

Successions

Definició (Successió)

*Conjunt d'elements ordenats on en tenim tants com **nombres naturals**: n'hi ha un de primer i sempre n'hi ha un després.*

$$a \longrightarrow 2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$b \longrightarrow 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \dots$$

- a, b : nom de les successió
- Cada element s'anomena **terme** de la successió. Es fa servir un subíndex (normalment les lletres n, i, j, k, l, m) per indicar de quin terme es tracta.
 - a_1 : primer terme
 - a_4 : 4rt terme
 - a_{1000} : terme mil·lèsim

- a_n : terme n -èssim.

Definicions bàsiques

- **Terme general:** expressió que permet trobar qualsevol terme sense trobar els anteriors.
Per exemple:

$$a_n = 2 \cdot n$$

$$b_n = ???$$

- **Relació de recurrència:** defineix la successió mitjançant un relació entre un terme i *alguns* anteriors:

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$$

En aquest cas hem de donar un valor als dos primers termes.

Successions aritmètiques

Cada element s'obté sumant una certa quantitat (**diferència**, d) a l'anterior:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Terme general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Tenim una fórmula per la suma dels N primers termes:

$$\sum_{n=1}^{n=N} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N = \frac{N(a_1 + a_N)}{2}$$

Successions geomètriques

Cada element s'obté multiplicant l'anterior per una certa quantitat (**raó**, r):

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Dit d'una altra manera, una successió geomètrica ha de complir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

és una geomètrica de raó $r = 2$ perquè $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \dots = 2$.

El terme n -èssim l'obtenim multiplicant el primer terme, a_1 , $n - 1$ vegades per la raó, per tant, el terme general serà:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Successions geomètriques

Fixem-nos que, en cas que el primer terme sigui la raó, $a_1 = r$, el terme general ens quedarà

$$a_n = r \cdot r^{n-1} = r^n$$

Successions geomètriques: suma d' N termes

També tenim una fórmula per sumar els N primers termes:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n=N} a_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N = \\ &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{N-1} = \boxed{a_1 \cdot \frac{1 - r^N}{1 - r}}\end{aligned}$$

Vegem d'on surt la fórmula. Diem S_N al valor de la suma dels N primers termes de la successió. Comencem traient factor comú r als $N - 1$ últims termes i fixant-nos que tornem a obtenir S_N llevat de l'últim terme:

$$\begin{aligned}S_N &= a_1 + \underbrace{a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{N-1}}_{r \left(\underbrace{a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{N-2}}_{S_N - a_1 r^{N-1}} \right)} \\ &= a_1 + r(S_N - a_1 r^{N-1})\end{aligned}$$

Successions geomètriques: suma d' N termes

Per obtenir una expressió per S_N només caldrà resoldre l'equació:

$$S_N = a_1 + r(S_N - a_1 r^{N-1})$$

Per tant només cal aïllar S_N :

$$S_N = a_1 + rS_N - ra_1 r^{N-1} = a_1 + rS_N - a_1 r^N$$

$$S_N - rS_N = a_1 - a_1 r^N \implies S_N(1 - r) = a_1 - a_1 r^N$$

$$S_N = \frac{a_1 - a_1 r^N}{1 - r} = \boxed{a_1 \frac{1 - r^N}{1 - r}}$$

Successions geomètriques

Observació

Si $|r| < 1$ aleshores $r^{N-1} \rightarrow 0$ i els podem sumar fins l'infinit

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \dots = \frac{a_1}{1-r}$$

Successions geomètriques

Exercici resolt: dir si són o no geomètriques les següents successions, trobar-ne la raó en cas afirmatiu.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = 3^{-1}$. Geomètrica, $r = \frac{1}{3}$ i $a_1 = r$

b) $a_n = 2^{n+3}$

c) $a_n = 3^{2n}$

d) $a_n = 5^{2n-3}$

e) $a_n = 3^{-n+2}$

Successions geomètriques

❶ $a_n = 2^{n^2} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = 2^{(n+1)^2 - n^2} = 2^{2n+1}$. No és geomètrica, ja que el quocient de termes consecutius no és constant (depen de n).

La successió de Fibonacci

Cada element s'obté sumant els dos anteriors i començant per 1 i 1:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Relació de recurrència:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

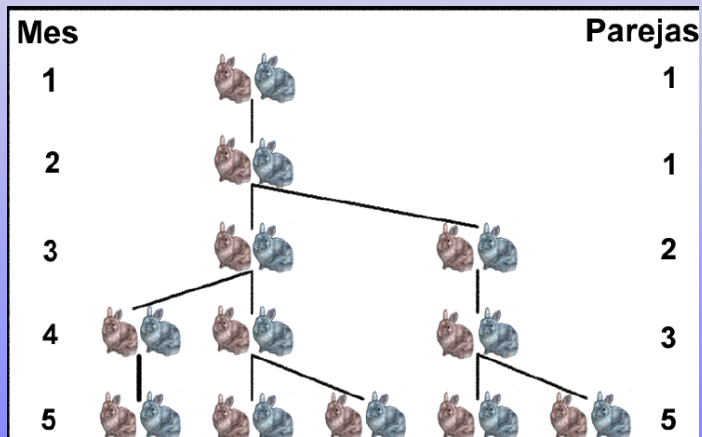
Molt famosa perquè

- “Apareix” a la natura, a l'art, a l'arquitectura
- Està molt relacionada amb el **nombre d'or** o **raó àuria**:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

que és el nombre “més irracional de tots”.

Origen de la sèrie de Fibonacci



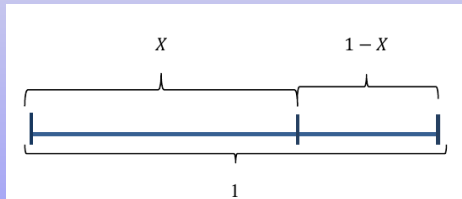
Terme general de la successió de Fibonacci

Resulta que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\phi} \right)^n - \left(\underbrace{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\bar{\phi}} \right)^n \right]$$

Sobre el nombre d'Or o raó àurea

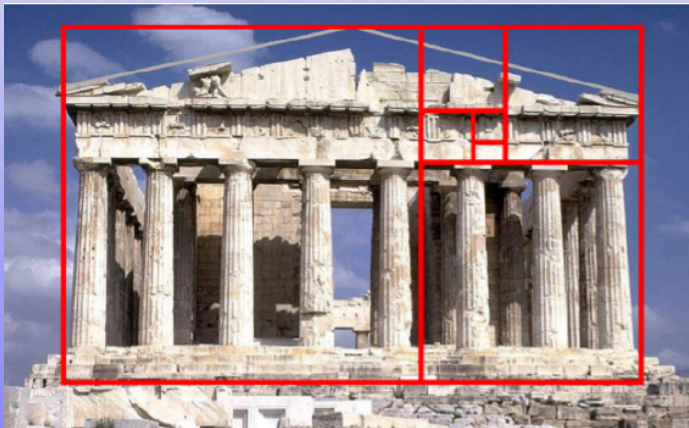
- Euclides (300 a. C.) als “Els elements”. El defineix com



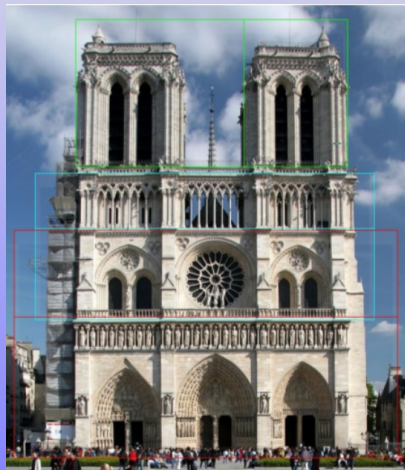
$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \implies x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- Apareix a
 - la natura
 - l'arquitectura
 - l'art
 - les matemàtiques

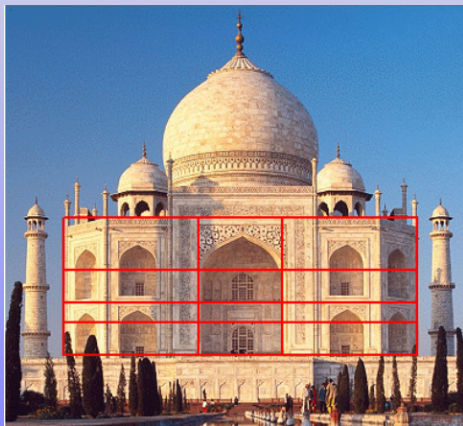
A l'arquitectura (Partenó)



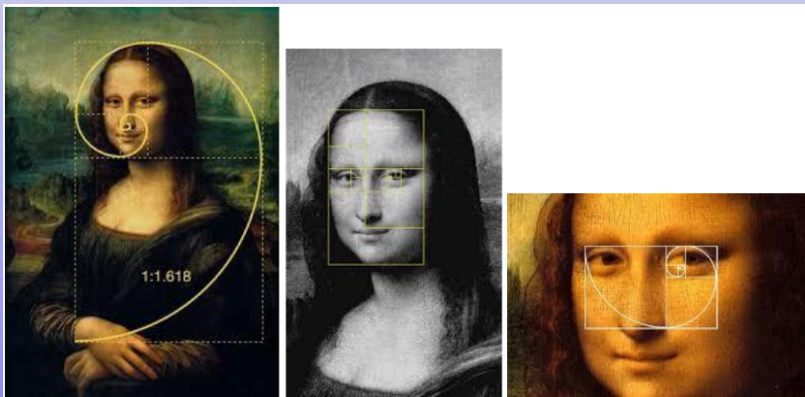
A l'arquitectura (Notre Dame)



A l'arquitectura (Taj Mahal)



A l'art (Gioconda)



A l'art (Meninas)



A l'art (L'home de Vitruvi)



A la natura



A la natura



Successions creixents

Definició

Una successió a_n és **creixent** tot element de la successió és més gran que l'anterior.

És a dir

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ és creixent:

$$0 < 1 < 4 < 9 < 16 < 25 < \dots$$

Ho podem demostrar:

$$a_n < a_{n+1} \iff n^2 < (n+1)^2 \iff \cancel{n^2} < \cancel{n^2} + 2n + 1 \iff 0 < 2n + 1$$

cosa que és certa per tot $n \geq 0$.

Successions decreixents

Definició

*Diem que la successió a_n és **decreixent** si tot element és més petit que l'anterior.*

És a dir,

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ és decreixent:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

De fet també ho podríem demostrar:

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2},$$

cosa que és certa si $n > 1$.

Successions monòtones

Definició

*Diem que una successió és **monòtona** si és creixent o decreixent.*

Per exemple, les dues successions anteriors són monòtones, però la successió $a_n = (-2)^n$ no ho és, perquè és oscil·lant:

$$1 > -2 < 4 > -8 < 16 > -32 < 64 \dots$$

Màxim d'una successió

Definició

*Diem que M és el **màxim** (valor més gran) d'una successió hi ha algun valor de la successió que iguala M però en canvi tota la resta de termes de la successió és més petita o igual.*

És a dir, si M és el màxim es compleix

$$\exists j \text{ t.q. } a_j = M \text{ i } a_n \leq M, \forall n \neq j.$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no té màxim perquè cada element és més gran que l'anterior (és creixent), però la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que en té, i és $M = 1$.

Mínim d'una successió

Definició

*Diem que m és el **mínim** (valor més petit) d'una successió si existeix un valor de la successió que iguala a m però en canvi tots els altres termes són més grans o iguals que m .*

És a dir, m és el mínim si

$$\exists j \text{ t.q. } a_j = m \text{ i } a_n \geq m, \forall n \neq j$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ té com a mínim $m = 0$ (el primer valor de la successió), però la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ no té mínim, perquè és decreixent.

Fita superior

Definició

*Diem que K és una **fita superior** si tots els termes de la successió són més petits o iguals que K .*

És a dir, K és una fita superior si

$$K \geq a_n, \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no té cap fita superior, i en canvi la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que en té, per exemple $K = 1$ és una fita superior, i $K = 2$ també.

Fixem-nos que la fita superior **no és única**. De fet, si n'existeix una, qualsevol valor més gran també serà una fita superior.

Fita inferior

Definició

*Direm que k és una **fita inferior** si tots els termes de la successió són més grans o iguals que k .*

És a dir, k és una fita inferior si es compleix

$$k \leq a_n, \forall n \geq 1$$

La successió $a_n = n^2$ té 0 com a fita inferior, i -1 també, i $a_n = \frac{1}{n+1}$ té com a fita inferior $k = 0$, i $k = -10$.

En canvi, la successió $a_n = -n^2$ no té fita inferior.

Fixem-nos també que la fita inferior **no és única**, ja que, si n'existeix una, qualsevol valor més petit també serà una fita inferior.

Successions fitades

Definició

*Diem que una successió **està fitada** si té fita inferior i superior.*

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no està fitada perquè no té cap fita superior, però $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que ho està.

Suprem d'una successió

Definició

*Diem que S és el **suprem** d'una successió si S és la més petita de les fites superiors.*

Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$, amb $n \geq 1$, té $S = \frac{1}{2}$ (que coincideix amb el seu màxim), i la successió $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ té $S = 2$ (tot i que no té màxim). Però en canvi la successió $a_n = n^2$ no té suprem, perquè no té cap fita superior.

Ínfim

Definició

Diem que I és l'ínfim d'una successió si I és la més gran de les fites inferiors.

Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ té ínfim $I = 0$, ja que és decreixent i els elements de la successió s'apropen a 0 tant com es vulgui. Observeu que en canvi no té mínim, i que qualsevol nombre > 0 no pot ser ínfim perquè, fent n prou gran, segur que el passem: per qualsevol $I > 0$ existeix n_0 tal que $a_n < I$ si $n > n_0$.

Límit d'una successió

Definició

Diem que ρ és el límit d'una successió a_n si, a partir d'un valor de n prou gran, els termes queden sempre tant a prop de ρ com vulguem.

Límit d'una successió

Dit d'una manera més rigorosa:

Definició

Diem que ρ és el límit de la successió a_n si, per $\forall \varepsilon > 0$ (per petit que sigui) $\exists j$ tal que

$$|a_n - \rho| < \varepsilon, \forall n > j.$$

Ho escriurem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \rho,$$

i es llegeix de la següent manera: el límit de la successió a_n quan n tendeix a infinit és ρ (ro).

Ho podeu veure gràficament a

<https://www.geogebra.org/m/pus2dqbx>

Convergència

Definició

*Diem que una successió és **convergent** si té límit. Diem que és **divergent** si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Altrament, diem que no és ni convergent ni divergent.

Algunes propietats de les successions en general

- Si una successió té màxim, aleshores està fitada superiorment i té suprem.

Algunes propietats de les successions en general

- Si una successió té màxim, aleshores està fitada superiorment i té suprem.
- Si una successió té mínim, aleshores està fitada inferiorment i té ínfim.

Algunes propietats de les successions monòtones

Algunes propietats de les successions monòtones

- Una successió creixent no té màxim

Algunes propietats de les successions monòtones

- Una successió creixent no té màxim
- Una successió decreixent no té mínim

Algunes propietats de les successions monòtones

- Una successió creixent no té màxim
- Una successió decreixent no té mínim
- Una successió creixent fitada superiorment té suprem i, a més, aquest és el seu límit

Algunes propietats de les successions monòtones

- Una successió creixent no té màxim
- Una successió decreixent no té mínim
- Una successió creixent fitada superiorment té suprem i, a més, aquest és el seu límit
- Una successió decreixent fitada inferiorment té ínfim i, a més, aquest és el límit

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\infty^\infty \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\infty^\infty \rightarrow \infty$
- f) $\frac{\infty}{0} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\infty^\infty \rightarrow \infty$
- f) $\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- g) $\frac{0}{\infty} \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\infty^\infty \rightarrow \infty$
- f) $\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- g) $\frac{0}{\infty} \rightarrow 0$
- h) $0^\infty \rightarrow$

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\infty^\infty \rightarrow \infty$
- f) $\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- g) $\frac{0}{\infty} \rightarrow 0$
- h) $0^\infty \rightarrow 0$
- i) k^∞

“Operant” amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

- a) $\frac{K}{\infty} \rightarrow 0$
- b) $\frac{K}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- c) $\infty + \infty \rightarrow \infty$
- d) $\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)
- e) $\infty^\infty \rightarrow \infty$
- f) $\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador
- g) $\frac{0}{\infty} \rightarrow 0$
- h) $0^\infty \rightarrow 0$
- i) k^∞ . Això pot donar o bé 0 o bé $\pm\infty$, dependrà de si $|k| < 1$ o no i del seu signe.
- j) $0^{-\infty} \rightarrow \infty$

Exemples

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{-n^3} =$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} =$$

Exemples

a) $\lim \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$

b) $\lim \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} =$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} =$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} = \infty$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{-\frac{1}{n^2}} =$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} = \infty$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{0^-} =$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} = \infty$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + n^3 =$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} = \infty$$

$$\text{c)} \quad \lim \frac{3}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim n^2 + n^3 = \infty + \infty = \infty$$

$$\text{e)} \quad \lim n^2 \cdot (-n^3) =$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} = \infty$$

$$\text{c)} \quad \lim \frac{3}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim n^2 + n^3 = \infty + \infty = \infty$$

$$\text{e)} \quad \lim n^2 \cdot (-n^3) = \infty \cdot (-\infty) =$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} = \infty$$

$$\text{c)} \quad \lim \frac{3}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim n^2 + n^3 = \infty + \infty = \infty$$

$$\text{e)} \quad \lim n^2 \cdot (-n^3) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{f)} \quad \lim n^{n^2} = \infty^\infty =$$

Exemples

$$\text{a)} \quad \lim \frac{10}{-n^3} = \frac{10}{-\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim \frac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{10^{-10}}{0^+} = \infty$$

$$\text{c)} \quad \lim \frac{3}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\text{d)} \quad \lim n^2 + n^3 = \infty + \infty = \infty$$

$$\text{e)} \quad \lim n^2 \cdot (-n^3) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{f)} \quad \lim n^{n^2} = \infty^\infty = \infty$$

Exemples

$$\textcircled{g)} \quad \lim \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} =$$

Exemples

$$\text{g)} \quad \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} =$$

Exemples

$$\text{g)} \quad \lim \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} = \frac{0}{-\infty} \rightarrow$$

Exemples

$$\text{g)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} = \frac{0}{-\infty} \rightarrow 0$$

$$\text{i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{n^3} =$$

Exemples

$$\text{g)} \quad \lim \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} = \frac{0}{-\infty} \rightarrow 0$$

$$\text{i)} \quad \lim \left(\frac{1}{n^2} \right)^{n^3} = 0^\infty \rightarrow$$

Exemples

$$\text{g)} \quad \lim \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} = \frac{0}{-\infty} \rightarrow 0$$

$$\text{i)} \quad \lim \left(\frac{1}{n^2} \right)^{n^3} = 0^\infty \rightarrow 0$$

$$\text{j)} \quad \left(\frac{1}{3} \right)^n =$$

Exemples

$$\text{g)} \quad \lim \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} = \frac{0}{-\infty} \rightarrow 0$$

$$\text{i)} \quad \lim \left(\frac{1}{n^2} \right)^{n^3} = 0^\infty \rightarrow 0$$

$$\text{j)} \quad \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0^\infty =$$

Exemples

$$\text{g)} \quad \lim \frac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} = \frac{0}{-\infty} \rightarrow 0$$

$$\text{i)} \quad \lim \left(\frac{1}{n^2} \right)^{n^3} = 0^\infty \rightarrow 0$$

$$\text{j)} \quad \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0^\infty = 0$$

$$\text{k)} \quad \lim \left(\frac{1}{n} \right)^{-n^3} = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{n} \right)^{n^3}} = \frac{1}{0^\infty} = \frac{1}{0} = \infty$$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

$$\textcircled{1) \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

$$\textcircled{2) \quad \infty - \infty}$$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

- 1) $\frac{\infty}{\infty}$
- 2) $\infty - \infty$
- 3) $0 \cdot \infty$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

$$\textcircled{1) \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

$$\textcircled{2) \quad \infty - \infty}$$

$$\textcircled{3) \quad 0 \cdot \infty}$$

$$\textcircled{4) \quad \frac{0}{0}}$$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

$$\textcircled{1) \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

$$\textcircled{2) \quad \infty - \infty}$$

$$\textcircled{3) \quad 0 \cdot \infty}$$

$$\textcircled{4) \quad \frac{0}{0}}$$

$$\textcircled{5) \quad 0^0}$$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

- 1) $\frac{\infty}{\infty}$
- 2) $\infty - \infty$
- 3) $0 \cdot \infty$
- 4) $\frac{0}{0}$
- 5) 0^0
- 6) 1^∞

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

$$\textcircled{1) \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

$$\textcircled{2) \quad \infty - \infty}$$

$$\textcircled{3) \quad 0 \cdot \infty}$$

$$\textcircled{4) \quad \frac{0}{0}}$$

$$\textcircled{5) \quad 0^0}$$

$$\textcircled{6) \quad 1^\infty}$$

$$\textcircled{7) \quad \infty^0}$$

Exercicis

Trobeu els següents límits i indiqueu els que donguin lloc a una indeterminació.

a) $\lim n^4 + n = \infty + \infty = \infty$

b) $\lim \frac{2}{\frac{-1}{n}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

c) $\left(-\frac{1}{n}\right)^4 = (0^-)^4 = 0$

d) $\lim \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0^+}{1 + 0} = 0$

e) $\lim (n^{-2})^{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = (0^+)^{\infty} = 0$

f) $\lim n^{-\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{\infty^0}$
Indeterminació

Exercicis

Trobeu els següents límits i indiqueu els que donguin lloc a una indeterminació.

a) $\lim n^4 + n = \infty + \infty = \infty$

b) $\lim \frac{2}{\frac{-1}{n}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

c) $\left(-\frac{1}{n}\right)^4 = (0^-)^4 = 0$

d) $\lim \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0^+}{1 + 0} = 0$

e) $\lim (n^{-2})^{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = (0^+)^{\infty} = 0$

f) $\lim n^{-\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{\infty^0}$

Indeterminació

g) $\lim 2^{-n} = \lim \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

Exercicis

Trobeu els següents límits i indiqueu els que donguin lloc a una indeterminació.

$$\text{a)} \quad \lim n^4 + n = \infty + \infty = \infty$$

$$\text{b)} \quad \lim \frac{2}{\frac{-1}{n}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\text{c)} \quad \left(-\frac{1}{n}\right)^4 = (0^-)^4 = 0$$

$$\text{d)} \quad \lim \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0^+}{1 + 0} = 0$$

$$\text{e)} \quad \lim (n^{-2})^{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = (0^+)^{\infty} = 0$$

$$\text{f)} \quad \lim n^{-\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{\infty^0}$$

Indeterminació

$$\text{g)} \quad \lim 2^{-n} = \lim \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{1}{n^{\infty}} \cdot n^n = \lim \frac{n^n}{n^{\infty}} = \lim n^{n-1} = \infty^{\infty} = \infty$$

Exercicis

Trobeu els següents límits i indiqueu els que donguin lloc a una indeterminació.

$$\text{a)} \quad \lim n^4 + n = \infty + \infty = \infty$$

$$\text{b)} \quad \lim \frac{2}{\frac{-1}{n}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\text{c)} \quad \left(-\frac{1}{n}\right)^4 = (0^-)^4 = 0$$

$$\text{d)} \quad \lim \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0^+}{1 + 0} = 0$$

$$\text{e)} \quad \lim (n^{-2})^{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = (0^+)^{\infty} = 0$$

$$\text{f)} \quad \lim n^{-\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{\infty^0}$$

Indeterminació

$$\text{g)} \quad \lim 2^{-n} = \lim \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{1}{n} \cdot n^n = \lim \frac{n^n}{n} = \lim n^{n-1} = \infty^{\infty} = \infty$$

$$\text{i)} \quad \lim \left(-\frac{1}{3}\right)^{-n} = \lim \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

Pàgina 208 n^o 5

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n} = 1$$

Pàgina 208 n^o 5

$$\text{c)} \quad \lim \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{2n + \cancel{3}} = \lim \frac{2n}{2n} = 1$$

$$\text{d)} \quad \lim \left(\frac{5}{n} - \sqrt{n} \right) = 0 - \infty = -\infty$$

Pàgina 208 n^o 7

ej $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació. $\rightarrow$

$$\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} = \lim n^{\frac{1}{2}} = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

Pàgina 208 n^o 7

c) $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació. $\rightarrow$

$$\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} = \lim n^{\frac{1}{2}} = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

d) $\lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació

$$\rightarrow \lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \lim \frac{\sqrt{5}n^3}{\sqrt{n^3}} = \lim \sqrt{5}n^{3-\frac{3}{2}} = \lim \sqrt{5}n^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

Pàgina 208 n^o 7

c) $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació. $\rightarrow$

$$\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} = \lim n^{\frac{1}{2}} = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

d) $\lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació

$$\rightarrow \lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \lim \frac{\sqrt{5}n^3}{\sqrt{n^3}} = \lim \sqrt{5}n^{3-\frac{3}{2}} = \lim \sqrt{5}n^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

e) $\lim \left(\frac{3n^2}{n+1} - \frac{3n^2-2}{n-1} \right) = \infty - \infty$ Indeterminació (veure més endavant)

Pàgina 208 n^o 7

c) $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació. $\rightarrow$

$$\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} = \lim n^{\frac{1}{2}} = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

d) $\lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació

$$\rightarrow \lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \lim \frac{\sqrt{5}n^3}{\sqrt{n^3}} = \lim \sqrt{5}n^{3-\frac{3}{2}} = \lim \sqrt{5}n^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

f) $\lim \left(\frac{3n^2}{n+1} - \frac{3n^2-2}{n-1} \right) = \infty - \infty$ Indeterminació (veure més endavant)

g) $\lim \left(\sqrt{3n} - \sqrt{n} \right) = \infty - \infty$ Indeterminació (veure més endavant)

Pàgina 208 n^o 7

c) $\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació. $\rightarrow$

$$\lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} = \lim n^{\frac{1}{2}} = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

d) $\lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació

$$\rightarrow \lim \frac{\sqrt{5}n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} = \lim \frac{\sqrt{5}n^3}{\sqrt{n^3}} = \lim \sqrt{5}n^{3-\frac{3}{2}} = \lim \sqrt{5}n^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

f) $\lim \left(\frac{3n^2}{n+1} - \frac{3n^2-2}{n-1} \right) = \infty - \infty$ Indeterminació (veure més endavant)

g) $\lim \left(\sqrt{3n} - \sqrt{n} \right) = \infty - \infty$ Indeterminació (veure més endavant)

h) $\lim 300^{-n} = \lim \frac{1}{300^n} = 0$

Pàgina 208 n^o 7

❶ $\lim \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^n = 1^\infty$ Indeterminació (veure més endavant)

Pàgina 208 n^o 7

❶ $\lim \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^n = 1^\infty$ Indeterminació (veure més endavant)

❷ $\lim \left(\frac{5n^2+3}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = 5^0 = 1$

Límits de successions racionals: indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

- 1 Ens quedem només amb el terme de grau més alt perquè és el que “mana”, tant al numerador com al denominador
- 2 Simplifiquem

Límits de successions racionals: indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

- 1 Ens quedem només amb el terme de grau més alt perquè és el que “mana”, tant al numerador com al denominador
- 2 Simplifiquem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminació.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2n + 3}{n^3 + 2n^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2n + 3}{n^3 + 2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$$

Límits de successions racionals: indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

- 1 Ens quedem només amb el terme de grau més alt perquè és el que “mana”, tant al numerador com al denominador
- 2 Simplifiquem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminació.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2n + 3}{n^3 + 2n^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2n + 3}{n^3 + 2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$$

Límits de successions racionals: demostració

Per veure-ho de manera rigorosa, només cal que dividim numerador i denominador pel terme de grau més alt. Veiem un parell d'exemples

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^3 + 3n - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2+2n+1}{n^3}}{\frac{n^3+3n-2}{n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{3n}{n^3} - \frac{2}{n^3}} = \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0\end{aligned}$$

Límits de successions racionals: demostració

Un altre exemple

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 - 3n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 - 1}{n^2}}{\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}} \\ &= \frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Límits de successions racionals: demostració

Un altre exemple

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 - 3n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 - 1}{n^2}}{\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}} \\ &= \frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Límits de successions racionals

Podem calcular el límit de manera més ràpida:

$$a_n = \frac{an^p + \text{grau més baix}}{bn^q + \text{grau més baix}} = \frac{an^p + O(n^{p-1})}{bn^q + O(n^{q-1})}$$

$O(n^{p-1})$ vol dir termes d'ordre (grau) $p - 1$ o més petit.

Aleshores només hem de comparar els graus i vigilar amb els signes.

Límits de successions racionals

Podem calcular el límit de manera més ràpida:

$$a_n = \frac{an^p + \text{grau més baix}}{bn^q + \text{grau més baix}} = \frac{an^p + O(n^{p-1})}{bn^q + O(n^{q-1})}$$

$O(n^{p-1})$ vol dir termes d'ordre (grau) $p - 1$ o més petit.

Aleshores només hem de comparar els graus i vigilar amb els signes.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \bullet \text{ Si } p > q \begin{cases} \bullet \text{ Si } a \text{ i } b \text{ mateix signe} \implies +\infty \\ \bullet \text{ Si } a \text{ i } b \text{ diferent signe} \implies -\infty \end{cases} \\ \bullet \text{ Si } p = q \implies \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \implies 0 \end{cases}$$

Pg. 208 n^o 7

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{5n} = 0$ perquè la base compleix $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$. De fet, és una geomètrica de raó $r = \frac{1}{5^5}$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^5 - 2n} = 0$ perquè el grau del denominador $>$ grau numerador
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right)^{\frac{2n}{n+1}} = \infty^2 = \infty$ perquè a la base tenim grau numerador $>$ grau denominador, i a l'exponent els graus s'igualen (quocient de coeficients).

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Bàsicament, aquestes indeterminacions es resolen operant i convertint-les al tipus $\frac{\infty}{\infty}$.

- Diferència (resta de polinomis: operem ajuntant termes
- Diferència de successions racionals: operem fent que el denominador sigui el mateix
- Diferència d'arrels: intentem operar traient coses de les arrels o bé multipliquem i dividim pel conjugat

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Bàsicament, aquestes indeterminacions es resolen operant i convertint-les al tipus $\frac{\infty}{\infty}$.

- Diferència (resta de polinomis: operem ajuntant termes
- Diferència de successions racionals: operem fent que el denominador sigui el mateix
- Diferència d'arrels: intentem operar traient coses de les arrels o bé multipliquem i dividim pel conjugat

Alerta!!

No simplifiqueu els termes de grau més petit abans d'operar i fer la resta!!!

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de polinomis

Exemple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 3n - 2) = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de polinomis

Exemple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 3n - 2) = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Si simplifiquem ens quedaria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 3n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n^2 = 0 \quad \boxed{\text{MALAMENT!!}}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de polinomis

Exemple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 3n - 2) = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Si simplifiquem ens quedaria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 3n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n^2 = 0 \quad \boxed{\text{MALAMENT!!}}$$

Però en canvi, si operem ens queda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 3n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1 - n^2 + 3n + 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 3 = \infty$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de successions racionals

Un altre exemple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 1}{3n} - \frac{4n + 1}{2} = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de successions racionals

Un altre exemple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 1}{3n} - \frac{4n + 1}{2} = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Si simplifiquem ens surt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 \cancel{-1}}{3n} - \frac{4n \cancel{+1}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{3n} - \frac{4n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n - 2n = 0 \quad \boxed{\text{MALAMENT!!}}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de successions racionals

Un altre exemple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 1}{3n} - \frac{4n + 1}{2} = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Si simplifiquem ens surt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 \cancel{-1}}{3n} - \frac{4n \cancel{+1}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{3n} - \frac{4n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n - 2n = 0 \quad \boxed{\text{MALAMENT!!}}$$

Però en canvi, si operem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 1}{3n} - \frac{4n + 1}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n^2 - 1) \cdot 2}{3n \cdot 2} - \frac{(4n + 1) \cdot 3n}{2 \cdot 3n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 - 2 - 12n^2 - 3n}{6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n - 2}{6n} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de successions racionals

Exemple:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 - 1}{n^2 - n} - \frac{n^3 - 3n + 10}{n^2 + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 - 1}{n(n-1)} - \frac{n^3 - 3n + 10}{n(n+1)} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 - 2n^2 - 1)(n+1) - (n^3 - 3n + 10)(n-1)}{n(n-1)(n+1)} &= \frac{n^4 + \dots - n^4 + \dots}{n^3 + \dots} \end{aligned}$$

Els termes de grau 4 al numerador marxen, per tant caldrà mirar el grau 3:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 + n^3 \dots - (n^4 + n^3 + \dots)}{n^3 + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 + \dots}{n^3 + \dots} = 0$$

Els termes de grau 3 també es cancel·len. Per tant, el grau del numerador serà 2 o menys. Com el del denominador és 3, ja sabem que el límit serà 0.

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència d'arrels

Exemple:

$$\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Multipliquem i dividim pel conjugat per passar al tipus $\frac{\infty}{\infty}$ (Indet) o $\frac{0}{\infty} = 0$:

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \right) \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}}^{\text{Conjugat}} \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \lim \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència d'arrels

Exemple:

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 3n} &= \lim \sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 3n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 3n}} = \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n^2 - 2n})^2 - (\sqrt{n^2 + 3n})^2}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 3n}} = \lim \frac{n^2 - 2n - (n^2 + 3n)}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 3n}} = \\ &= \lim \frac{n}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 3n}} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

Simplificant els termes de grau més baix:

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 3n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \lim \frac{n}{n + n} = \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència d'arrels

Un altre exemple:

$$\begin{aligned}
 \lim \sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1} &= \infty - \infty \text{ Indeterminació} \\
 &= \lim \sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1} \cdot \frac{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}} = \\
 &= \lim \frac{\left(\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1}\right)^2 - \left(\sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}\right)^2}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}} \\
 &= \lim \frac{(3n^3 - 2n^2 + 1) - (3n^3 + n^2 + n - 1)}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}} = \lim \frac{-3n^2 - n + 2}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}}
 \end{aligned}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Ara, com tenim una fracció i al denominador ja no tenim $\infty - \infty$, podem simplificar els termes de grau més petit:

$$\begin{aligned} \lim \frac{-3n^2 - \cancel{n} + \cancel{2}}{\sqrt{3n^3 - \cancel{2n^2} + 1} + \sqrt{3n^3 + \cancel{n^2} + \cancel{n} - 1}} &= \lim \frac{-3n^2}{\sqrt{3n^3} + \sqrt{3n^3}} \\ &= \lim \frac{3n^2}{2\sqrt{3n^3}} = \lim \frac{3n^2}{2\sqrt{3}n^{\frac{3}{2}}} = \lim \frac{3n^{2-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \lim \frac{3n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{3}} = \lim \frac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{3}} = \infty \end{aligned}$$

Alerta!!!!

Quan tinguem una indeterminació del tipus $\infty - \infty$, hem d'anar amb molt de compte en simplificar els termes de grau més petit, perquè els de grau més alt podrien acabar marxant al restar. En aquest cas haurem d'arrossegar els següent grau i esperar que tampoc es cancel·li. Per exemple:

$$\lim (n^2 - 2) - (n^2 - 2n + 3) = \infty - \infty$$

La podem resoldre simplement operant:

$$\lim (n^2 - 2) - (n^2 - 2n + 3) = \lim n^2 - 2 - n^2 + 2n - 3 = \lim 2n - 3 = \infty$$

En canvi, si haguéssim simplificat els termes de grau més petit:

$$\lim (\cancel{n^2 - 2}) - (\cancel{n^2 - 2n + 3}) = \lim n^2 - n^2 = 0$$

que NO ÉS CORRECTE!!!

Exercici

Què hagués passat si haguéssim simplificat els termes de grau més petit a l'exemple de les arrels??

Exercici

Calculeu els següents límits

$$\text{a)} \quad \lim \frac{2n^3 - 1}{n^2} - \frac{3n^2 + 1}{2n} =$$

$$\text{b)} \quad \lim \frac{n^3 + n}{n^2 + n} - \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} =$$

$$\text{c)} \quad \lim \frac{n^4 - n^3 + 2n + 2}{n^2 - 1} - \frac{n^2 + 5n - 1}{n + 2} =$$

$$\text{d)} \quad \lim \frac{2n^2 - 3}{n + 2} - \frac{-n^2 + 5}{n - 2} =$$

$$\text{e)} \quad \lim \frac{n^5 - n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n^2 - 6n + 2} - \frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^2 + 3} =$$

$$\text{f)} \quad \lim \sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + n} =$$

$$\text{g)} \quad \lim \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + 3n + 2} =$$

$$\text{h)} \quad \lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} =$$

Indeterminació del tipus 1^∞

D'un resultat de Leonhard Euler (que es pronuncia "Oiler") sabem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e$$

on $e = 2.71828 \dots$ és un nombre irracional anomenat "e" o "nombre d'Euler"

Indeterminació del tipus 1^{∞}

De fet, tenim el següent resultat

Proposició

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

Fàcilment podem veure que, també tenim la següent propietat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}}$$

Resolució de la indeterminació del tipus 1^∞

Tenim una successió de la forma

$$a_n = b_n^{c_n} \quad \text{complint} \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty \end{cases}$$

aleshores tenim una indeterminació del tipus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1^\infty$$

Normalment tindrem que la base és una successió racional tendint a 1:

$$b_n = \frac{d_n}{e_n}$$

Resolució de la indeterminació del tipus 1^∞

Per resoldre-la l'hem d'escriure en forma

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n - 1}$$

- 1 Sumem 1 i restem 1 a la base per tenir $b_n = 1 + b_n - 1$ i, operant, ajuntem $b_n - 1$. Si la base és una successió racional, aleshores ens quedarà:

$$1 + b_n - 1 = 1 + \frac{d_n}{e_n} - 1 = 1 + \frac{d_n - e_n}{e_n}$$

- 2 Un cop ajuntat, posem un l'invers al denominador per deixar un 1 al numerador:

$$b_n = 1 + b_n - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b_n - 1}} = 1 + \frac{1}{\frac{e_n}{d_n - e_n}}$$

Resolució de la indeterminació del tipus 1^∞

- 3 Ara només caldrà resoldre el límit del quocient de l'exponent i el denominador:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\frac{e_n}{d_n - e_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n(d_n - e_n)}{e_n}$$

i el límit serà:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^\rho$$