

Exercicis resolts (o no) de matemàtiques de $2n$ de Batxillerat CCSS

Curs 23-24

Índex

1 Funcions	5
<i>Exercici: 1</i>	5
<i>Exercici: 2</i>	6
<i>Exercici: 3</i>	7
<i>Exercici: 4</i>	7
<i>Exercici: 5</i>	7
<i>Exercici: 6</i>	7
<i>Exercici: 7</i>	8
<i>Exercici: 8</i>	11
<i>Exercici: 9</i>	12
<i>Exercici: 10 PAU juny 2016</i>	12
<i>Exercici: 11 PAU setembre 2016</i>	12
<i>Exercici: 12 PAU Setembre 2016 a)</i>	12
<i>Exercici: 13</i>	13
<i>Exercici: 14</i>	13
<i>Exercici: 15</i>	13
<i>Exercici: 16 PAU 2020, S4 número 2</i>	14
<i>Exercici: 17 PAU 2020, S4 número 4, apartat a)</i>	14
<i>Exercici: 18 PAU 2021, S1 número 4</i>	14
<i>Exercici: 19 PAU 2021, S1 número 5</i>	15
<i>Exercici: 20 PAU 2022, S2 número 2</i>	15

2	Derivades	15
	<i>Exercici: 1</i>	15
	<i>Exercici: 2</i>	15
	<i>Exercici: 3</i>	15
	<i>Exercici: 4</i>	15
	<i>Exercici: 5</i>	16
	<i>Exercici: 6</i>	16
	<i>Exercici: 7 Pg. 184 n° 52</i>	16
	<i>Exercici: 8</i>	18
	<i>Exercici: 9 PAU 2023, setembre</i>	18
	<i>Exercici: 10 PAU 2023, juny</i>	19
	<i>Exercici: 11</i>	19
	<i>Exercici: 12</i>	19
3	Optimització	20
	<i>Exercici: 1</i>	20
	<i>Exercici: 2</i>	20
	<i>Exercici: 3</i>	20
	<i>Exercici: 4</i>	20
	<i>Exercici: 5</i>	21
	<i>Exercici: 6</i>	22
	<i>Exercici: 7</i>	23
	<i>Exercici: 8</i>	24
4	Matrius	24
	<i>Exercici: 1 Pg. 17 número 10</i>	24
	<i>Exercici: 2 Pg. 17 número 11</i>	24
	<i>Exercici: 3 PAU Juny 22, número 5</i>	24
	<i>Exercici: 4 PAU Setembre 22, número 5</i>	25
	<i>Exercici: 5 PAU Juny 21, número 5</i>	25
	<i>Exercici: 6 Setembre 21, número 1</i>	25
	<i>Exercici: 7 PAU, juny 2020, número 5</i>	25
	<i>Exercici: 8 PAU setembre 20, número 1</i>	25
	<i>Exercici: 9 PAU, Juny 2019, número 1</i>	25
	<i>Exercici: 10 PAU Juny 2019, número 6</i>	26
	<i>Exercici: 11 PAU setembre 2019, número 1</i>	26
	<i>Exercici: 12</i>	26
	<i>Exercici: 13</i>	27

5 Sistemes d'equacions	29
<i>Exercici: 1</i>	29
<i>Exercici: 2 PAU Juny 2023 número 2</i>	29
<i>Exercici: 3 PAU setembre 2023</i>	30
<i>Exercici: 4 PAU Juny 2021, número 3</i>	30
<i>Exercici: 5 PAU Setembre 2021, número 2</i>	30
<i>Exercici: 6 PAU, Juny 2020</i>	31
<i>Exercici: 7</i>	31
<i>Exercici: 8</i>	31
<i>Exercici: 9</i>	31
6 Probabilitat	32
6.1 Laplace	32
<i>Exercici: 1</i>	32
<i>Exercici: 2</i>	32
<i>Exercici: 3</i>	32
<i>Exercici: 4</i>	33
<i>Exercici: 5</i>	33
<i>Exercici: 6</i>	33
<i>Exercici: 7</i>	33
<i>Exercici: 8</i>	33
<i>Exercici: 9</i>	33
<i>Exercici: 10</i>	33
<i>Exercici: 11</i>	33
<i>Exercici: 12</i>	34
<i>Exercici: 13</i>	34
<i>Exercici: 14</i>	34
<i>Exercici: 15</i>	34
<i>Exercici: 16</i>	35
<i>Exercici: 17</i>	35
6.2 Probabilitat condicionada	35
<i>Exercici: 1</i>	35
<i>Exercici: 2</i>	35
<i>Exercici: 3</i>	36
<i>Exercici: 4</i>	36
<i>Exercici: 5</i>	36
<i>Exercici: 6</i>	36
<i>Exercici: 7</i>	36

<i>Exercici: 8</i>	37
<i>Exercici: 9</i>	37
<i>Exercici: 10</i>	37
<i>Exercici: 11</i>	37
<i>Exercici: 12</i>	38
<i>Exercici: 13</i>	38
<i>Exercici: 14</i>	38
<i>Exercici: 15</i>	38
<i>Exercici: 16</i>	39
<i>Exercici: 17</i>	39
7 Distribucions de probabilitat	39
7.1 Distribució normal	39
<i>Exercici: 1</i>	39
<i>Exercici: 2</i>	39
<i>Exercici: 3</i>	40
<i>Exercici: 4</i>	41
7.2 Teorema central del límit	42
<i>Exercici: 1</i>	42
<i>Exercici: 2</i>	42
7.3 Intervals de confiança i distribució normal de la mitjana	42
<i>Exercici: 1</i>	43
<i>Exercici: 2</i>	43
<i>Exercici: 3</i>	43
<i>Exercici: 4</i>	44
<i>Exercici: 5</i>	44
7.4 Distribució binomial	45
<i>Exercici: 1</i>	45
<i>Exercici: 2</i>	45
<i>Exercici: 3</i>	46
7.5 Interval de confiança d'una proporció	47
<i>Exercici: 1</i>	47
<i>Exercici: 2</i>	47
<i>Exercici: 3</i>	47
<i>Exercici: 4 PAU Juny 2024 n° 4</i>	48

1 Funcions

Exercici 1.

Per les següents funcions, trobeu:

1. El domini
2. Els punts de tall amb els eixos
3. Els límits al $+\infty$ i $-\infty$
4. Els límits laterals als punts que no siguin del domini

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}$

b) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

Solució.

a)

1. Igualant a 0 el denominador trobarem els punts que no són del domini. En aquest cas només obtenim una solució (una arrel doble):

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1$$

Per tant tindrem que

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

2. Pel que fa als punts de tall, trobem primer amb l'eix d'ordenades (OY) avaluant en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{0}{1} = 0 \implies (0, 0)$$

Fixem-nos que, en ser l'origen de coordenades, també l'obtidrem com a tall amb l'altre eix. En efecte, en igualar a 0 el numerador obtenim:

$$x^2 = 0 \implies x = 0 \implies (0, 0)$$

3. Fem ara els límits a l'infinit. Comencem simplificant els termes de grau més petit, tan al numerador com al denominador. Després cancel·lem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$

De fet, en simplificar, com marxen les x , el límit al $-\infty$ serà igual:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

4. Finalment fem els límits laterals en $x = -1$. Fem un primera inspecció substituint per $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0}$$

Com s'anul·la el denominador però no el numerador, el límit serà infinit. Caldrà veure'n el signe, cosa que segurament dependrà de la banda per on ens apropem a $x = -1$. Per fer-ho només caldrà fer els límits laterals i estudiar el signe del denominador a cada banda de $x = -1$. Com aquest valor és l'únic pel qual el denominador val 0 (és l'únic que no és del domini) en tindrem prou avaluant a cada banda de $x = -1$. Si n'hi hagués més caldria tenir-los en compte. Per tant fem:

$$x^2 + 2x + 1 \longrightarrow \begin{array}{c} + \quad \quad \quad + \\ \text{-----} \\ \quad \quad \quad 0^+0^+ \\ \quad \quad \quad \blacksquare \\ \quad \quad \quad -1 \end{array}$$

Per tant, els límits laterals quedaran:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Exercici 2.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x+1}{x^2+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne el domini

b) Estudieu-ne la continuïtat als punts que no són del domini

c) Trobeu els límits al $+\infty$ i al $-\infty$.

Exercici 3.

Feu els següents límits laterals.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \text{ on } \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x+2}{x+1} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ i } \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \text{ on}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ on } \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ (x+2)2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Exercici 4.

De les següents funcions, trobeu-ne el domini, feu els límits laterals als valors que no siguin del domini i digueu de quin tipus de discontinuïtat es tracta.

$$a) f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$$

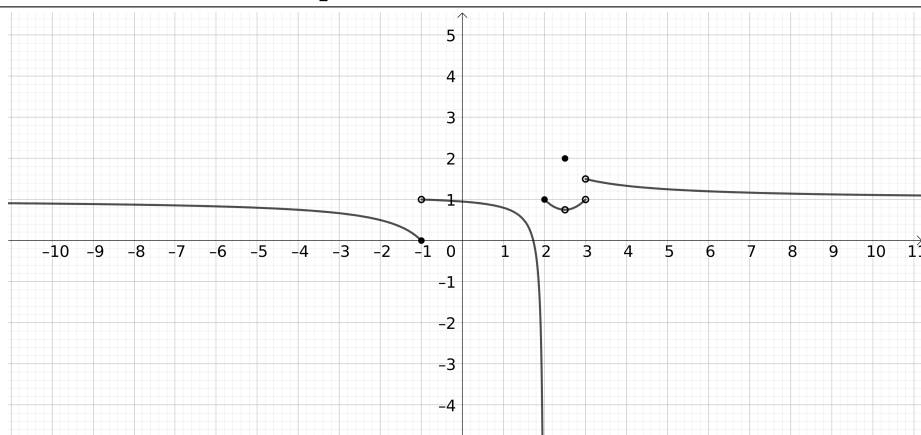
$$b) f(x) = \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 7x + 10}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

Exercici 5.

Exercici 6.

Considereu la funció de la gràfica



Trobeu

- a) el domini
- b) els valors de $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(2.5)$ i $f(3)$.
- c) els límits laterals a $x = -1$, $x = 2$, $x = 2.5$ i a $x = 3$.
- d) el valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercici 7.

De les següents funcions trobeu-ne el domini, els punts de tall amb eixos, estudieu-ne la continuïtat i trobeu les asímptotes verticals (fent els límits laterals) i horitzontals. Finalment, feu-ne un petit esbós.

$$\begin{aligned}
 a) \quad f(x) &= \frac{x-1}{x^2-x} \\
 b) \quad f(x) &= \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+3} \\
 c) \quad f(x) &= \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}
 \end{aligned}
 \quad d) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solució.

b) 1. Domini. Igualant el denominador a 0 trobem:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \implies x = \frac{6 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} \implies x = 1.8 \text{ i } x = 1.19$$

Per tant tindrem que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1.8, 1.19\}$$

2. Punts de tall

- Eix d'ordenades (eix OY). Només cal avaluar la funció en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{6}{3} = 2 \implies \boxed{(0, 2)}$$

- Eix d'abscisses (eix OX). Caldrà igualar el **numerador** a 0:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x = 2 \text{ i } x = 3$$

Per tant, seran els punts

$$\boxed{(2, 0)} \text{ i } \boxed{(3, 0)}$$

3. Continuitat. Caldrà estudiar la continuïtat als punts que no siguin del comini.

- En $x = 1.19$. Comencem fent el límit sense distingir els laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 1.19} f(x) = \frac{1.36}{0}$$

Com al numerador no hi tenim cap 0, sabem que es tractarà d'una discontinuïtat del tipus asimptòtic. Caldrà però fer els límits laterals. Per fer-ho estudiem el signe del denominador:

$$x^2 - 5x + 3 \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & + & & - & & 0 & + \\ & & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ & & \dots & & \dots & & \dots & \end{array}$$

1.19 1.8

Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 1.19^-} f(x) = \frac{1.36}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.19^+} f(x) = \frac{1.36}{0^-} = -\infty$$

- En $x = 1.8$. Fem primer el límit sense distingir entre dreta i esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow 1.8} f(x) = \frac{0.24}{0}$$

Per tant, tornarem a tenir una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1.8$. Aprofitant els càlculs d'abans podem fer ràpidament els límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 1.8^+} f(x) = \frac{0.24}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.8^-} f(x) = \frac{0.24}{0^-} = -\infty$$

4. Finalment trobem les asímptotes:

- *Asímptotes verticals. Estan associades a les discontinuïtat asimptòtiques. Com en tenim dues, les rectes verticals (asímptotes)seran*

$$x = 1.19$$

$$x = 1.8$$

- *Pel que fa a les horitzontals cal fer els límits al $+\infty$ i $-\infty$:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Per tant, la funció tindrà una asímptota horitzontal per la dreta i per l'esquerra, que serà la recta

$$y = 1$$

c) 1. Domini. Igualement el denominador a 0 i obtenim:

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1 \text{ i } x = 2 \implies D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

2. Punts de tall.

- *Amb l'eix d'ordenades (eix OY). Només cal mirar el valor de f quan $x = 0$:*

$$f(0) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

El punt de tall serà doncs $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

- *Amb l'eix d'abscisses (eix OX). Caldrà veure quan s'anul·la el numerador:*

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1 \text{ (arrel doble)}$$

No obstant, com -1 no és del domini perquè també s'anul·la el denominador, la funció no tallarà l'eix d'abscisses.

3. Continuitat. L'únic valor problemàtic serà $x = -1$, que no és del domini. Comencem fent el límit sense distingir entre dreta i esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per tal de resoldre la indeterminació factoritzem i simplifiquem. Com les arrels del denominador i numerador les hem buscat abans, ja tenim la feina feta i podem escriure:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x-2) \cdot \cancel{(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-2} = 0$$

Fixem-nos que els laterals seran iguals entre ells, ja que el límit no depèn de si x s'apropa a -1 per la seva dreta o per la seva esquerra. Per tant tindrem

$$f(-1^+) = f(-1^-) \neq f(-1) \text{ (ja que no és del domini)}$$

i la funció tindrà una discontinuïtat evitable en $x = -1$.

4. Asímptotes.

- *Pel que fa a les verticals, no n'hi ha perquè la funció no té cap discontinuïtat asimptòtica.*
- *Per veure les horitzontal caldrà fer els límits a l'infinit:*

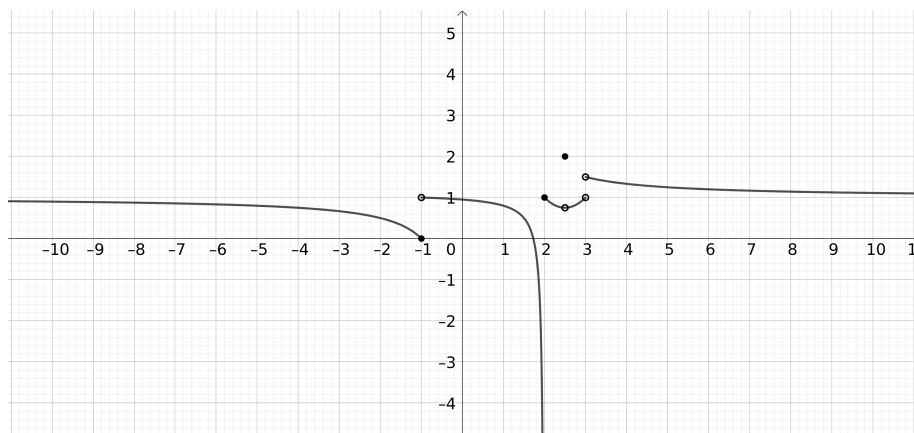
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \cancel{2x+1}}{x^2 - \cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = 1$$

Per tant, la funció tindrà una asímptota horitzontal que serà la recta $y = 1$, tant per la dreta com per l'esquerra.

Exercici 8.

Considereu la funció de la gràfica



Discutiue-ne la continuïtat tot trobant els límits laterals allà on calgui. Trobeu també les asímptotes que pugui tenir, tant horitzontals com verticals.

Exercici 9.

Trobeu el valor dels paràmetres a i b per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x + b}{x^2 + 2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sigui contínua.

Exercici 10: PAU juny 2016.

Exercici 30 del recull de funcions.

Exercici 11: PAU setembre 2016.

La fotografia matemàtica següent sembla indicar que les branques de les ulleres formen una paràbola. Tanmateix, no totes les corbes en forma de “U” són paràboles. Hem marcat sobre uns eixos de coordenades alguns dels punts: $(0, 2.5)$, $(1, 0)$, $(3, -1)$ i $(5, 0)$. Justifiqueu si la gràfica correspon a una paràbola o no.

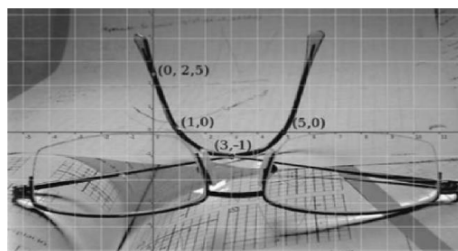


Figura 1: Font: www.fotografiamatematica.cat

Exercici 12: PAU Setembre 2016 a).

Exercici 35 del recull de funcions. Considereu la funció

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$$

- a) *Determineu els punts en què la funció f talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals on la funció f és positiva.*

Exercici 13.

La temperatura exterior a un hivernacle es pot modelar segons la funció definida a trossos

$$T(t) = \begin{cases} 0.26t^2 - 2.91t + 4.15 & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ -0.24t^2 + 8.35t - 59.43 & \text{si } 12 \leq t < 24 \end{cases}$$

- a) Feu una gràfica de la funció
- b) Per tal de regular la temperatura dins l'hivernacle, es decideix instal·lar-hi una boma de calor. Es desitja programar la bomba de calor de manera que aquesta funcioni en mode hivern quan la temperatura exterior sigui inferior a 3 graus centígrads i en mode estiu quan aquesta sigui superior a 26 graus. Digueu en quin moment del dia caldria programar la bomba de calor perquè estigui en mode hivern, apagada i en mode estiu.

Exercici 14.

Escriu les següents funcions com a composició de dues funcions. Per a cada exercici trobeu dues funcions f i g .

- | | |
|---|--|
| a) $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$ | d) $(g \circ f)(x) = e^{2x-3}$ |
| b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$ | e) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 3} + 4$ |
| c) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | f) $(f \circ g)(x) = \ln(\sqrt{x + 2}) - \sqrt{x + 2}$ |

Exercici 15.

Per tal de constituir una determinada empresa els socis capitalistes abonen una inversió inicial de 10 mil euros en total, amb el que, en el moment de constituir-se, podríem dir que l'empresa presenta 10 mil euros de pèrdues. Al cap d'un mes l'empresa ha guanyat 19 mil euros, amb que ha obtingut uns beneficis de 9 mil euros. En aquest moment han passat dos mesos des de la constitució de l'empresa, i s'han obtingut uns beneficis totals de 26 mil euros des del moment de la seva constitució. Considereu que la funció $B(t)$, que dona els beneficis de l'empresa en milers d'euros on t són els mesos transcorreguts des del moment de la seva constitució, és una paràbola.

- a) Trobeu la funció $B(t)$
- b) Digueu quins seran els beneficis totals al cap de 5 mesos d'havers-e constituït l'empresa

- c) Digueu en quin moment els beneficis de l'empresa seran màxims, i quins seran aquests beneficis
- d) Digueu si segons aquesta funció, en algun moment l'empresa tornarà a tenir pèrdues, i en quin moment seria.

Exercici 16: PAU 2020, S4 número 2.

Un fabricant va tenir un producte a la venda durant deu anys. Durant aquest temps, el preu del producte P , en euros, va estar relacionat amb el temps que feia que estava a la venda t , expressat en anys, seguint la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & \text{si } 2 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Indiqueu els intervals de creixement i decreixement del preu del producte durant aquests deu anys.
- b) Trobeu el preu màxim que va assolir el producte durant el temps que va estar a la venda.

Exercici 17: PAU 2020, S4 número 4, apartat a).

Considerem les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = -x^2 + c$. Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que les gràfiques de les funcions f i g es tallin als punts $(-1, 3)$ i $(3, -5)$.

Exercici 18: PAU 2021, S1 número 4.

L a funció

$$C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$$

en què t són els anys transcorregut i $C(t)$ la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi.

- a) Calculeu quants clients tenia l'empresa en el moment inicial i quants tenia al cap d'un any.
- b) Trobeu l'instant en què l'empresa deixa de perdre clients i calculeu quants clients té en aquell instant.
- c) Calculeu quant temps haurà de passar perquè l'empresa aconseguixi tenir de nou el mateix nombre de clients que en el moment d'iniciar l'estudi.

Exercici 19: PAU 2021, S1 número 5.

Una empresa posa a la venda un producte que distribueix en caixes. El benefici B obtingut per l'empresa, expressat en milers d'euros, és donat per l'expressió $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, en què $x > 0$ és el preu de venda de cada caixa, expressat en euros.

- Quin benefici obtindrà si el preu de venda de cada caixa és de 6 euros? Entre quins valors cal fixar el preu de venda d'una caixa per a obtenir beneficis?
- A quin preu ha de vendre cada caixa perquè el benefici sigui el més gran possible? Quin és aquest benefici màxim?

Exercici 20: PAU 2022, S2 número 2.

Experimentalment s'ha comprovat que la producció d'un tipus de fruita determinat que es cultiva en hivernacles depèn de la temperatura, segons la funció $f(x) = -x^2 + 46x - 360$ en què x representa la temperatura de l'hivernacle en graus Celsius i $f(x)$ és la producció anual en centenars de quilograms per hectàrea. El preu de venda de la fruita es manté estable a 1,2 euros per cada quilogram.

- Determineu l'interval de temperatures entre les quals cal mantenir l'hivernacle perquè hi hagi producció de fruita. Calculeu els ingressos anuals per hectàrea si es manté l'hivernacle a 20°C de temperatura.
- A quina temperatura s'obté la producció màxima de fruita? Quins ingressos per hectàrea s'obtenen en aquest cas?

2 Derivades

Exercici 1.

La funció $f(x) = x^3 + 2$ sempre és sempre creixent. Calcula'n la variació mitjana a cadascun dels intervals següents: $[-3, -1]$, $[0, 2]$ i $[5, 7]$. En quin dels tres intervals té un creixement més ràpid?

Exercici 2.

Considera la funció $f(x) = 3x + 1$. Demostrea que la seva variació mitjana sempre és la mateixa, independent de l'interval $[a, b]$.

Exercici 3.

Quant val la variació mitjana de la funció $f(x) = 5$ en qualsevol interval $[a, b]$?

Exercici 4.

Calcula la variació mitjana de la funció $f(x) = -x^2 + 4x$ a l'interval $[2.9, 3.1]$. Creix o decreix la funció a prop de $x = 3$? Feu-ne una representació gràfica i comprova després la teva resposta.

Exercici 5.

Trobeu les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

b) $f(x) = (3x^3 + 2x^2 + 3x - 1) \ln(x)$

e) $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x} \cdot (x^2 - 1)$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (2x^2 - 3x + 1)$

f) $f(x) = \ln(x) \cdot (2x + 3) - 2x^2 + 3x - 1$

Exercici 6.

Trobeu les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = (x^2 - x - 1)^4$

d) $f(x) = e^{(x^2 - x - 1)^4}$

b) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = \sqrt{e^{2x}}$

c) $f(x) = e^{x^2 - x - 1}$

f) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$

Exercici 7: Pg. 184 n° 52.

Derivar les següents funcions

a) $f(x) = x \ln(x) + \ln^2(x) + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x} (1 + x)$

d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{1 - x}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$

f) $f(x) = (1 - x)^3 \log_2(x)$

g) $f(x) = x^2(1 - 3x)^3$

Solució.

a) Derivem com un producte $x \ln(x)$ i com un quadrat $\ln^2(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} + 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 0 \\ &= \ln(x) + 1 + \frac{2 \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

b) Derivem com un producte

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+x) + \sqrt{x} \cdot 1 = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{1+x+\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1+3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

c) Derivem com un quocient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2(x^2-1)^2 - (-2x)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

d) Derivem com un quocient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (1-x) - \ln(x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1-x}{x} + \ln(x)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{\frac{1-x+x \ln(x)}{x}}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x \ln(x)}{x(1-x)^2} \end{aligned}$$

e) Fem la regla de la cadena derivant d'enfora endins.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} \cdot \frac{2x(1-x^2+1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{x}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{x}{1-x^4} \end{aligned}$$

f) Derivem com un producte:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(1-x)^2(-1)\log_2(x) + (1-x)^3 \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} = \\ &= (1-x)^2 \left(-3\log_2(x) + \frac{1-x}{\ln(2) \cdot x} \right) \end{aligned}$$

g) Derivem com un producte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(1-3x)^3 + x^2 3(1-3x)^2(-3) = \\ &= 2x(1-3x)^2 - 9x^2(1-3x) = (1-3x)(2x(1-3x) - 9x^2) = \\ &= (1-3x)(2x - 6x^2 - 9x^2) = (1-3x)(2x - 15x^2) \end{aligned}$$

Exercici 8.

Digueu si les següents funcions són derivables al canvi de branca o no ho són:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) \cdot x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x^2+2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercici 9: PAU 2023, setembre.

El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular segons la funció

$$f(t) = 10 \left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 \right)$$

on t és el temps en dies i va des de $t = 1$ (dilluns) fins a $t = 8$ (dilluns de la setmana següent).

a) Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100kg de menjar.

- b) Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?

Exercici 10: PAU 2023, juny.

El nombre de noves persones infectades per una malaltia, en milers, és donat per la funció següent:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} \quad t \geq 0$$

en què t representa el temps transcorregut, en setmanes, des que es va iniciar la infecció.

- a) Quants malalts s'infectaran a la setmana 1 i quants la setmana 2? Podem pensar que, a llarg termini, aquesta infecció desapareixerà?
- b) En quin instant es produeix el nombre màxim d'infectats? Quin és aquest nombre?

Exercici 11.

La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt $(-2, 6)$ i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix de les abscisses.

- a) Calculeu el valor de a
- b) Calculeu el valor de b

Exercici 12.

Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6}$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

- a) Justifiqueu que $f(x)$ és estrictament decreixent quan $x \geq 0$
- b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pas a llarg termini? Argumenteu si aquest valor s'assolirà en algun moment.

3 Optimització

Exercici 1.

El preu en euros d'una pedra preciosa és cinc vegades el quadrat del seu pes en grams. Si tenim una pedra periosa de 8 grams i ens plantegem partir-la en dos trossos:

- a) Quin pes haurà de tenir cada tros perquè el conjunt valgui el mínim possible?*
- b) Quin és el preu mínim i el preu màxim que pot valor aquest conjunt?*

Exercici 2.

El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 euros. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat la conclusió que si el preu del menú és de 18€ aleshores entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és "lineal", de manera que per cada euro que augmentem el preu del menú entren 4 clients menys a dinar.

- a) Obtingueu la funció que determina el nombre de clients que vindran a dinar en funció del preu del menú.*
- b) Obtingueu la funció que determina els ingressos en funció del preu del menú.*
- c) Obtingueu la funció que determina els beneficis en funció del preu del menú.*
- d) Trobeu el preu òptim del menú (preu que maximitza els beneficis), justifiqueu que es tracta d'un màxim, així com el benefici que s'obtenen amb aquest preu.*

Exercici 3.

Un pastor aprofitant una paret existent de 60 metres que li servirà com a tot o una part d'un dels costats vol construir una tanca rectangular per al seu ramat. Si disposa de 100 metres de tanca i es designa x la mesura de cadascuna de les parets laterals i $100 - 2x$ la mesura de la paret frontal:

- a) expresseu l'àrea de la tanca en funció de x*
- b) Com s'aconsegueix l'àrea més gran? Quant val aquesta àrea?*

Exercici 4.

Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0.80€/Kg. Cada setmana que passa s'han de llençar 400kg de fruita perquè es fa malbé, però el preu de venda de la fruita que queda augmenta un cèntim cada kg (perquè està més madura i dolça).

- a) Quins serien els ingressos si es vengués la fruita al cap de nou setmanes d'haver-la collit?
- b) Per tal d'obtenir el màxim d'ingressos, quantes setmanes hauríem d'esperar a vendre la fruita des de que s'ha collit?

Solució.

- a) Cada setmana que esperem perdem 400 Kg de fruita. Per tant, cal de 9 setmanes tindrem $40.000 - 9 \cdot 400 = 36400$ Kg de fruita. Ara bé, per haver esperat 9 setmanes, la fruita ha augmentat el seu preu a raó de 0,01€cada setmana. A les 9 setmanes aquest valdria 0.89€cada quilo. Per tant, si venguéssim la fruita al cap de 9 setmanes tindríem uns ingressos de $36400 \cdot 0.89 = 32396$ €.
- b) Ara volem saber quantes setmanes caldrà esperar per obtenir uns ingressos màxims. En general, si esperem x setmanes, els ingressos vindran donats per

$$I(x) = (40000 - 400x)(0.80 + 0.01x) = -4x^2 + 80x + 32000$$

Aquesta funció és una paràbola cóncava cap avall i, per tant, el seu vèrtex correspon a un màxim. Per tant, el nombre de setmanes que caldrà esperar per maximitzar els ingressos serà:

$$x_v = -\frac{80}{2 \cdot (-4)} = 10 \text{ setmanes}$$

Tot i que no ho demana, els ingressos que s'obtindrien venent la fruita al cap de 10 setmanes serien:

$$I(10) = (40000 - 400 \cdot 10)(0.80 + 0.01 \cdot 10) = 36000 \cdot 0.9 = 32400 \text{ €}$$

Exercici 5.

Es vol tancar un camp rectangular que hi ha a la vora del camí. Si la tanca que dóna al camí, que no volem de longitud inferior a 150m ni superior a 200m, costa a 8€/m i la dels altres costats a 1 €/m, trobeu l'àrea màxima de camp que es pot tancar amb 2.880€. I quina és l'àrea mínima?

Exercici 6.

Els costos de fabricació $C(x)$ en euros d'unes galetes depenen de la quantitat elaborada, x , en Kg segons la funció:

$$C(x) = 10 + 170x$$

El fabricant estima que el preu de venda de cada Kg de galetes ve donat per la funció:

$$P(x) = 200 - \frac{25x^2}{100}, \text{ en } \text{€}$$

- Expliqueu raonadament si el preu de venda disminueix amb la quantitat de galeta elaborada.
- Suposant que es ven tot el que es fabrica, obtingueu la funció que recull els beneficis en funció de la quantitat de galeta produïda.
- Quina quantitat de galeta cal produir per tal d'obtenir uns beneficis màxim? Justifiqueu que es tracta d'un màxim i digueu quins són aquests beneficis.

Solució.

- El preu de venda segueix una paràbola que és còncaua cap avall (el coeficient de grau 2 és negatiu, val $-\frac{25}{100}$). Com el coeficient de grau 1 és nul ($b = 0$) el vèrtex de la paràbola està situat a $x_v = 0$. Per tant, la funció $P(x)$ passa de créixer a decreïxer en $x = 0$ (hi té un màxim). Com la quantitat produïda ha de ser positiva ($x > 0$) podem concloure que el preu sí que disminueix amb la quantitat de galeta elaborada.
- La funció que ens proporciona els beneficis s'obté de la diferència entre els ingressos i els costos. Els costos en els dona l'enunciat, mentre que els ingressos els trobarem de multiplicar el preu per quilo de cada galeta pel nombre de quilos venuts (que coincideix amb els produïts). Per tant, ens quedarà: equation

$$B(x) = P(x) \cdot x - C(x) = \left(200 - \frac{25x^2}{100}\right) \cdot x - (10 + 170x)$$

Si l'arreglem una mica, la funció quedarà:

$$B(x) = -10 + 30x - \frac{25x^3}{100}$$

- c) La funció $B(x)$ és una funció cúbica. Per tal de trobar-ne el màxim caldrà derivar i igualar a 0, ja que no tenim fórmula per trobar-ne els vèrtexs:

$$B'(x) = 30 - \frac{75x^2}{100} = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són: $x = -\sqrt{40}$ i $x = \sqrt{40}$. Ens quedem només amb la positiva perquè l'altra no té sentit. Ara caldrà veure que correspon a un màxim. Com $\sqrt{40} \simeq 6.32$, avaluem $B'(x)$ en $x = 6$ i en $x = 7$, i obtenim valors positius i negatius, respectivament. Per tant, la funció $B(x)$ té un màxim en $x = 6.32$, que ens indica que caldrà produir 6.32 Kg de galeta per obtenir uns beneficis màxims. Ara només cal saber quins seran aquests beneficis: $B(6.32) = 116.49$ €.

Exercici 7.

S'ha construït una presa d'emmagatzematge d'aigua els costos de manteniment diaris de la qual són una funció de la quantitat d'aigua que té emmagatzemada. Aquests costos vénen donats per la següent expressió:

$$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$$

on $C(x)$ representa el cost en € i x el volum d'aigua en m^3 .

- a) Trobeu el volum diari d'aigua òptim que cal mantenir per minimitzar costos.
- b) Calculeu el cost mínim diari que suposa el manteniment de la instal·lació. Si un dia la presa té emmagatzemats 3 milions de metres cúbics d'aigua quant s'ha gastat de més respecte del cost mínim?

Solució.

- a) Només caldrà trobar el mínim de la funció $C(x)$. Com és una cúbica, derivem i igualem a 0:

$$C'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són $x = \frac{4}{3}$ i $x = -2$. Aquesta segona solució no té sentit perquè és negativa.

Cal veure si $x = \frac{4}{3}$ correspon a un màxim o a un mínim. Com $\frac{4}{3} \simeq 1.333$, avaluem $C'(x)$ en $x = 1$ i $x = 2$, i obtenim que aquesta funció és negativa a l'esquerra de $x = \frac{4}{3}$ i positiva a la seva dreta. Per tant, la funció, com passa de decreixer a créixer en aquest valor, els costos són mínims per $x = \frac{4}{3}$. Així, la quantitat d'aigua òptima és de 1.333 milions de m^3 .

b) Els cost de manteniment que obtenim per emmagatzemar aquesta quantitat d'aigua valdrà $C\left(\frac{4}{3}\right) =$

Exercici 8.

En valor, en milers d'euros, durant els dos primers anys d'una determinada empresa en un funció del temps t ve donat per la funció

$$v(t) = 1 + 3t + t^2 - t^3$$

- a) Trobeu el valor de l'empresa en el moment de la seva constitució
- b) Trobeu el valor màxim i els valors mínims de l'empresa durant els dos primers anys de vida
- c) Trobeu el moment de màxim creixement de l'empresa.

4 Matrius

Exercici 1: Pg. 17 número 10.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

Exercici 2: Pg. 17 número 11.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculeu A^2 i A^3 .

Exercici 3: PAU Juny 22, número 5.

Considereu les matrius $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

- a) Trobeu per a quins valors d' a és invertible la matriu obtinguda del resultat del producte $P \cdot A$.
- b) Si $a = 2$, trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $P \cdot A + X = I$, en què I denota la matriu identitat d'ordre 2.

Exercici 4: PAU Setembre 22, número 5.

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

- Calculeu per a quin valor de a les dues matrius commuten, és a dir, per a quin valor de a es compleix $A \cdot B = B \cdot A$. Comproveu que per a aquest valor de a se satisfà que $A \cdot B = 2 \cdot I$, en què I és la matriu identitat d'ordre dos.
- Per al valor de a trobat a l'apartat anterior, calculeu les matrius inverses de les matrius A i B . Podeu aplicar la relació $A \cdot B = 2 \cdot I$.

Exercici 5: PAU Juny 21, número 5.

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Trobeu l'expressió general de A^n . Demostreu que la inversa de A^n és $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.

Exercici 6: Setembre 21, número 1.

https://selecat.cat/view.php?p=pau_macs21sl

Exercici 7: PAU, juny 2020, número 5.

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Comproveu que es compleix $A^{-1} = A^2$.
- Resoleu l'equació matricial $A \cdot X + B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

Exercici 8: PAU setembre 20, número 1.

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, es compleix que $A^{-1} = -A$.

Exercici 9: PAU, Juny 2019, número 1.

Resoleu les qüestions següents.

- Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = \mathbf{0}$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2 i $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la.

- b) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A , és a dir, que compleixen que $A \cdot B = B \cdot A$.

Exercici 10: PAU Juny 2019, número 6.

En una oficina tenen tres proveïdors que els suministren el material. La matriu P ens dona el preu unitari, en euros, de cadascun dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdors p_1 , p_2 i p_3

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.
- b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per a tota la comanda? Quin és aquest preu?

Exercici 11: PAU setembre 2019, número 1.

Volem enviar una data codificada. Per fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d \ m \ a)$, en el qual d representa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviarem.

- a) Si la data que volem enviar és 1 de gener de 2019, és a dir, $X = (1 \ 1 \ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem?
- b) Si el vector codificat que ens ha arribat és el vector $(2036 \ 1 \ -13)$, quina és la data sense codificar?

Exercici 12.

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & a \\ 1 & -a & 2 \end{pmatrix}$$

Trobeu el valor de a per tal que es compleixi $\text{rang}(A) = 2$.

Solució.

Com la matriu és 3×3 , el seus rangs possibles són 1, 2 o 3 (hi ha algun element no nul i per tant el rang 0 queda descartat). No obstant, el rang tampoc pot ser 1 perquè hi ha almenys un menor no nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 3 = -14 \neq 0$$

Per tant, el rang serà 2 o 3. Per tal que el rang sigui 2 n'hi haurà prou amb que determinant d'A sigui nul, ja que aquest serà 3 en cas contrari (rang màxim). Per tant, calculem el determinant d'A amb la regla de Sarrus i l'igualem a 0:

$$\det(A) = -24 - 6a - a - (-8 - 6 - 3a^2) = 3a^2 - 7a - 10$$

Resolem ara l'equació $\det(A) = 0$ i obtenim dos valors:

$$a = -1 \text{ o } a = \frac{10}{3}$$

Per tant, si $a = -1$ o $a = \frac{10}{3}$ el rang de la matriu serà 2; altrament, el rang serà 3.

Exercici 13.

Sigui A la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu A^{50} i A^{97}

b) Trobeu els valors a i b pels quals la matriu A commuta amb la matriu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$

Solució.

a) Calculem algunes potències de la matriu A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fixem-nos que acabem de trobar que $A^3 = -A$. Per tant les següents potències seran:

- $A^1 = A$

- $A^2 = A^2$
- $A^3 = -A$
- $A^4 = -A^2$
- $A^5 = -A^3 = -(-A) = A$
- $A^6 = A^2$
- $A^7 = -A$
- $A^8 = -A^2$
- $A^9 = A$

Per tant, les potències es van alternant en un cicle de longitud 4. Si dividim 50 entre 4 obtenim 12 de quocient i 2 de residu, i si dividim 97 entre 4 obtenim 24 de quocient i 1 de residu. Per tant obtenim:

- $A^{50} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $A^{97} = A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Per tal que les dues matrius commutïn s'ha de complir:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

Si fem els productes obtenim:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

D'aquí traiem 4 equacions amb dues incògnites:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -b \\ -a = -1 \\ 1 = a \\ -b = 0 \end{array} \right\}$$

De la primera i la quarta equació obtenim $b = 0$ en els dos casos, i de la segona i la tercera obtenim $a = 1$, també en tots dos casos. Per tant, per tal que les dues matrius commutïn, s'ha de complir $b = 0$ i $a = 1$.

5 Sistemes d'equacions

Exercici 1.

Resoleu i classifiqueu els següents sistemes:

a)

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = -3 \end{array} \right\}$$

e)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{array} \right\}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - z = -5 \\ x + 2y - z = -5 \\ 5x + y + z = 11 \end{array} \right\}$$

f)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 3z = 10 \\ 2x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \\ 3x - 4y = 18 \end{array} \right\}$$

g)

$$\left. \begin{array}{l} x + 7y - 3z - 3 = 0 \\ 4x + y + 2z - 5 = 0 \\ 7x - 5y + 7z - 9 = 0 \end{array} \right\}$$

d)

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = 2 \\ 2x + 25y = 0 \end{array} \right\}$$

h)

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 13y + 14z = 80 \\ 8x - 9y - 10z = -40 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{array} \right\}$$

Exercici 2: PAU Juny 2023 número 2.

Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.

- a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.
- b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?

Exercici 3: PAU setembre 2023.

L'empresa d'esports aquàtics DiverAqua ofereix tres tipus d'activitats: esquí aquàtic, caiac i moto aquàtica. El preu per sessió i client de cadascuna d'aquestes activitats és de 40 € per l'esquí aquàtic, 20 € pel caiac i 60 € per la moto aquàtica. Sabem que avui DiverAqua ha venut 45 sessions en total. També sabem que el nombre de clients que han escollit esquí aquàtic és el triple dels que han escollit una sessió de caiac. La recaptació total del dia ha estat de 1.700 €.

- a) Plantegeu un sistema d'equacions lineals que reculli tota aquesta informació.
- b) Quantes persones han dut a terme cadascuna de les tres activitats?

Exercici 4: PAU Juny 2021, número 3.

En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

- a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.
- b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.

Exercici 5: PAU Setembre 2021, número 2.

La Filomena fa una festa i convida els amics a menjar un pastís. Ha anat a la botiga i ha comprat una dotzena d'ous, una bossa de farina d'ametlla i un paquet de sucre morè. La festa ha estat un èxit i decideix repetir la trobada i tornar a fer el pastís. Torna a la botiga i compra una altra dotzena d'ous i dues bosses de farina d'ametlla. Però un cop a casa s'adona que no té gens de sucre. Torna a la botiga i compra un paquet de sucre morè i també una altra dotzena d'ous. La primera compra li va costar 6€, la segona 6,5€ i la darrera 3,5€.

- a) *Plantegeu un sistema d'equacions amb les dades del problema.*
- b) *Calculeu el preu d'una dotzena d'ous, el d'una bossa de farina d'ametlla i el d'un paquet de sucre morè.*

Exercici 6: PAU, Juny 2020.

Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1€ per cada còmic, 1,5€ per cada revista i 2€ per cada novel·la.

Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30€. Quantes publicacions va vendre de cada tipus?

Exercici 7.

En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en 3 seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou: 2000 euros els d'administració, 2400 els de recerca i 2800 els de publicitat, cosa que provoca una despesa total mensual de 228.000 euros.

- a) *Plantegeu i estudieu (dient si es tracta d'un sistema compatible determinat, indeterminat o bé incompatible) el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció.*
- b) *Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ dels de recerca i $\frac{1}{5}$ dels de publicitat. Aquest fet ha significat un estalvi mensual de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció abans de la reestructuració.*

Exercici 8.

L'estiu passat, una família amb tres fills es va gastar 1500€ en equipament per a un campament esportiu. En concret es va gastar en el més gran 100€ més que quatre vegades el que es va gastar en el fill menor. A més, entre el fill mitjà i el més gran es van gastar 700€. Esbrineu quant es va gastar aquesta família en cadascun dels fills.

Exercici 9.

L'Alexandra necessita aconseguir 30000€ per cursar el proper any un màster molt prestigiós. Com que cap banc li financia la totalitat del preu, necessita recórrer a tres entitats bancàries, A, B i C, qui li ofereixen un tipus d'interès del 5, 7 i 8%, respectivament. La quantitat que va sol·licitar entre les entitats A i B va ser de

quatre vegades la de l'entitat C. Si en finalitzar l'any va pagar uns interessos de 1880€, quina quantitat va sol·licitar en cadascuna de les entitats bancàries?

6 Probabilitat

6.1 Laplace

Exercici 1.

L'Anna ha tingut entrevistes de treball en una empresa italiana i una de francesa. Estima que la probabilitat que li ofereixin treball en la italiana és del 70%; en la francesa, del 50%, i en ambdues del 30%.

- Determina la probabilitat que no li ofereixi treball l'empresa italiana
- Quina és la probabilitat que com a mínim una de les dues li ofereixi treball?
- Quina probabilitat té que li ofereixi treball l'empresa francesa però no la italiana?
- Calcula la probabilitat que cap de les dues empreses li ofereixi treball.

Exercici 2.

En Marc fa anualment viatges de treball a Alemanya (A), Bèlgica (B) i França (F). La probabilitat de viatjar a aquests destins en un anys és:

- $P(A) = 0.3$; $P(B) = 0.1$, $P(F) = 0.2$,
- $P(A \cap F) = 0.08$, $P(A \cap B) = 0.03$, $P(B \cap F) = 0.06$
- $P(A \cap B \cap F) = 0.01$

Quina és la probabilitat que viatgi com a mínim a un d'aquests països durant l'any? I que no viatgi a cap?

Exercici 3.

En Miquel i la Carla juguen a llançar un dau per torns. Si surt 1, 2, 3 o 4, el jugador que ha llançat el dau guanya. Si surt 5 o 6, és el torn del següent jugador. En Miquel inicia el joc, que continua fins al tercer llançament.

- Quina probabilitat té en Miquel de guanyar el joc en la primera tirada? I en la tercera?
- Quina probabilitat té la Carla de guanyar el joc en la primera tirada?

Exercici 4.

Siguin A i B dos successos d'un experiment aleatori de manera que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ i $P(A \cup B) = 0.75$. Calcula $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$ i $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Exercici 5.

Es llancen dos daus i se sumen els resultats obtinguts.

a) Quina és la probabilitat que la suma sigui vuit?

b) Quina suma és més probable?

Exercici 6.

Si es llança un dau quatre vegades, què és més probable: que surti com a mínim un cinc o que no en surti cap?

Exercici 7.

Al 30% dels estudiants d'un centre escolar els agrada el futbol, al 20% el bàsquet i al 10% tots dos esports. Si s'escull un estudiant del centre escolar a l'atzar, quina és la probabilitat que li agradi algun dels dos esports? I que no li agradi cap? I només un?

Exercici 8.

Es llança una moneda tres vegades. Quina és la probabilitat d'obtenir més cares que creus?

Exercici 9.

Segons un estudi realitzat entre persones menors de 40 anys, el 24% segueix alguna sèrie espanyola, el 35%, una nord-americana, i el 14%, ambdues. Quina proporció de persones segueix regularment com a mínim un dels dos tipus de sèries?

Exercici 10.

El temps, en minuts, que dediquen a fer els deures a casa un grup de 30 estudiants de primària ve reflectit en la taula següent:

Temps	$t \leq 5$	$5 < t \leq 10$	$10 < t \leq 15$	$15 < t \leq 20$
Nombre estudiants	6	12	9	3

Exercici 11.

Dibuixeu un diagrama de Venn amb la informació de la següent taula, identifiqueu les següents regions i calculeu les probabilitats dels següents processos:

a) $A \cap B$

d) $\bar{A} \cup \bar{B}$

b) $\bar{A} \cap \bar{B}$

e) $\bar{A} \cup B$

c) $A \cup B$

	B	B
A	20	35
A	55	75

Exercici 12.

Una empresa té una planta de fabricació de telèfons mòbils. Se sap que el 10% dels telèfons mòbils fabricats en aquesta planta són defectuosos. Si un telèfon és defectuós, la probabilitat que el procés del control de qualitat el detecti és del 95%. Si no és defectuós, la probabilitat que el consideri defectuós i el tregui de la producció és del 3%. Dibuixeu un diagrama d'arbre i responeu:

- Si s'escull un telèfon mòbil a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui defectuós i superi el control i, per tant, es posi a la venda?
- De cada 1000 telèfons, quants esperem que siguin defectuosos però tot i així superin el control de qualitat?
- Si s'escull un telèfon a l'atzar, quina és la probabilitat que no sigui defectuós però tot i així no superi el control de qualitat?

Exercici 13.

Tirem un dau cúbic i una moneda. Calculeu:

- La probabilitat d'obtenir 2-cara
- La probabilitat d'obtenir nombre parell- creu

Exercici 14.

Llancem dos daus cúbics alhora i calculem la resta entre el número més gran i el més petit. En total podem obtenir els resultats: 0, 1, 2, 3, 4 i 5.

- Quin és el resultat més probable?
- Quant val aquesta probabilitat?

Exercici 15.

En una urna hi ha 10 boles numerades de l'1 al 10. Traiem 3 boles consecutivament, sense reposar les boles que anem traient. Trobeu la probabilitat que:

- Les tres boles són un nombre parell
- Les tres boles són un nombre primer

c) Treure tres boles amb un nombre primer o parell

Exercici 16.

En una escola d'enginyeria el 35% dels estudiants aconseguixen obtenir el títol. Es trien a l'atzar dos estudiants de primer curs. Determineu la probabilitat que finalitzi els estudis:

- a) Tots dos
- b) Almenys un
- c) Només un
- d) Cap dels dos

Exercici 17.

Quan es produeix un impagat de poca quantia, un banc telefona als seus clients en un 52% dels casos, els envia un SMS en un 36% i fa servir ambdues opcions en un 12%.

Un client ha incorregut en un impagat:

- a) Quina és la probabilitat que rebi una notificació per algun mitjà dels indicats?
- b) Quina és la probabilitat que rebi un SMS, però no una trucada telefònica?
- c) Si es produeixen tres impagats independents del mateix client, quina probabilitat hi ha que contactin amb ell per qualsevol mitjà les tres vegades?

6.2 Probabilitat condicionada

Exercici 1.

El Joan té tres maneres d'anar a la universitat. El 30% de les vegades va en autobús, el 20% en bicicleta i el 50% caminant. Quan va en autobús, arriba tard el 5% de les vegades; quan va en bicicleta, el 10%, i caminant el 25%. Donat un dia en què arriba a temps, quina probabilitat hi ha que hi anés en bici?

Exercici 2.

Un bon conté 6 bales blanques i 4 de negres, i un segon bol en conté 5 de blanques i 3 de negres. Es treu una bala a l'atzar del primer bol i es col·loca, sense mirar-la, al segon. Després s'extreu una bala del segon bol. Quina és la probabilitat que aquesta sigui negra?

Solució.

R: $\frac{17}{45}$.

Exercici 3.

Les aplicacions de compravenda més utilitzades són Wallapop i Vibbo. El 70% de les transaccions es fan per Wallapop i la resta per Vibbo. Els productes que es pugen a Wallapop, en el 80% de les ocasions, tarden menys de deu dies a tancar-ne la venda, mentre que a Vibbo ho aconseguen només en el 25% dels casos en el mateix termini de temps. Si s'escull a l'atzar una de les aplicacions per posar a la venda un producte, quina és la probabilitat que superi el termini de deu dies per aconseguir la venda?

Exercici 4.

L'Anna i el Lluís comparteixen cotxe per desplaçar-se cada dia a la feina. L'Anna condueix el 40% dels dies i en Lluís la resta. Quan condueix l'Anna, arriben tard el 5% dels dies, i quan condueix el Lluís, el 8%. Calculeu la probabilitat que un dia escollit a l'atzar arribin tard a la feina.

Exercici 5.

La probabilitat que plougui un dia d'estiu en una ciutat és del 0.2%. La probabilitat que la temperatura màxima diària superi els 25°C és del 0.3% quan plou i del 0.8% quan no. Trobeu la probabilitat que un dia d'estiu no se superin els 25°C.

Exercici 6.

Un fabricant d'automòbils elèctrics compra les bateries de ions de liti a dos proveïdors, un d'asiàtic i un altre d'uropeu. Del primer adquireix el 65% de les bateries, i, del segon, el 35%. Un cop muntades als automòbils, les bateries són sotmeses a un control de qualitat que indiquen que el 2% de les procedents d'Àsia i l'1% de les europees són defectuoses. S'escull un automòbil a l'atzar i es comprova que la bateria és defectuosa. Quina és la probabilitat que aquest provingués d'Àsia?

Solució.

R: 78.79%.

Exercici 7.

Una planta ensambladora de circuits rep components de tres fabricants A, B i C. El 50% del total dels components es compren al fabricant A, mentre que als fabricants B i C es els compra un 25% a cadascun. El percentatge de components defectuosos és d'un 5% per al fabricant A, un 10% per al fabricant B i un 12% per al fabricant C. Per tal de controlar el procés de producció, es realitza un control de qualitat, escollint un circuit a l'atzar.

a) Troba la probabilitat que aquest contingui components defectuosos.

- b) Si el circuit no conté components defectuosos, quina probabilitat hi ha que procedeixi del fabricant B?

Exercici 8.

En un restaurant d'hamburgueses, el 80% dels clients utilitza quètxup, el 75% mostassa i el 65% tots dos.

- a) Quina és la probabilitat que un client escollit a l'atzar utilitzi com a mínim un dels dos?
- b) Si un client utilitza mostassa, quina probabilitat hi ha que utilitzi també quètxup?

Exercici 9.

En una ciutat hi ha dos equips destacats, un de futbol i un altre de bàsquet. Tots els habitants de la ciutat són seguidors d'algun dels dos equips. Se sap que hi ha un 60% de seguidors de l'equip de futbol i un altre 60% de seguidors de l'equip de bàsquet. Si s'escull a l'atzar un habitant d'aquesta ciutat:

- a) Calculeu la probabilitat que sigui seguidors de tots dos equips
- b) Si se sap que és seguidor de l'equip de bàsquet, quina és la probabilitat que ho sigui també de l'equip de futbol?

Exercici 10.

En un club esportiu, el 52% dels socis són homes. Entre els socis, el 35% dels homes practica la natació, així com el 60% de les dones. Si triem un soci a l'atzar:

- a) Quina és la probabilitat que sigui un home que practica la natació?
- b) Quina és la probabilitat que practiqui la natació?
- c) Sabent que és una dona, quina és la probabilitat que nedi?
- d) Sabent que practica la natació, quina és la probabilitat que sigui una dona?

Exercici 11.

En un poble hi ha dos instituts, que anomenarem A1 i A2. En tots dos instituts es pot estudiar el batxillerat científic (que anomenarem B1) o l'humanístic (que anomenarem B2). Seleccionem un alumne a l'atzar i se sap que la probabilitat que pertanyi a l'institut A1 és de 0.3, la probabilitat que pertanyi a l'institut A2 és de 0.7. D'altra banda, la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut A1 és de 0.55, mentre que la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut A2 és de 0.59.

- a) Quina és la probabilitat que l'alumne estudiï el batxillerat científic?
- b) Quina és la probabilitat que estudiï a l'institut A1 si sabem que estudia el batxillerat científic?

Exercici 12.

En un grup de Batxillerat hi ha 10 nois i 8 noies. D'ells, 3 nois i 4 noies juguen a escacs.

Si trieu a l'atzar una persona d'aquest grup, determineu aquestes probabilitats:

- a) Que sigui noi i no jugui a escacs.
- b) Que no jugui a escacs sabent que és una noia.

Exercici 13.

Segons un estudi recent, el 52% dels joves europeus entre 18 i 25 anys estudia, el 58% treballa i un 32% simultanieja els seus estudis amb la feina. S'escull a l'atzar una persona d'aquest col·lectiu.

- a) Calcula la probabilitat que només estudiï.
- b) Determina la probabilitat que ni estudiï ni treballi.
- c) Si sabem que no treballa, quina probabilitat hi ha que estudiï?

Exercici 14.

Siguin A i B dos successos d'un experiment aleatori de manera que $P(A) = 0.7$ i $P(B) = 0.3$. Calcula raonadament $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$ en els casos següents:

- a) Si A i B són independents.
- b) Si $P(A|B) = 0.6$.

Exercici 15.

En Joan té tres maneres d'anar a la universitat. El 30% de les vegades va en autobús, el 20% en bicicleta i el 50% caminant. Quan va en autobús, arriba tard el 5% de les vegades; quan va en bicicleta, el 10%, i caminant, el 25%.

- a) Donat un dia qualsevol, quina és probabilitat que hi vaig en bici i arribi d'hora?
- b) Si avui ha vingut en bici, quina és probabilitat que arribi d'hora?
- c) Donat un dia en què arriba a temps, quina probabilitat hi ha que hi anés en bicicleta?

Exercici 16.

En un país fictici, sabem que el 60% dels acusats són en realitat culpables, mentre que la resta són innocents. Els jutges, però, s'equivoquen en un 1% dels veredictes. Quin tant per cent dels acusats són declarats culpables?

Exercici 17.

En una protectora d'animals tenim 65 gossos i 45 gats. Entre aquestes dues espècies, hi ha un total de 50 mascles i únicament tenen 20 gates. Obtingueu la probabilitat que, escollit un animal d'aquestes espècies a l'atzar, sigui:

- a) Gos mascle.
- b) Un gat, sabent que hem escollit un mascle.
- c) Femella, sabent que hem escollit un gos.

7 Distribucions de probabilitat

7.1 Distribució normal

Exercici 1.

Determineu les probabilitats següents en la distribució $N(0,1)$:

- a) $P(z \leq 1.26)$
- b) $P(z > 1.26)$
- c) $P(z < -0.24)$
- d) $P(0.21 \leq z \leq 1.35)$
- e) $P(-1.23 < z < 2.16)$

Solució.

- a) $P(z \leq 1.26) = 0.8962$
- b) $P(z > 1.26) = 0.1038$
- c) $P(z < -0.24) = 0.4052$
- d) $P(0.21 \leq z \leq 1.35) = 0.3283$
- e) $P(-1.23 < z < 2.16) = 0.8753$

Exercici 2.

Una variable aleatòria x segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 12$ i desviació típica $\sigma = 2$. Calculeu les següents probabilitats:

a) $P(x < 15)$

c) $P(0 \leq x \leq 14)$

b) $P(x \geq 10)$

Solució.

a) $P(x < 15) = 0.9332$

c) $P(0 \leq x \leq 14) = 0.7745$

b) $P(x \geq 10) = 0.8413$

Exercici 3.

Una màquina talla taps de suro naturals per a ampolles de vidre. S'ha comprovat que el diàmetre dels taps de suro segueix una distribució normal de mitjana 24mm i desviació típica 0.1mm.

a) Quina és la probabilitat que un tap de suro escollit a l'atzar tingui un diàmetre superior a 23.8mm?

b) El control de qualitat només accepta els taps de suro amb un diàmetre comprès entre 23.8 i 24.1 mm, i descarta la resta. Quin percentatge de taps de suro descartarà el control de qualitat?

Solució.

a) $x \sim N(24, 0.1)$. Considerem la variable tipificada $z = \frac{x-24}{0.1}$ aleshores $z \sim N(0, 1)$. Tipifiquem el valor 23.8: $\frac{23.8-24}{0.1} = -2$. Per tant tindrem:

$$P(x \geq 23.8) = 1 - P(x \leq 23.8) = 1 - P(z \leq -2)$$

Com el valor tipificat és negatiu haurem fer algun truc per passar-ho a positiu, ja que a la taula només tenim valors positius. Per simetria de la campana tenim:

$$P(z \leq -2) = P(z \geq 2)$$

Ara bé, com a la taula només tenim probabilitats cap enrera $z \leq$, fem el contrari:

$$P(z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2)$$

Ara substituïm a la primera equació:

$$P(x \geq 23.8) = 1 - P(z \leq -2) = 1 - (1 - P(z \leq 2)) = P(z \leq 2)$$

Aquest és un dels valors que cal saber de memòria i és 97.72%.

b) La probabilitat que un tap de suro sigui acceptat la calculem fent

$$P(23.8 \leq x \leq 24.1) = P(x \leq 24.1) - P(x \leq 23.8)$$

Ara tipifiquem aquests valor per trobar-los a la taula:

$$z_1 = \frac{24.1 - 24}{0.1} = 1$$
$$z_2 = \frac{23.8 - 24}{0.1} = -2$$

Com el segon valor és negatiu, hem d'aplicar simetries per obtenir l'equivalent positiu:

$$P(z < -2) = P(z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2)$$

Mirant a les taules tenim: $P(x \leq 24.1) = P(z \leq 1) = 0.8413$ i $P(x \leq 23.8) = 1 - P(z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$. Per tant el resultat serà:

$$P(23.8 \leq x \leq 24.1) = 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$$

S'acceptaran per tant el 81.85% dels taps i quedaran rebutjats $100 - 81.85 = 18.15$ el 18.15% dels taps.

Exercici 4.

La quantitat de cafè que dispensa una màquina de cafè segueix una distribució normal de mitjana 20 cl i variància 0.25cl^2 . Recordeu que la variància és el quadrat de la desviació típica (variància = σ^2)

- a) Determineu la probabilitat que la màquina dispensi un cafè entre 19 i 21 cl.
- b) Trobeu la capacitat mínima del got perquè només es vessi el cafè un 5% de les vegades.

Solució.

a) Tenim que $\mu = 20$ i $\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5$. Per tant, si z és la variable tipificada:

$$P(19 \leq x \leq 21) = P\left(\frac{19 - 20}{0.5} \leq z \leq \frac{21 - 20}{0.5}\right) = P(-2 \leq z \leq 2) = 0.9544$$

b) Ens demanen c de manera que $P(x \leq c) = 0.05$. Fent servir la variable tipificada z això és equivalent a

$$0.05 = P\left(z \leq \frac{c - 20}{0.5}\right) \rightarrow 0.95 = P\left(z \geq -\frac{c - 20}{0.5}\right) = 1 - P\left(z \leq -\frac{c - 20}{0.5}\right)$$

Mirant a la taula obtenim:

$$-\frac{c - 20}{0.5} = 1.65 \Rightarrow c = 19.175$$

La capacitat mínima del got haurà de ser de 19.175 ml.

7.2 Teorema central del límit

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ són variables aleatòries independents amb mitjanes $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ i desviacions típiques $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, aleshores, si n és prou gran, la suma d'aquestes variables aleatòries, $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ és propera a una llei normal de mitjana i desviació típica:

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\ \sigma &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}\end{aligned}$$

Exercici 1.

El pes de l'equipatge dels passatgers d'un avió es distribueix segons una llei normal de mitjana 20 Kg i una desviació típica de 4 Kg. Si la càrrega total per equipatges que admet l'avió és de 2100 Kg, quina és la probabilitat que se superi el pes límit quan viatgen 100 passatgers?

Exercici 2.

Per funcionar, una màquina necessita una vàlvula de la qual hi ha 300 unitats en existències. La durada de les vàlvules té una mitjana de 5 minuts i una desviació típica de 1 minut. Si s'avaria una vàlvula, és reemplaçada automàticament per una altra. Quina probabilitat té la màquina de funcionar durnat, com a mínim, 25 hores?

7.3 Intervals de confiança i distribució normal de la mitjana

Tenim una variable aleatòria, x , de mitjana μ i desviació típica σ . Ens preguntem per la mitjana d'una mostra de mida n (mitjana mostral). Aleshores:

- Si x segueix una llei normal $x \sim N(\mu, \sigma)$, aleshores la mitjana segueix una llei normal:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Si x **no** segueix una llei normal, aleshores, si n és **prou gran**, la mitjana també segueix una llei normal:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercici 1.

Una màquina s'encarrega d'omplir capsos de cereals. La quantitat de cereals dipositada a cada capsea segueix una distribució normal amb una desviació típica de 25 g. Quin hauria de ser el pes mitjà del contingut de les capsos si, e una ostra aleatòria de 100 capsos, la probabilitat que el pes mitjà sigui suïperior a 505 g és de 0.023?

Exercici 2.

L'estada a l'hospital és d'una mitjana de 6,5 dies i té una desviació típica de 2.5 dies.

- En una mostra aleatòria de 60 pacients, quina és la probabilitat que l'estada mitjana hospitalària no superi els 7 dies?
- Si la mostra hagués estat de 10 pacients, quines suposicions caldria haver fet per resoldre el problema?

Exercici 3.

Els envasos d'una marca determinada de iogurts indiquen que contenen de mitjana 150 grams de iogurt. Hem comprat deu iogurts, n'hem pesat el contingut i hem obtingut les dades següents (en grams)

148, 149, 147, 146, 149, 146, 149, 148, 149, 149.

- Construïu un interval de confiança del 95% per a la mitjana del pes dels iogurts, suposant que el pes segueix una distribució normal amb una desviació típica de 3 grams. (Recordeu que si Z segueix una distribució Normal $(0,1)$ la $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$.)
- A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior podem afirmar que la informació que hi ha a l'etiqueta és errònia? Justifiqueu la resposta.

Solució.

a) Segons la informació que ens donen l'interval de confiança pel 95% seria

$$[\mu_{\bar{x}} - 1.96 \cdot \sigma_{\bar{x}}, \mu + 1.96 \cdot \sigma_{\bar{x}}] = [144.12, 155.88]$$

on

$$\mu_{\bar{x}} = 150 \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

Substituint obtenim l'interval $[148.14, 151.85]$. És a dir, podem dir que la mitjana d'una mostra de mida 10 es trobarà dins aquest interval amb una confiança del 95%.

Per veure si la informació que ens han proporcionat és correcta, calculem la mitjana del pes dels iogurts que hem trobat:

$$\bar{x} = \frac{148 + 149 + 147 + 146 + 149 + 146 + 149 + 148 + 149 + 149}{10} = 148$$

Aquest valor es troba fora de l'interval que hem calculat. Per tant, podríem dir que, amb un error del 5% que la informació que ens han donat no és certa.

Exercici 4.

En una mostra aleatòria simple de 200 treballadors d'una multinacional es va trobar que el salari mitjà anual era de 25100 € amb una desviació típica de 3000 €. Construeix un interval de confiança per a la mitjana poblacional, és a dir, el salari mitjà de tots els treballadors, amb un 95% de nivell de confiança. Feu servir que $P(-1.96 < z < 1.96) = 0.95$ si $z \sim N(0, 1)$.

Solució.

El salari dels treballadors no té perquè seguir una normal. No obstant, com la mostra és prou gran, pel teorema central del límit la mitjana d'una mostra de mida 200 s'aproxima a una normal de mitjana $\mu_{\bar{x}} = 25100$ i desviació típica $\sigma_{\bar{x}} = \frac{3000}{\sqrt{200}} = 212.13$. L'interval de confiança del 95% per la mitjana d'una mostra de 200 treballador serà:

$$[25100 - 1.96 \cdot 212.13, 25100 + 1.96 \cdot 212.13] = [24684.22, 25515.77]$$

Exercici 5.

La producció, en quilograms, de taronges en una població mallorquina segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2kg. S'agafa una mostra de 10 tarongers la producció dels quals en quilograms és 30, 25, 4, 70, 45, 60, 21, 32, 9 i 47. Calcula un interval de confiança al 97% per estimar la producció mitjana de taronges per arbre. Feu servir que $P(-2.17 < z < 2.17) = 0.97$ si $z \sim N(0, 1)$.

Solució.

Sabem que la producció segueix una normal amb $\sigma = 2$ però en desconeixem la mitjana. Fem una estimació de la mitjana a partir de la mostra:

$$\mu = \frac{30 + 25 + 4 + 70 + 45 + 60 + 21 + 32 + 9 + 47}{10} = 34.3 \text{ Kg}$$

Així, un interval de confiança del 97% per la mitjana de taronges serà:

$$[34.3 - 2.17 \cdot 2, 34.3 + 2.17 \cdot 2] = [29.96, 38.64]$$

7.4 Distribució binomial

Exercici 1.

La probabilitat que una persona escollida a l'atzar tingui els ulls blaus és del 10%. Es tria a l'atzar una mostra de cinc persones.

- a) *Quina és la probabilitat que exactament dues persones tinguin els ulls blaus?*
- b) *Quina és la probabilitat que, almenys, una persona tingui els ulls blaus?*
- c) *Calculeu la mitjana i la desviació típica del nombre de persones amb ulls blaus d'aquesta mostra.*

Solució.

La variable aleatòria segueix una binomial $x \sim B(5, 0.1)$.

$$a) P(x = 2) = \binom{5}{2} 0.1^2 0.9^3 = 0.0729 \implies 7.29\%$$

$$b) P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^5 = 0.40951 \implies 40.95\%$$

$$c) \mu = 5 \cdot 0.1 = 0.5 \quad \sigma = \sqrt{5 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 0.6708$$

Exercici 2.

En una enquesta de satisfacció d'una companyia de fibra òptica, el 70% dels clients enquestats responen "molt satisfet" amb l'atenció rebuda, i la resta tria altres opcions diferents. En una mostra de 10 clients:

- a) *Quina és la probabilitat que exactament tres clients responguin amb l'opció "molt satisfet"?*

- b) Quina és la probabilitat que com a mínim dos clients escullin aquesta opció?
- c) Quina probabilitat hi ha que més de vuit clients responguin amb aquesta opció?

Solució.

$$a) P(x = 3) = \binom{10}{3} 0.7^3 \cdot 0.3^7 = 0.009 \Rightarrow 0.9\%$$

$$b) P(x \geq 2) = 1 - (P(x = 0) + P(x = 1)) = 1 - \left(\binom{10}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^9 \right) = 0.9998 \Rightarrow 99.98\%$$

$$c) P(x > 8) = P(x = 9) + P(x = 10) = \binom{10}{9} 0.7^9 \cdot 0.3 + \binom{10}{10} \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3^0 = 0.1493 \Rightarrow 14.93\%$$

Exercici 3.

Exemples PAU Els components electrònics produïts per una determinada empresa són defectuosos amb una probabilitat de 0.01. L'empresa ven els components en paquets de 10 i es compromet a retornar els diners si el paquet conté 2 o més components defectuosos.

- a) Calculeu la probabilitat que et retornin els diners si compres un paquet de components.
- b) Una persona ha comprat 3 paquets de components, quina és la probabilitat que li retornin els diners de, com a mínim, un dels paquets?

Solució.

$$a) 0.0043$$

$$b) 0.0128$$

7.5 Interval de confiança d'una proporció

Exercici 1.

En una mostra de 100 persones es va trobar que 8 eren esquerranes. Calcula la veritable proporció de la població trobant una estimació puntual i per interval de confiança a 90%. Després calcula els intervals de confiança al 95% i al 99% i compara'ls amb l'inicial. Feu servir que $P(-1.645 < z < 1.645) = 0.90$, $P(-1.96 < z < 1.96) = 0.95$, $P(-2.17 < z < 2.17) = 0.97$ i que $P(-2.575 < z < 2.575) = 0.99$ si $z \sim N(0, 1)$.

Solució.

[0, 0354; 0, 1246] al 90%, [0, 0269; 0, 1331] al 95%, [0, 0101; 0, 1499] al 99%

Exercici 2.

En una determinada ciutat es vol conèixer la proporció actual de llars amb més d'un automòbil. Amb aquesta finalitat s'elabora una mostra de 300 llars i resulta que en 120 hi ha més d'un automòbil. Construeix un interval de confiança per a la proporció de llars amb aquesta condició, a un nivell de confiança del 95%. Feu servir que $P(-1.96 < z < 1.96) = 0.95$ si $z \sim N(0, 1)$.

Solució.

[0.3446; 0.4554]

Exercici 3.

Volem conèixer el percentatge de persones que parlen anglès en una població determinada. Prenem una mostra aleatòria de 500 persones de les quals resulta que 189 parlen anglès.

- Doneu l'estimació puntual de la proporció i del percentatge de persones que parlen anglès en aquella població.
- Escriviu un interval de confiança del 95% per al percentatge de persones que parlen anglès en aquella població. (Recordeu que si z segueix una distribució Normal $(0, 1)$ aleshores $P(-1.96 \leq z \leq 1.96) = 0.95$.)

Solució.

- Una estimació per p serà calcular la proporció a partir de la mostra: $p = \frac{189}{500} = 0.378$. Així, l'estimació de la proporció de persones que parlen anglès és del 37.8%.
- Com que la mida és gran, $500 > 30$, podem assumir que la proporció d'una mostra segueix una normal $\hat{p} \sim N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$. Com no tenim la p de la població, fem servir

l'estimació a partir de la mostra. Així, un interval de confiança del 95% per la proporció de la població serà:

$$\left[0.378 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.378 \cdot (1 - 0.378)}{500}}, 0.378 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.378 \cdot (1 - 0.378)}{500}} \right] = [0.3355, 0.4205]$$

Així, el percentatge del persones que parlen anglès a tota la població podem dir que es troba entre el 33.55% i el 42.05% amb una confiança del 95%.

Exercici 4: PAU Juny 2024 n° 4.

Diem que una matriu és màgica si la suma dels elements de cada fila i de cada columna té com a resultat en tots els casos el mateix valor, que s'anomena constant màgica. El Martí ha trobat una manera de crear matrius màgiques triant tres nombres qualsevol i multiplicant-los per les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El Martí proposa als seus amics que cadascú construeixi la seva matriu màgica particular a partir del dia del seu aniversari, del mes del seu aniversari i de la seva edat.

a) *Sabent que el Martí va néixer el 10 de març i que té 18 anys, calculeu*

$$10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C.$$

Comproveu que la matriu resultant és màgica i indiqueu quina és la seva constant màgica (el valor comú de la suma de les files i les columnes).