

Exercicis resolts (o no) de matemàtiques de 1^{er} de Batxillerat

Albert Granados

Curs 21-22

Índex

1 Funcions	1
<i>Exercici: 1</i>	1
<i>Exercici: 2</i>	3
<i>Exercici: 3</i>	3
<i>Exercici: 4</i>	7
<i>Exercici: 5</i>	7
<i>Exercici: 6 PAU juny 2016</i>	7
<i>Exercici: 7 PAU setembre 2016</i>	7
<i>Exercici: 8 PAU Setembre 2016 a)</i>	7
2 Derivades	7
<i>Exercici: 9</i>	7
<i>Exercici: 10</i>	8
<i>Exercici: 11 Pg. 184 n^o 52</i>	8
<i>Exercici: 12</i>	10
3 Matrius	10
<i>Exercici: 13 Pg. 17 número 10</i>	10
<i>Exercici: 14 Pg. 17 número 11</i>	11

1 Funcions

Exercici 1.

Per les següents funcions, trobeu:

1. El domini
2. Els punts de tall amb els eixos
3. Els límits al $+\infty$ i $-\infty$
4. Els límits laterals als punts que no siguin del domini

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}$

b) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

Solució.

a)

1. Igualant a 0 el denominador trobarem els punts que no són del domini. En aquest cas només obtenim una solució (una arrel doble):

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1$$

Per tant tindrem que

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

2. Pel que fa als punts de tall, trobem primer amb l'eix d'ordenades (OY) avaluant en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{0}{1} = 0 \implies (0, 0)$$

Fixem-nos que, en ser l'origen de coordenades, també l'obtindrem com a tall amb l'altre eix. En efecte, en igualar a 0 el numerador obtenim:

$$x^2 = 0 \implies x = 0 \implies (0, 0)$$

3. Fem ara els límits a l'infinit. Comencem simplificant els termes de grau més petit, tan al numerador com al denominador. Després cancel·lem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}} = 1$$

De fet, en simplificar, com marxen les x , el límit al $-\infty$ serà igual:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

4. Finalment fem els límits laterals en $x = -1$. Fem un primera inspecció substituint per $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0}$$

Com s'anul·la el denominador però no el numerador, el límit serà infinit. Caldrà veure'n el signe, cosa que segurament dependrà de la banda per on ens apropem a $x = -1$. Per fer-ho només caldrà fer els límits laterals i estudiar el signe del denominador a cada banda de $x = -1$. Com aquest valor és l'únic pel qual el denominador val 0 (és l'únic que no és del domini) en tindrem prou avaluant a cada banda de $x = -1$. Si n'hi hagués més caldria tenir-los en compte. Per tant fem:

$$x^2 + 2x + 1 \longrightarrow \begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad + \\ \cdots \cdots \cdots \frac{0^+ 0^+}{-1} \cdots \cdots \cdots \end{array}$$

Per tant, els límits laterals quedaran:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Exercici 2.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x+1}{x^2+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Trobeu-ne el domini
- Estudieu-ne la continuïtat als punts que no són del domini
- Trobeu els límits al $+\infty$ i al $-\infty$.

Exercici 3.

De les següents funcions trobeu-ne el domini, els punts de tall amb eixos, estudieu-ne la continuïtat i trobeu les asímptotes verticals (fent els límits laterals) i horitzontals. Finalment, feu-ne un petit esbós.

$$\begin{array}{l} a) f(x) = \frac{x-1}{x^2-x} \\ b) f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+3} \\ c) f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} \end{array} \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solució.

b) 1. Domini. Igualant el denominador a 0 trobem:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \implies x = \frac{6 \pm \sqrt{25-12}}{2} \implies x = 1.8 \text{ i } x = 1.19$$

Per tant tindrem que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1.8, 1.19\}$$

2. Punts de tall

- Eix d'ordenades (eix OY). Només cal avaluar la funció en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{6}{3} = 2 \implies \boxed{(0, 2)}$$

- Eix d'abscisses (eix OX). Caldrà igualar el **numerador** a 0:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x = 2 \text{ i } x = 3$$

Per tant, seran els punts

$$\boxed{(2, 0)} \text{ i } \boxed{(3, 0)}$$

3. Continuitat. Caldrà estudiar la continuïtat als punts que no siguin del comini.

- En $x = 1.19$. Comencem fent el límit sense distingir els laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 1.19} f(x) = \frac{1.36}{0}$$

Com al numerador no hi tenim cap 0, sabem que es tractarà d'una discontinuïtat del tipus asimptòtic. Caldrà però fer els límits laterals. Per fer-ho estudiem el signe del denominador:

$$x^2 - 5x + 3 \longrightarrow \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \text{0}^+ \text{0}^- \text{0}^+ \\ \hline 1.191.8 \end{array}$$

Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 1.19^-} f(x) = \frac{1.36}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.19^+} f(x) = \frac{1.36}{0^-} = -\infty$$

- En $x = 1.8$. Fem primer el límit sense distingir entre dreta i esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow 1.8} f(x) = \frac{0.24}{0}$$

Per tant, tornarem a tenir una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1.8$. Aprofitant els càlculs d'abans podem fer ràpidament els límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 1.8^+} f(x) = \frac{0.24}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.8^-} f(x) = \frac{0.24}{0^-} = -\infty$$

4. Finalment trobem les asímptotes:

- Asímtotes verticals. Estan associades a les discontinuïtats asimptòtiques. Com en tenim dues, les rectes verticals (asímtotes) seran

$$x = 1.19$$

$$x = 1.8$$

- Pel que fa a les horitzontals cal fer els límits al $+\infty$ i $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Per tant, la funció tindrà una asímtota horitzontal per la dreta i per l'esquerra, que serà la recta

$$y = 1$$

c) 1. Domini. Igualem el denominador a 0 i obtenim:

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1 \text{ i } x = 2 \implies D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

2. Punts de tall.

- Amb l'eix d'ordenades (eix OY). Només cal mirar el valor de f quan $x = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

El punt de tall serà doncs $\boxed{(0, -\frac{1}{2})}$.

- Amb l'eix d'abscisses (eix OX). Caldrà veure quan s'anul·la el numerador:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1 \text{ (arrel doble)}$$

No obstant, com -1 no és del domini perquè també s'anul·la el denominador, la funció no tallarà l'eix d'abscisses.

3. Continuitat. L'únic valor problemàtic serà $x = -1$, que no és del domini. Comencem fent el límit sense distingir entre dreta i esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per tal de resoldre la indeterminació factoritzem i simplifiquem. Com les arrels del denominador i numerador les hem buscat abans, ja tenim la feina feta i podem escriure:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x-2) \cdot \cancel{(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-2} = 0$$

Fixem-nos que els laterals seran iguals entre ells, ja que el límit no depèn de si x s'apropa a -1 per la seva dreta o per la seva esquerra. Per tant tindrem

$$f(-1^+) = f(-1^-) \neq f(-1) \text{ (ja que no és del domini)}$$

i la funció tindrà una discontinuïtat evitable en $x = -1$.

4. Asímtotes.

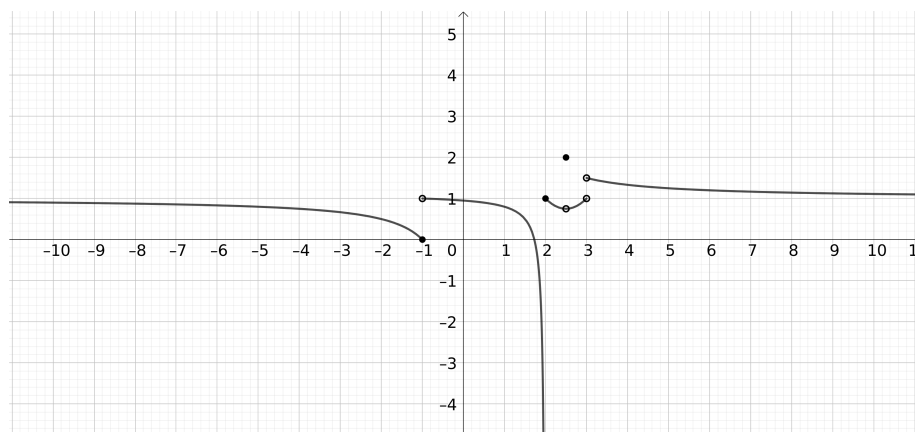
- Pel que fa a les verticals, no n'hi ha perquè la funció no té cap discontinuïtat asimptòtica.
- Per veure les horitzontal caldrà fer els límits a l'infinit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \cancel{2x+1}}{x^2 - \cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = 1$$

Per tant, la funció tindrà una asímtota horitzontal que serà la recta $\boxed{y = 1}$, tant per la dreta com per l'esquerra.

Exercici 4.

Considereu la funció de la gràfica



Discutiu-ne la continuïtat tot trobant els límits laterals allà on calgui. Trobeu també les asímptotes que pugui tenir, tant horitzontals com verticals.

Exercici 5.

Trobeu el valor dels paràmetres a i b per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x + b}{x^2 + 2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sigui contínua.

Exercici 6: PAU juny 2016.

Exercici 30 del recull de funcions.

Exercici 7: PAU setembre 2016.

Exercici 34 del recull de funcions.

Exercici 8: PAU Setembre 2016 a).

Exercici 35 del recull de funcions.

2 Derivades

Exercici 9.

Trobeu les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

b) $f(x) = (3x^3 + 2x^2 + 3x - 1) \ln(x)$

e) $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x} \cdot (x^2 - 1)$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (2x^2 - 3x + 1)$

f) $f(x) = \ln(x) \cdot (2x + 3) - 2x^2 + 3x - 1$

Exercici 10.

Trobeu les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = (x^2 - x - 1)^4$

d) $f(x) = e^{(x^2 - x - 1)^4}$

b) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = \sqrt{e^{2x}}$

c) $f(x) = e^{x^2 - x - 1}$

f) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$

Exercici 11: Pg. 184 n° 52.

Derivar les següents funcions

a) $f(x) = x \ln(x) + \ln^2(x) + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x}(1 + x)$

d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{1 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$

f) $f(x) = (1 - x)^3 \log_2(x)$

g) $f(x) = x^2(1 - 3x)^3$

Solució.

a) *Derivem com un producte $x \ln(x)$ i com un quadrat $\ln^2(x)$:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} + 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 0 \\ &= \ln(x) + 1 + \frac{2 \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

b) Derivem com un producte

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+x) + \sqrt{x} \cdot 1 = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{1+x+\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1+3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

c) Derivem com un quocient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2(x^2-1)^2 - (-2x)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

d) Derivem com un quocient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (1-x) - \ln(x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1-x}{x} + \ln(x)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{\frac{1-x+x\ln(x)}{x}}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x\ln(x)}{x(1-x)^2} \end{aligned}$$

e) Fem la regla de la cadena derivant d'enfora endins.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} \cdot \frac{2x(1-x^2+1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{(1-x^2)} = \\ &= \frac{x}{1-x^4} \end{aligned}$$

f) Derivem com un producte:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(1-x)^2(-1)\log_2(x) + (1-x)^3 \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} = \\ &= (1-x)^2 \left(-3\log_2(x) + \frac{1-x}{\ln(2) \cdot x} \right) \end{aligned}$$

g) *Derivem com un producte:*

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x(1-3x)^3 + x^2 3(1-3x)^2(-3) = \\&= 2x(1-3x)^2 - 9x^2(1-3x) = (1-3x)(2x(1-3x) - 9x^2) = \\&= (1-3x)(2x - 6x^2 - 9x^2) = (1-3x)(2x - 15x^2)\end{aligned}$$

Exercici 12.

Digueu si les següents funcions són derivables al canvi de branca o no ho són:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) \cdot x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x^2+2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + 1}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3 Matrius

Exercici 13: Pg. 17 número 10.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

Solució.

Donat que les matrius A i B tenen dimensions 1×3 i 3×1 , respectivament, el producte $A \cdot B$ tindrà dimensió 1×1 i el producte $B \cdot A$ tindrà dimensió 3×3 . El resultat serà el següent:

$$A \cdot B = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercici 14: Pg. 17 número 11.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculeu A^2 i A^3 .

Solució.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$