'anul·li el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k(\neq 0)}{0}$$

Com el denominador segurament canviarà de signe en $x = a$, caldrà fer els límits laterals per veure si valen $+\infty$ o $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

- 2 Que també s'anul·li el numerador

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

$$\text{Cas } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k(\neq 0)}{0}$$

Caldrà mirar en signe del denominador de f a banda i banda de $x = a$.

Signe denominador $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c} \pm \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad \pm \\ \qquad \qquad \qquad 0 \pm 0 \pm \\ \hline \qquad \qquad \qquad a \end{array}$$

Tenint en compte el signe del numerador i el que ens hagi sortit a banda i banda de $x = a$ decidim si ens dóna $+\infty$ o $-\infty$.

Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Si en substituir $x = a$ en una funció ens trobem que

$$f(a) = \frac{0}{0}$$

aleshores el numerador i denominador de f tenen factors en comú.

Caldrà

- 1 Factoritzar numerador i denominador
- 2 Simplificar al màxim: només quedarà el factor que s'anul·la al numerador o al denominador, però no als dos llocs alhora.
- 3 Tornar a fer el límit

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0}$$

Si traiem factor comú x al denominador tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{2}$$

Observació

Un cop hem simplificat, si el límit existeix no caldrà distingir entre els límits laterals (perquè aquests són iguals).

Com es factoritza un polinomi?

Què és factoritzar?

Factoritzar vol dir convertir en productes (factors): $90 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$
3, 2 i 5 són els divisors primers de 90.

Els polinomis són com els enters:

- Es poden sumar (i restar). Tenen neutre respecte la suma: el 0.
- Es poden multiplicar, i tenen neutre respecte el producte: l'1
- No hi ha invers respecte el producte. Amb els enters només l'1 en té, i als polinomis només els de grau 0.
- Es poden dividir amb quocient i residu: divisó Euclidiana Per tant, es poden factoritzar.

Com es factoritza un polinomi?

Hem de trobar divisors:

Símil amb els eners

3 divideix 12:

$$\underbrace{12}_{\text{Dividend}} = \underbrace{3}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{4}_{\text{Quocient}} + \underbrace{0}_{\text{Residu}}$$

Amb polinomis

Busquem divisors: $x - 1$ divideix $x^2 - 1$

$$\underbrace{x^2 - 1}_{\text{Dividend}} = \underbrace{(x - 1)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{(x + 1)}_{\text{Quocient}} + \underbrace{0}_{\text{Residu}}$$

Com es factoritza un polinomi?

A la pràctica

- 1 Identificant alguna identitat notable: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
- 2 Trobant les arrels. És a dir, resolent l'equació

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0 = 0$$

Escriure un polinomi com a producte de factors, **en principi**, voldríem obtenir:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0 = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

on $c_1, c_2, \dots, c_n$ són les arrels. Com a molt n'hi haurà n de solucions (Teorema Fonamental de l'Àlgebra, Gauss)

Com es factoritza un polinomi?

Fixem-nos per què. Si tenim

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1x + a_0 = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \dots (x - c_n)$$

aleshores nombres $c_1, c_2, \dots, c_n$ són les solucions de l'equació

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 + a_0 = 0$$

- Si $x = c_1$ quedarà

$$c_1^n + a_1 \cdot c_1^{n-1} + \dots a_1 \cdot c_1 + a_0 = (c_1 - c_1) (c_1 - c_2) \dots (c_1 - c_n) = 0$$

- Si $x = c_2$ quedarà

$$c_2^n + a_1 \cdot c_2^{n-1} + \dots a_1 \cdot c_2 + a_0 = (c_2 - c_1) \cdot (c_2 - c_2) \dots (c_2 - c_n) = 0$$

- Etc

Com es factoritza un polinomi?

Per tant, cal trobar les arrels del polinomi resolent l'equació:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0 = 0$$

- Fins a grau 2 ho sabem fer (de fet 3 i 4 també, per Cardano, però és un embolic). A partir de grau 5 no hi ha fórmula (Galois).
- Per tant, a partir de grau 3 haurem de buscar-nos la vida:
 - Traient factor comú x (si es pot) i reduïnt el grau
 - Si és incompleta potser podem fer alguna cosa (biquadrades i altres trucs de màgia)
 - Si trobem una arrel entera ($x = a$) podem dividir pel binomi $x - a$ (Ruffini)
- Hi ha polinomis sense arrels reals ($x^2 + 2$). Són polinomis irreductibles (als reals!)
- Hi poden haver arrels repetides!

Com es factoritza un polinomi?

A la pràctica

Un cop tenim totes les arrels (comptant les repetides) el polinomi factoritzat serà

$$a(x - c_1)^{m_1}(x - c_2)^{m_2} \cdots (x - c_n)^{m_n} \cdot \underbrace{(x^2 + b)}_{\text{Irreductible si } b > 0}$$

L'exponent m_1 s'anomena **multiplicitat** de l'arrel c_1 (el nombre de vegades que l'arrel $x = c_1$ ha aparegut)

Símil amb els enters

La multiplicitat ens diu quantes vegades apareix cada factor primer:

$$2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Factorització de polinomis

Oju

Cal assegurar-se que el coeficient de grau més alt és 1. Si no ho és traiem factor comú:

$$2x^3 - 4x^2 + 3x + 8 = 2 \left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 4 \right)$$

En general, si el coeficient de grau més alt no és 1, aleshores:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)^{m_1} (x - c_2)^{m_2} \dots$$

Factorització de polinomis

Exemple

Factoritzar

$$x^2 - 3x + 2$$

Busquem les arrels

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = 1, \quad x = 2$$

Per tant

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Factorització de polinomis

Exemple

Factoritzar

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Busquem les arrels

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1$$

És una arrel doble (multiplicitat 2) i, per tant,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Factorització de polinomis

Exemple

Factoritzar

$$2x^2 - 3x - 2$$

En busquem les arrels

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \implies x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \implies x = 2 \quad x = -\frac{1}{2}$$

Per tant

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Exemple

Factoritzar

$$x^2 + 4$$

Busquem les arrels

$$x^2 + 4 = 0 \implies x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Com no té arrels reals, el polinomi és irreductible (a $\mathbb{R}[x]$!)

Observació

Els polinomis irreductibles fan el paper del “nombres primers” en els enters.

Factorització

Exemple

Factoritzar

$$x^3 + 2x^2 - 3x$$

Com és de grau 3, en principi, no sabem trobar-ne les arrels. Però podem treure factor comú:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$$

Podem seguir factoritzant trobant les arrels de $x^2 + 2x - 3$. Recordeu el símil amb els enters:

$$60 = 5 \cdot 12 \implies \text{Seguim factoritzant } 12$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x = -3, \quad x = 1$$

Per tant tindrem

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x + 3)(x - 1)$$

Factorització de polinomis

Observació

Fixeu-vos que $x = 0$, $x = -3$ i $x = 1$ són les arrels i, per tant,

$$x^3 + 2x^2 - 3x = (x - 0)(x + 3)(x - 1)$$

Continguts examen 13-12-2021

- Successions

- Saber resoldre indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ i $\infty - \infty$
- Saber trobar límits de successions sense indeterminacions

- Funcions

- Tenir clar els conceptes de funció, imatge, antiimatge, domini, exhaustiva, injectiva, bijectiva, recorregut, nucli.
- Saber calcular punts de talls amb els eixos, dominis funcions amb denominadors, arrels i funcions a trossos
- Operacions amb funcions:
 - Saber calcular el domini de la suma, resta, producte i quocient de funcions coneguts els dominis i nuclis
 - Ídem amb la composició. Saber si una funció és invertible, i saber-ne calcular la inversa, si es pot.
- Límits laterals: saber-los calcular gràficament (donada la gràfica) i analíticament (donada la funció). Tenir clar quan caldrà distingir entre límits laterals (asímtotes verticals o funcions a trossos) i quan no (altres casos).
- Factorització: saber resoldre indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$.

Com estudiar per l'examen

- Mirar la teoria: Llegir les transparències fins aquesta, inclosos els enllaços a Geogebra. Assegurar-se que s'entèn. Mirar els apunts per acabar d'entendre.
- Mirant amb molt de detall absolutament tots els exercicis que s'han fet, amb el boli sobre la taula i assegurar-se que s'han entès
- Fent els exàmens d'anys anteriors i mirar després les solucions (no al revés).
- Practicar amb els exercicis resolts del pdf de problemes resolts d'anys anteriors. Sobretot les seccions 1 (successions) i 2.1 a 2.4 (inclosos). Feu-ne uns quants i corregiu amb les solucions que hi teniu.

Factorització de polinomis

Factoritzar

$$x^3 - 7x - 6$$

No sabem trobar-ne les arrels... però si ens hi fixem, ràpidament veiem que $x = -1$ n'és una!

Per tant

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 1) \cdot ?q(x) + \underbrace{0}_{\text{Residu}}$$

I com trobem el polinomi $q(x)$??? Com $x + 1$ divideix el polinomi (el residu és 0) $q(x)$ serà el quocient de la divisió

$$\frac{x^3 - 7x - 6}{x + 1} = q(x)$$

Factorització de polinomis

Fem la divisió:

Divisió tradicional:

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 6 \\ x+1 \overline{) x^3 - 7x - 6} \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ -x^2 - 7x \\ \underline{x^2 + x} \\ -6x - 6 \\ \underline{6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 2)(x^2 - x - 6) + 0$$

i podem seguir factoritzant $x^2 - x - 6$.

Factorització de polinomis

En general: si $x = a$ és un arrel del polinomi $p(x)$ aleshores

$$x - a \text{ divideix } p(x) \implies p(x) = (x - a)q(x)$$

Troblem el polinomi $q(x)$ fent la divisió tradicional o bé per Ruffini.

Analogia amb els nombres enters

Si d divideix D aleshores existeix q de manera que

$$D = d \cdot q$$

Si d no divideix D aleshores existeixen q i r de manera que

$$D = d \cdot q + r$$

(D : dividend, d : divisor, q : quocient, r : residu)

Factorització de polinomis

Com podem trobar candidats a arrels per fer Ruffini i dividir per $x - a$?

- 1 A vista (amb sort)
- 2 Divisors del terme independent

Teorema del residu

Si $p(x)$ és un polinomi a coeficients enters, i $x = a$ és una arrel, aleshores a divideix el terme independent de $p(x)$.

Demostració:

Si $x = a$ és arrel, aleshores $p(x) = (x - a)q(x)$. Avaluant en $x = 0$ obtenim:

$$p(0) = -a \cdot q(0) \implies \text{l'arrel } a \text{ ha de dividir el terme independent de } p(x)$$

perquè $p(0)$ i $q(0)$ són enters i són els termes independents.

Exemple

Volem factoritzar el polinomi

$$x^3 - 13x - 12$$

Busquem les seves arrels, les solucions de

$$x^3 - 13x - 12 = 0,$$

Provem si hi ha alguna arrel entera: divisors del terme independent: 1, -1, 2, -2, 3, 3, 4, -4, 12 i -12.

$$p(1) = -24 \text{ no és arrel} \quad p(-1) = 0 \text{ sí que ho és}$$

Com -1 és una arrel, dividim el polinomi entre $x + 1$ (alerta el canvi de signe). Ho fem per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -13 & -12 \\ & & -1 & 1 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

Exemple

Per tant tenim

$$x^3 - 13x - 12 = (x + 1)(x^2 - x - 12).$$

Si hi ha més arrels aquestes són les del quocient:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12}}{2} \implies x = 4 \text{ i } x = -3.$$

Per tant les arrels del polinomi original són -1 , -3 i -4 .

El polinomi factoritzat serà:

$$x^3 - 13x - 12 = (x + 1)(x + 3)(x + 4)$$

Exemple

Calcular el límit

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Substituint $x = 1$ trobem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Factoritzant trobem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(\cancel{x - 1})}{\cancel{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$