

Geometria analítica al pla

Elements d' $\mathbb{R}^2$

Els elements de $\mathbb{R}^2$ són parelles de nombres reals. Normalment es representen dins un parèntesis i se separen per una coma:

$$(1, 2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^3 \implies (x, y, z)$$

$$\mathbb{R}^4 \implies (x, y, z, t)$$

$$\mathbb{R}^n \implies (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\mathbb{R}^\infty \implies (a_n)_n$$

Punts o vectors?

Un element de $\mathbb{R}^2$ es podem pensar com:

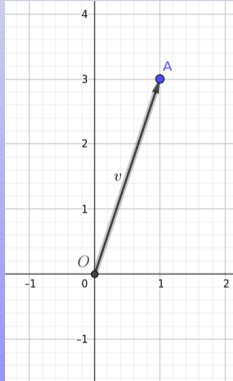
- $A = (1, 3)$: punt situat a 1 dreta/ 3 amunt. Normalment es representen amb lletres majúscules.

Punts o vectors?

Un element de $\mathbb{R}^2$ es podem pensar com:

- $A = (1, 3)$: punt situat a 1 dreta/ 3 amunt. Normalment es representen amb lletres majúscules.
- $\vec{v} = (1, 3)$: vector que va de l'origen $(0, 0)$ al punt $(1, 3)$. Normalment es representen amb lletres minúscules en negreta o amb una fletxa al damunt.

Punts o vectors?



Suma de vectores

Els vectors/punts es poden sumar de la manera natural:

$$(4, 2) + (1, 4) = (4 + 1, 2 + 4) = (5, 6)$$

$$P = \vec{v} = (4, 2)$$

$$Q = \vec{u} = (1, 4)$$

$$S = \vec{w} = (5, 6)$$

Suma de vectores

Els vectors/punts es poden sumar de la manera natural:

$$(4, 2) + (1, 4) = (4 + 1, 2 + 4) = (5, 6)$$

$$P = \vec{v} = (4, 2)$$

$$Q = \vec{u} = (1, 4)$$

$$S = \vec{w} = (5, 6)$$

$S = Q + \vec{v}$: Punt que s'obté en
situar $\vec{v}$ sortint de Q

Suma de vectores

Els vectors/punts es poden sumar de la manera natural:

$$(4, 2) + (1, 4) = (4 + 1, 2 + 4) = (5, 6)$$

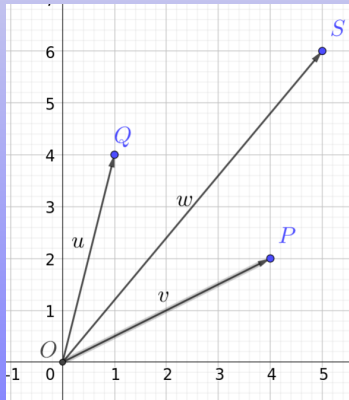
$$P = \vec{v} = (4, 2)$$

$$Q = \vec{u} = (1, 4)$$

$$S = \vec{w} = (5, 6)$$

$S = Q + \vec{v}$: Punt que s'obté en situar $\vec{v}$ sortint de Q

$S = P + \vec{u}$: Punt que s'obté en situar $\vec{u}$ sortint de P



Geomètricament, què fem quan restem?

$$(1, 2) - (2, 4) = (-1, -2)$$

Resta

Geomètricament, què fem quan restem?

$$(1, 2) - (2, 4) = (-1, -2)$$

Sabem que

$$P + \vec{v} = Q \implies \vec{v} \text{ va de } P \text{ a } Q$$

Resta

Geomètricament, què fem quan restem?

$$(1, 2) - (2, 4) = (-1, -2)$$

Sabem que

$$P + \vec{v} = Q \implies \vec{v} \text{ va de } P \text{ a } Q$$

Aïllant:

$$\vec{v} = Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

Resta

Geomètricament, què fem quan restem?

$$(1, 2) - (2, 4) = (-1, -2)$$

Sabem que

$$P + \vec{v} = Q \implies \vec{v} \text{ va de } P \text{ a } Q$$

Aïllant:

$$\vec{v} = Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

Resta: extrem menys origen

En restar dos punts obtenim el vector que va d'un a l'altre:

$$Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

Producte **per** escalar

Els vectors els podem multiplicar per un nombre real (un escalar):

$$2 \cdot (1, 3) = (2, 6)$$

Els vectors els podem multiplicar per un nombre real (un escalar):

$$2 \cdot (1, 3) = (2, 6)$$

- En multiplicar un vector per un escalar obtenim un vector amb la mateixa direcció (estan alineat, són **linealment dependents**). El vector resultat pot ser més llarg o més curt.

Producte **per** escalar

Els vectors els podem multiplicar per un nombre real (un escalar):

$$2 \cdot (1, 3) = (2, 6)$$

- En multiplicar un vector per un escalar obtenim un vector amb la mateixa direcció (estan alineat, són **linealment dependents**). El vector resultat pot ser més llarg o més curt.
- Si l'escalar pel qual multipliquem és negatiu, el vector resultant tindrà la **mateixa direcció** però **sentit contrari**, a més de ser més llarg o més curt.

Vectors amb la mateixa direcció

Vecotrs amb la mateixa direcció

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció si són múltiples. És adir, existeix algun $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Vectors amb la mateixa direcció

Vecotrs amb la mateixa direcció

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció si són múltiples. És adir, existeix algun $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Si escrivim $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, això és equivalent a dir que les coordenades han de complir el següent sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \end{array} \right\}$$

Vectors amb la mateixa direcció

Vecotrs amb la mateixa direcció

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció si són múltiples. És adir, existeix algun $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Si escrivim $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, això és equivalent a dir que les coordenades han de complir el següent sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \end{array} \right\}$$

Fent igualació obtenim:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{u_1}{v_1} \\ \lambda = \frac{u_2}{v_2} \end{array} \right\} \iff \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \iff \boxed{u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0}$$

Vectors amb la mateixa direcció

L'expressió

$$v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1$$

s'anomena **determinant dels vectors** $\vec{u}$ i $\vec{v}$. De fet, és producte escalar entre els vectors $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u}^\perp = (u_2, -u_1)$:

$$v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1 = 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{u}^\perp = 0$$

Vectors amb la mateixa direcció

L'expressió

$$v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1$$

s'anomena **determinant dels vectors** $\vec{u}$ i $\vec{v}$. De fet, és producte escalar entre els vectors $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u}^\perp = (u_2, -u_1)$:

$$v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1 = 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{u}^\perp = 0$$

És a dir:

Mateixa direcció

Dos vectors tenen la mateixa direcció si, en girar-ne un 90° serà perpendicular a l'altre.

Producte **per** escalar

Resumint:

Si tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ (un escalar) i $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ (un vector), aleshores :

Producte **per** escalar

Resumint:

Si tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ (un escalar) i $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ (un vector), aleshores :

- $\vec{v}$ i $\lambda \vec{v}$ tenen la **mateixa direcció**, perquè $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\cancel{\lambda}v_y}{\cancel{\lambda}v_x}$

Producte **per** escalar

Resumint:

Si tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ (un escalar) i $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ (un vector), aleshores :

- $\vec{v}$ i $\lambda \vec{v}$ tenen la **mateixa direcció**, perquè $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\cancel{\lambda}v_y}{\cancel{\lambda}v_x}$
- Si $|\lambda| < 1$ el vector **s'escurça** ja que $|\vec{v}| = \lambda |\vec{v}| < |\vec{v}|$

Producte **per** escalar

Resumint:

Si tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ (un escalar) i $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ (un vector), aleshores :

- $\vec{v}$ i $\lambda \vec{v}$ tenen la **mateixa direcció**, perquè $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\cancel{\lambda}v_y}{\cancel{\lambda}v_x}$
- Si $|\lambda| < 1$ el vector **s'escurça** ja que $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| < |\vec{v}|$
- Si $|\lambda| > 1$ el vector **s'allarga** ja que $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| > |\vec{v}|$

Producte **per** escalar

Resumint:

Si tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ (un escalar) i $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ (un vector), aleshores :

- $\vec{v}$ i $\lambda \vec{v}$ tenen la **mateixa direcció**, perquè $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\cancel{\lambda}v_y}{\cancel{\lambda}v_x}$
- Si $|\lambda| < 1$ el vector **s'escurça** ja que $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| < |\vec{v}|$
- Si $|\lambda| > 1$ el vector **s'allarga** ja que $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| > |\vec{v}|$
- Si $\lambda > 0$ aleshores $\lambda \vec{v}$ i $\vec{v}$ tenen la **mateixa direcció i sentit**

Producte **per** escalar

Resumint:

Si tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ (un escalar) i $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ (un vector), aleshores :

- $\vec{v}$ i $\lambda \vec{v}$ tenen la **mateixa direcció**, perquè $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\cancel{\lambda}v_y}{\cancel{\lambda}v_x}$
- Si $|\lambda| < 1$ el vector **s'escurça** ja que $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| < |\vec{v}|$
- Si $|\lambda| > 1$ el vector **s'allarga** ja que $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| > |\vec{v}|$
- Si $\lambda > 0$ aleshores $\lambda \vec{v}$ i $\vec{v}$ tenen la **mateixa direcció i sentit**
- Si $\lambda < 0$ aleshores $\lambda \vec{v}$ i $\vec{v}$ tenen la **mateixa direcció però sentit contrari**

Observació:

Els vectors no tenen sentit, només direcció. Només podem parlem de sentit quan comparem dos vectors amb la mateixa direcció.

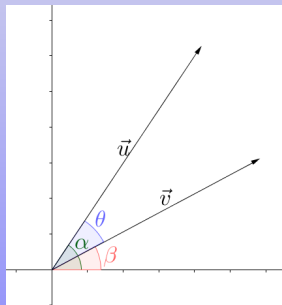
Producte escalar

Volem calcular el cosinus de l'angle entre dos vectors $\vec{v} = (v_x, v_y)$ $\vec{u} = (u_x, u_y)$
Fent servir les fórmules de l'angle suma trobem
que:

$$\cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Recordant què són les coordenades dels vectors
fàcilment obtenim:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{u_x}{|\vec{u}|} & \sin(\alpha) &= \frac{u_y}{|\vec{u}|} \\ \cos(\beta) &= \frac{v_x}{|\vec{v}|} & \sin(\beta) &= \frac{v_y}{|\vec{v}|} \end{aligned}$$



Producte escalar

Substituïnt i operant obtenim

$$\cos(\theta) = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Producte escalar

Substituïnt i operant obtenim

$$\cos(\theta) = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Al numerador d'aquest quocient se l'anomena **producte escalar**, i s'escriu:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle u, v \rangle = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Producte escalar

Substituïnt i operant obtenim

$$\cos(\theta) = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Al numerador d'aquest quocient se l'anomena **producte escalar**, i s'escriu:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle u, v \rangle = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Així, el cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'escriurà:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Propietats del producte escalar

① $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2 \implies \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}}$ El producte escalar defineix la mètrica (la distància)

Propietats del producte escalar

- ❶ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2 \implies |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ El producte escalar defineix la mètrica (la distància)
- ❷ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ aleshores

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ vectors perpendiculars}$$

Propietats del producte escalar

- ❶ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2 \implies |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ El producte escalar defineix la mètrica (la distància)
- ❷ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ aleshores

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ vectors perpendiculars}$$

- ❸ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ aleshores $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle més gran que 90° .

Propietats del producte escalar

- ❶ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2 \implies |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ El producte escalar defineix la mètrica (la distància)
- ❷ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ aleshores

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ vectors perpendiculars}$$

- ❸ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ aleshores $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle més gran que 90° .
- ❹ $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (commutativa)

Propietats del producte escalar

❶ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2 \implies |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ El producte escalar defineix la mètrica (la distància)

❷ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ aleshores

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ vectors perpendiculars}$$

❸ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ aleshores $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle més gran que 90° .

❹ $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (commutativa)

❺ $\langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ($\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, distributiva)

Propietats del producte escalar

- ❶ $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2 \implies \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}}$ El producte escalar defineix la mètrica (la distància)
- ❷ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ aleshores

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ vectors perpendiculars}$$

- ❸ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ aleshores $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle més gran que 90° .
- ❹ $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (commutativa)
- ❺ $\langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ($\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, distributiva)
- ❻ $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ("associativa" amb el producte PER escalar)

Vectors perpendiculars

Vectors perpendiculars

Dos vectors no nuls $\vec{v}$ i $\vec{u}$ són perpendiculars si, i només si, el cosinus de l'angle que formen és nul, cosa que passarà quan

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

Corol·lari

Si $\vec{v} = (a, b)$ aleshores els vectors $(-b, a)$ i $(b, -a)$ són perpendiculars a $\vec{v}$.

Baricentre d'un triangle

Baricentre o centre de gravetat d'un triangle

És el punt on es tallen les mitjanes (van des de la meitat d'un costat al vèrtex oposat)

Baricentre d'un triangle

Baricentre o centre de gravetat d'un triangle

És el punt on es tallen les mitjanes (van des de la meitat d'un costat al vèrtex oposat)

Propietat

Es troba a $\frac{1}{3}$ de la mitjana, a la part propera de la base.

Baricentre d'un triangle

Baricentre o centre de gravetat d'un triangle

És el punt on es tallen les mitjanes (van des de la meitat d'un costat al vèrtex oposat)

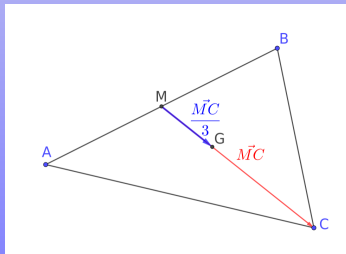
Propietat

Es troba a $\frac{1}{3}$ de la mitjana, a la part propera de la base.

Agafant, per exemple, el costat AB tindrem:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

$$G = M + \frac{\vec{MC}}{3}$$



Equacions d'una recta

Equació d'una recta

Estableix una relació entre x i y de manera que el “lloc geomètric dels punts” sigui una recta.

Equacions d'una recta

Equació d'una recta

Estableix una relació entre x i y de manera que el “lloc geomètric dels punts” sigui una recta.

L'equació la podem donar de diverses maneres

- Punt pendent
- Ordenada a l'origen i pendent
- Dos punts de pas
- **Un punt de pas i una direcció** ← És la més intuïtiva

Equació vectorial

Podeu ajudar-vos de l'applet de geogebra: <https://www.geogebra.org/m/desvaxjw>

Equació vectorial

Es tracta de donar un punt de pas, P , i un **vector director**, $\vec{v}$: Donats un punt de pas, P , i un **vector director**, els punts de la recta els obtenim allargant i escurçant $\vec{v}$ i posant-lo sortint de P . És a dir:

$$(x, y) = P + \lambda \vec{v}$$

Equació vectorial

Podeu ajudar-vos de l'applet de geogebra: <https://www.geogebra.org/m/desvaxjw>

Equació vectorial

Es tracta de donar un punt de pas, P , i un **vector director**, $\vec{v}$: Donats un punt de pas, P , i un **vector director**, els punts de la recta els obtenim allargant i escurçant $\vec{v}$ i posant-lo sortint de P . És a dir:

$$(x, y) = P + \lambda \vec{v}$$

Observació

Si dues rectes tenen vectors directors múltiples, tindran la mateixa direcció (seran paral·lels o bé iguals).

Equació paramètrica

Donem $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $P = (p_1, p_2)$. L'equació vectorial la podem passar a dues equacions reals:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2) \implies \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

Equació paramètrica

Donem $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $P = (p_1, p_2)$. L'equació vectorial la podem passar a dues equacions reals:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2) \implies \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

En variar el paràmetre λ s'obtenen els valors de x i de y .

Equació contínua

Busquem ara una relació entre x i y directa, sense passar pel paràmetre λ . Per fer-ho ens mirem l'equació paramètrica com un sistema d'equacions i el resollem per λ fent igualació:

$$\left. \begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{x - p_1}{v_1} \\ \lambda = \frac{y - p_2}{v_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}}$$

Equació contínua

Busquem ara una relació entre x i y directa, sense passar pel paràmetre λ . Per fer-ho ens mirem l'equació paramètrica com un sistema d'equacions i el resollem per λ fent igualació:

$$\left. \begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{x - p_1}{v_1} \\ \lambda = \frac{y - p_2}{v_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}}$$

Observació

Les rectes horitzontals o verticals no es poden representar en contínua, ja que o bé $v_2 = 0$ (recta horitzontal) o bé $v_1 = 0$ (recta vertical).

Equació general o implícita d'una recta

L'equació contínua la podem reescriure:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \implies (x - p_1) v_2 = (y - p_2) v_1 \implies \underbrace{v_2 x - v_1 y}_{Ax + By} + \overbrace{p_2 v_1 - p_1 v_2}^C = 0$$

Equació general o implícita d'una recta

L'equació contínua la podem reescriure:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \implies (x - p_1) v_2 = (y - p_2) v_1 \implies \underbrace{v_2 x - v_1 y}_{Ax + By} + \overbrace{p_2 v_1 - p_1 v_2}^C = 0$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Gradient d'una recta

El vector (A, B) s'anomena **gradient** de la recta, i és un vector ortogonal a la direcció de la recta: $(A, B) = (v_2, -v_1) \perp (v_1, v_2)$.

Equació explícita

De l'equació general podem aïllar y i pensar la recta com una funció afí:

$$Ax + By + C = 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Equació explícita

De l'equació general podem aïllar y i pensar la recta com una funció afí:

$$Ax + By + C = 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Recordant que $A = v_2$ i $B = -v_1$, ens quedarà:

$$y = \underbrace{\frac{v_2}{v_1}}_m \cdot x + n$$

Equació explícita

De l'equació general podem aïllar y i pensar la recta com una funció afí:

$$Ax + By + C = 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Recordant que $A = v_2$ i $B = -v_1$, ens quedarà:

$$y = \underbrace{\frac{v_2}{v_1}}_m \cdot x + n$$

Observació

Observeu que les rectes verticals no es poden escriure en forma explícita, ja que $v_1 = 0$.

Equació explícita

De l'equació general podem aïllar y i pensar la recta com una funció afí:

$$Ax + By + C = 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Recordant que $A = v_2$ i $B = -v_1$, ens quedarà:

$$y = \underbrace{\frac{v_2}{v_1}}_m \cdot x + n$$

Observació

Observeu que les rectes verticals no es poden escriure en forma explícita, ja que $v_1 = 0$.

Pendent

Com el vector director era $\vec{v} = (v_1, v_2)$, el pendent $m = \frac{v_2}{v_1}$, el pendent de la recta, coincideix amb la tangen de l'angle que forma el vector amb l'eix d'abscises.

Posició relativa de rectes

Al pla dues rectes poden ser:

Posició relativa de rectes

Al pla dues rectes poden ser:

- Paral·leles: mateixa direcció però diferents punts de pas. **Cap punt en comú**

Posició relativa de rectes

Al pla dues rectes poden ser:

- Paral·leles: mateixa direcció però diferents punts de pas. **Cap punt en comú**
- Iguals o coincidents: mateixa direcció i un punt de pas en comú. **Infinits punts en comú**

Posició relativa de rectes

Al pla dues rectes poden ser:

- Paral·leles: mateixa direcció però diferents punts de pas. **Cap punt en comú**
- Iguals o coincidents: mateixa direcció i un punt de pas en comú. **Infinits punts en comú**
- Secants o incidents: direccions diferents. **Exactament un punt en comú.**

Posició relativa de rectes

Al pla dues rectes poden ser:

- Paral·leles: mateixa direcció però diferents punts de pas. **Cap punt en comú**
- Iguals o coincidents: mateixa direcció i un punt de pas en comú. **Infinits punts en comú**
- Secants o incidents: direccions diferents. **Exactament un punt en comú.**

Observació

Això només és cert en geometria Euclidiana. Si es nega el cinquè postulat d'Euclides es creen diferents geometries no-Euclidianes (esfèrica, hiperbòlica, el·líptica) on això no és cert!

Rectes amb la mateixa direcció

En forma vectorial:

$$r : (x, y) = P + \lambda \vec{u} \quad s : (x, y) = Q + k \vec{v}$$

Hauran de tenir vectors directores $\vec{u}$ i $\vec{v}$ amb la mateixa direcció, cosa que passarà si:

- Els vectors directores tenen el mateix pendent: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$

Rectes amb la mateixa direcció

En forma vectorial:

$$r : (x, y) = P + \lambda \vec{u} \qquad s : (x, y) = Q + k \vec{v}$$

Hauran de tenir vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ amb la mateixa direcció, cosa que passarà si:

- Els vectors directors tenen el mateix pendent: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$
- Els vectors directors són proporcionals: $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$

Rectes amb la mateixa direcció

En forma vectorial:

$$r : (x, y) = P + \lambda \vec{u} \quad s : (x, y) = Q + k \vec{v}$$

Hauran de tenir vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ amb la mateixa direcció, cosa que passarà si:

- Els vectors directors tenen el mateix pendent: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$
- Els vectors directors són proporcionals: $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$
- En girar un vector director 90° el producte escalar és nul: $\vec{u} \cdot \vec{u}^\perp = u_1v_2 - u_2v_1 = 0$

Rectes amb la mateixa direcció

En forma vectorial:

$$r : (x, y) = P + \lambda \vec{u} \quad s : (x, y) = Q + k \vec{v}$$

Hauran de tenir vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ amb la mateixa direcció, cosa que passarà si:

- Els vectors directors tenen el mateix pendent: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$
- Els vectors directors són proporcionals: $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$
- En girar un vector director 90° el producte escalar és nul: $\vec{u} \cdot \vec{u}^\perp = u_1v_2 - u_2v_1 = 0$

Si, a més a més, el pun P compleix l'equació de s , aleshores seran la mateixa recta.

Rectes amb la mateixa direcció: equació general

En forma general:

$$r : Ax + By + C = 0 \qquad s : A'x + B'y + C' = 0$$

Rectes amb la mateixa direcció: equació general

En forma general:

$$r : Ax + By + C = 0 \quad s : A'x + B'y + C' = 0$$

Raonem igual amb els vectors ortogonals (A, B) i (A', B') :

- Vectors ortogonals amb el mateix pendent: $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$

Rectes amb la mateixa direcció: equació general

En forma general:

$$r : Ax + By + C = 0 \quad s : A'x + B'y + C' = 0$$

Raonem igual amb els vectors ortogonals (A, B) i (A', B') :

- Vectors ortogonals amb el mateix pendent: $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$
- Els vectors ortogonals són proporcionals: $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$

Rectes amb la mateixa direcció: equació general

En forma general:

$$r : Ax + By + C = 0 \quad s : A'x + B'y + C' = 0$$

Raonem igual amb els vectors ortogonals (A, B) i (A', B') :

- Vectors ortogonals amb el mateix pendent: $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$
- Els vectors ortogonals són proporcionals: $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$
- En girar 90° un vector ortogonal, el producte escalar serà 0: $AB' - BA' = 0$

Rectes amb la mateixa direcció: equació general

En forma general:

$$r : Ax + By + C = 0 \quad s : A'x + B'y + C' = 0$$

Raonem igual amb els vectors ortogonals (A, B) i (A', B') :

- Vectors ortogonals amb el mateix pendent: $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$
- Els vectors ortogonals són proporcionals: $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$
- En girar 90° un vector ortogonal, el producte escalar serà 0: $AB' - BA' = 0$

Si, a més a més, la proporció entre els vectors ortogonals es manté amb C , aleshores seran la mateixa recta:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Rectes secants o incidents

Dues rectes són secants o incidents si es tallen en un punt, cosa que passarà si:

- Tenen direccions diferents:

- Vectors directors amb diferent pendent: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{v_2}{v_1}$

- Vectors directors no proporcionals: $\frac{u_1}{v_1} \neq \frac{u_2}{v_2}$

- En girar un vector director 90° no queden perpendiculars: $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$

- Els vectors ortogonals tenen direccions diferents:

- Vectors ortogonals amb diferent pendent: $\frac{B}{A} \neq \frac{B'}{A'}$

- Vectors ortogonals no proporcionals: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

- En girar-ne un 90° no queden perpendiculars: $A \cdot B' - B \cdot A' \neq 0$

Posició relativa entre rectes: resum

Suposem que tenim dues rectes en forma general

$$r : Ax + By + C = 0 \quad s : A'x + B'y + C' = 0$$

Aleshores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rectes amb la mateixa direcció} \\ \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \text{ (gradients proporcionals)} \\ \text{o} \\ \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \text{ (gradients amb mateix pendent)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \\ \text{Si} \end{array} \right.$$

Angle entre rectes

Angle entre rectes

L'angle que formen dues rectes és

- L'angle que formen els seus vectors directors

Angle entre rectes

Angle entre rectes

L'angle que formen dues rectes és

- L'angle que formen els seus vectors directors
- L'angle que formen els seus vectors ortogonals

Rectes perpendiculars

Dues rectes secants són perpendiculars si:

- Els seus vectors directors són perpendiculars: $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$
- Els seus vectors normals són perpendiculars: $A \cdot A' + B \cdot B' = 0$

Distància entre un punt i una recta

Es recomana seguir l'explicació juntament amb l'applet de geogebra

<https://www.geogebra.org/m/wd3ret7c>

Considerem una recta $r : Ax + By + C = 0$ i un punt $P = (p_1, p_2)$ (exterior). Ens preguntem quant val $d(P, r)$?

- 1 Agafem $Q = (x, y)$ un punt qualsevol de la recta. Les coordenades de Q compleixen l'equació $Ax + By + C = 0$.
- 2 Per trigonometria trobem que

$$d(P, r) = \left\| \vec{QP} \right\| \cdot \cos(\alpha)$$

- 3 Considerem el vector “gradient” unitari (mòdul 1):

$$\vec{v} = \frac{(A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distància entre un punt i una recta

Es recomana seguir l'explicació juntament amb l'applet de geogebra

<https://www.geogebra.org/m/wd3ret7c>

Considerem una recta $r : Ax + By + C = 0$ i un punt $P = (p_1, p_2)$ (exterior). Ens preguntem quant val $d(P, r)$?

- 1 Agafem $Q = (x, y)$ un punt qualsevol de la recta. Les coordenades de Q compleixen l'equació $Ax + By + C = 0$.
- 2 Per trigonometria trobem que

$$d(P, r) = \left\| \vec{QP} \right\| \cdot \cos(\alpha)$$

- 3 Considerem el vector “gradient” unitari (mòdul 1):

$$\vec{v} = \frac{(A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Alerta, no sabem si té el sentit que volem o sentit contrari: l'angle que formen $\vec{v}$ i $\vec{QP}$ podria ser α o $180 - \alpha$.

Distància d'un punt a una recta

- 4 Si fem el producte escalar entre $\overrightarrow{QP}$ i $\vec{v}$, recordant que $\|\vec{v}\| = 1$, obtenim:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|QP\| \cdot \cos \alpha = d(P, r) & \text{si l'angle és } \alpha \\ \|QP\| \cdot \underbrace{\cos(180 - \alpha)}_{-\cos \alpha} = -d(P, r) & \text{si l'angle és } 180 - \alpha \end{cases}$$

Per tant, tindrem

$$d(P, r) = \left| \overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} \right|$$

- 5 Calculem ara el producte escalar:

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} \right| &= \left| \frac{(A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot (p_1 - x, p_2 - y) \right| = \frac{|A(p_1 - x) + B(p_2 - y)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|Ap_1 + Bp_2 - \overbrace{(Ax + By)}^{-C}|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Distància d'un punt a una recta

Per tant:

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$