

Dossier d'exercicis

Tema 5: vectors

4^{rt} ESO

Curs 2025-2026

Nom i Cognoms: _____

Índex

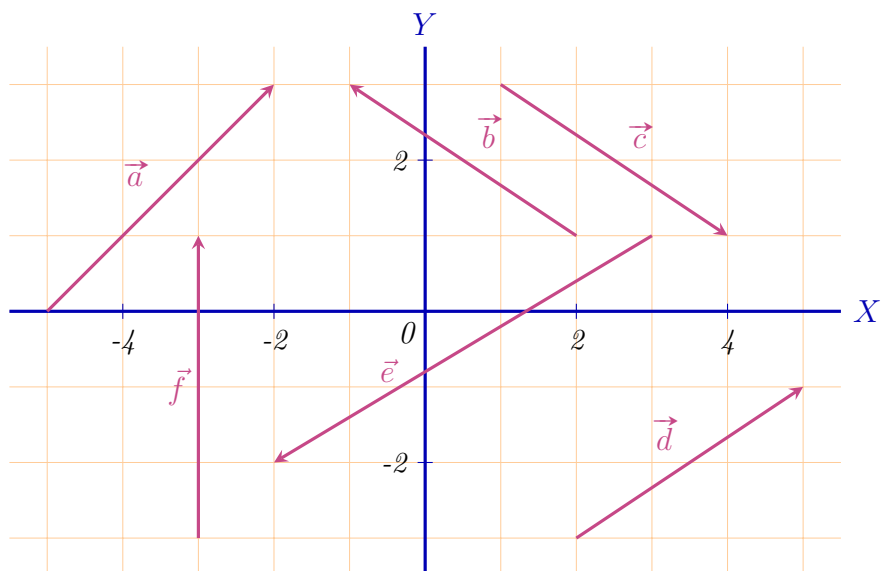
1	Coordenades de vectors	3
	<i>Exercici: 1</i> Extrem menys origen	3
	<i>Exercici: 2</i> Operacions analítiques	4
	<i>Exercici: 3</i> Desplaçament d'un punt	4
2	Vectors i angles	5
	<i>Exercici: 4</i> Components gràfiques	5
	<i>Exercici: 5</i> Mòdul i argument	6
	<i>Exercici: 6</i> Simetries i girs	7
	<i>Exercici: 7</i> Problema de navegació	8
	<i>Exercici: 8</i> Vèrtexs d'un triangle	10
	<i>Exercici: 9</i> Càlcul d'angle per mòduls	10
3	Vectors "paral·lels"	11
	<i>Exercici: 10</i> Vectors paral·lels	11
	<i>Exercici: 11</i> Paràmetre k	11
4	Polígons i rutes	11
	<i>Exercici: 12</i> Ruta excursionista	11
	<i>Exercici: 13</i> Hexàgon	13
	<i>Exercici: 14</i> Quart vèrtex	13
	<i>Exercici: 15</i> Distàncies i recorreguts	14
	<i>Exercici: 16</i> Àrea i perímetre	14
5	Punts mitjos, etc	15
	<i>Exercici: 17</i> Punt mig	15
	<i>Exercici: 18</i> Punts a certa distància	15

<i>Exercici: 19</i> Extrem d'un segment	16
<i>Exercici: 20</i> Triangle isòsceles	16
<i>Exercici: 21</i> Teorema del punt mig	17
Solució: 1	17
Solució: 2	17
Solució: 3	18
Solució: 4	18
Solució: 5	18
Solució: 6	18
Solució: 7	18
Solució: 8	19
Solució: 9	19
Solució: 10	19
Solució: 11	19
Solució: 12	19
Solució: 13	19
Solució: 14	19
Solució: 15	19
Solució: 16	19
Solució: 17	20
Solució: 18	20
Solució: 19	20
Solució: 20	20
Solució: 21	20

1 Coordenades de vectors

Exercici 1: Extrem menys origen

Trobeu le coordenades dels següents vectors



Exercici 2: Operacions analítiques

Considereu els següents vectors:

$$\vec{v} = (-1, 3) \quad \vec{u} = \left(-1, \frac{3}{2}\right) \quad \vec{w} = (1, -2)$$

Calculeu:

a) $2\vec{u} - 3\vec{w} - \frac{1}{4}\vec{v} =$

b) $\frac{1}{3}\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w} =$

c) $-\vec{u} + 3\vec{w} - \vec{v} =$

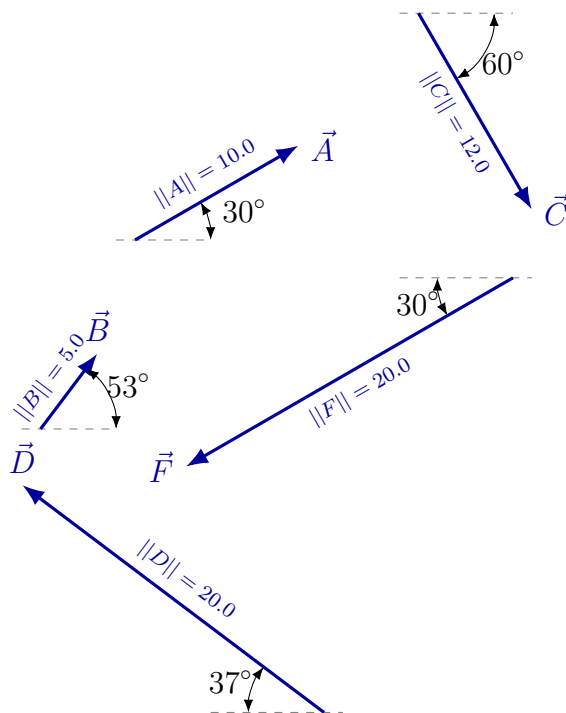
Exercici 3: Desplaçament d'un punt

Situats al punt $A = (-2, -3)$ apliquem el desplaçament imposat pel vector $\vec{v} = (3, -1)$. A quin punt acabarem?

2 Vectors i angles

Exercici 4: Components gràfiques

Trobeu de manera exacta (en el cas dels angles notables) les coordenades dels vectors de la figura.



Exercici 5: Mòdul i argument

Trobeu les coordenades dels vectors que compleixen el següent. En cas dels angles notables doneu les coordenades de manera EXACTA (sense decimals)

a) Té mòdul 2 i forma un angle amb l'eix d'abscisses de 150° .

b) Té mòdul $\frac{1}{3}$ i forma amb l'eix d'abscisses un angle de 330° .

c) Té mòdul $\frac{3}{2}$ i forma amb un angle de 210° amb l'eix d'abscisses.

Exercici 6: Simetries i girs

Considereu els següents vectors:

$$\vec{v} = (3, 2) \quad \vec{w} = (-2, 1)$$

Trobeu el següent:

a) *Els vectors simètrics a $\vec{v}$ i $\vec{w}$ respecte l'eix d'ordenades.*

b) *Els vectors simètrics a $\vec{v}$ i $\vec{w}$ respecte l'eix d'abscisses.*

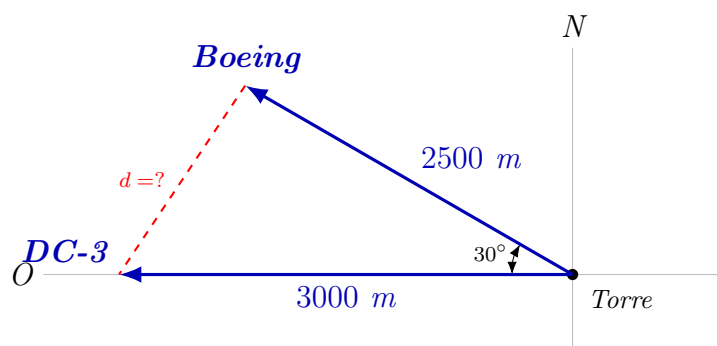
c) *L'angle que formen els vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ amb l'eix d'abscisses.*

d) L'angle que formen els vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ entre ells.

e) Trobeu les coordenades dels vectors $\vec{v}'$ i $\vec{w}'$ que s'obtenen girant els vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ 90° en sentit antihorari.

Exercici 7: Problema de navegació

A la torre de control d'un aeroport regional, un controlador aeri monitora dos avions que volen a la mateixa altitud. El Boeing es troba a una distància horitzontal de 2500 m de la torre, en una direcció de 30° al Nord de l'Oest. El DC-3 es troba a una distància de 3000 m de la torre, situat directament a l'Oest.



(a) *Escriu les coordenades (de manera exacta, sense decimals) dels vectors de posició de cada avió respecte a la torre de control.*

(b) *Calcula la distància exacta que separa els dos avions en aquest instant.*

Exercici 8: Vèrtexs d'un triangle

Els punts $A = (3, 5)$ i $B = (1, 5)$ són dos vèrtexs d'un triangle equilàter. Trobeu les coordenades dels dos possibles vèrtexs C i C' del triangle.

Exercici 9: Càlcul d'angle per mòduls

De dos vectors sabem que $|\vec{v}| = 5$ i que $|\vec{u}| = 4$, trobeu l'angle entre ells sabent que $|\vec{v} + \vec{u}| = 3$.

3 Vectors “paral·lels”

Exercici 10: Vectors paral·lels

Dels següents vectors digueu quins tenen la mateixa direcció:

a) $\vec{v} = (2, -1)$

e) $\vec{s} = (\frac{3}{2}, -1)$

b) $\vec{w} = (-2, -1)$

f) $\vec{a} = (10, -5)$

c) $\vec{t} = (3, -2)$

g) $\vec{b} = (-1, \frac{2}{3})$

d) $\vec{r} = (4, -2)$

Exercici 11: Paràmetre k

Calcula el valor del paràmetre k per tal que els vectors $\vec{u} = (k, -2)$ i $\vec{v} = (3, 4)$ tinguin la mateixa direcció

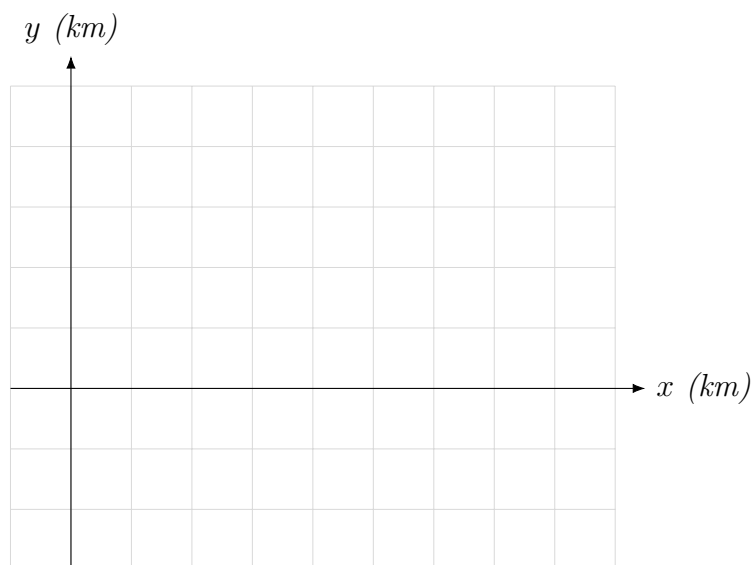
4 Polígons i rutes

Exercici 12: Ruta excursionista

*Un grup d'excursionistes planifica una ruta que surt del **Refugi Base (A)**, el qual*

considerarem l'origen de coordenades $(0,0)$. L'excursió es divideix en tres trams rectilinis consecutius:

(a) Dibuixa el diagrama de la trajectòria al següent sistema de coordenades cartesià.



(b) Calcula la **distància total** recorreguda pels excursionistes.

(c) Determina el **vector desplaçament** total ($\vec{R}$) des del punt de sortida fins al punt final, així com el seu mòdul.

Exercici 13: Hexàgon

Els punts $A = (3, 1)$, $B = (1, 5)$, $C = (3, 9)$, $D = (7, 9)$, $E = (9, 5)$ i $F = (7, 1)$ són els vèrtexs d'un hexàgon. Digueu si es tracta d'un hexàgon regular o no.

Exercici 14: Quart vèrtex

Tenim tres vèrtexs consecutius d'un rectangle $ABCD$: els punts són $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ i $C(5, 5)$.

a) Calcula les coordenades dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

b) Utilitzant la igualtat de vectors (sabem que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$), troba les coordenades del quart vèrtex D .

Exercici 15: Distàncies i recorreguts

Un robot es desplaça per un magatzem seguint una ruta marcada per tres punts. Surt del punt $P(2,1)$, va fins al punt $Q(6,4)$ i, finalment, es dirigeix al punt $R(6,-2)$.

a) Troba els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ que representen cada desplaçament.

b) Calcula la distància que ha recorregut en cada tram (els mòduls dels vectors).

c) Quina és la distància total recorreguda pel robot?

Exercici 16: Àrea i perímetre

Els punts $A(-2,1)$, $B(2,1)$ i $C(2,4)$ formen part d'un rectangle.

a) Troba les coordenades del quart vèrtex D .

b) *Calcula el perímetre i l'àrea del rectangle.*

5 Punts mitjos, etc

Exercici 17: Punt mig

Considereu els punts $A = (-1, 1)$ i $B = (3, -2)$. Trobeu les coordenades del punt mig del segment AB .

Exercici 18: Punts a certa distància

Trobeu les coordenades exactes dels dos punts que es troben a distància 2 del punt $(1, 3)$ en la direcció del vector $(1, 3)$.

Exercici 19: Extrem d'un segment

D'un segment, AB sabem que $A = (2, 0)$ i que el seu punt mig és el punt $(3, -4)$. Trobeu les coordenades el punt B .

Exercici 20: Triangle isòsceles

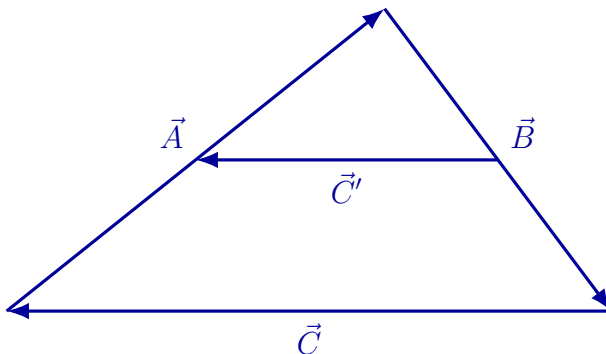
Considereu els punts $A = (2, 1)$, $B = (6, 1)$ i $C = (4, 5)$

a) Comproveu que es tracta d'un triangle isòscel·les.

b) Trobeu el seu perímetre i la seva àrea.

Exercici 21: Teorema del punt mig

La següent figura mostra un triangle format per tres vectors: $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$. El vector $\vec{C}'$ surt dels punts mitjos dels vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Demostreu que $\vec{C}' = \frac{1}{2} \cdot \vec{C}$.



Solucions

Solució 1.

1. $\vec{a} = (3, 3)$
2. $\vec{b} = (-3, 2)$
3. $\vec{c} = (3, -2)$
4. $\vec{d} = (3, 2)$
5. $\vec{e} = (-5, -3)$
6. $\vec{f} = (0, 4)$

Solució 2.

- a) $\left(-\frac{19}{4}, \frac{33}{4}\right) = (-4.75, 8.25)$
- b) $\left(-\frac{22}{3}, \frac{35}{2}\right) \approx (-7.33, 17.5)$
- c) $\left(5, -\frac{21}{2}\right) = (5, -10.5)$

Solució 3.

$$A' = (1, -4)$$

Solució 4.

- $\vec{A} = (5\sqrt{3}, 5)$
- $\vec{B} \approx (-3, 4)$
- $\vec{C} = (6, -6\sqrt{3})$
- $\vec{D} \approx (-16, -12)$
- $\vec{F} = (-10\sqrt{3}, -10)$

Solució 5.

a) $\vec{v} = (-\sqrt{3}, 1)$

b) $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{6}\right)$

c) $\vec{v} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

Solució 6.

a) $\vec{v}' = (-3, 2), \vec{w}' = (2, 1)$

b) $\vec{v}' = (3, -2), \vec{w}' = (-2, -1)$

c) $\alpha_v \approx 33.69^\circ$ i $\alpha_w \approx 153.43^\circ$.

d) $\alpha \approx 119.74^\circ$.

e) $\vec{v}' = (-2, 3)$ i $\vec{w}' = (-1, -2)$.

Solució 7.

(a) $\vec{B} = (-1250\sqrt{3}, 1250), \vec{D} = (-3000, 0)$.

(b) $d = 500\sqrt{61 - 30\sqrt{3}}$ m.

Solució 8.

$$C = (2, 5 + \sqrt{3}) \text{ i } C' = (2, 5 - \sqrt{3}).$$

Solució 9.

$$\alpha \approx 143.13^\circ$$

Solució 10.

Són paral·lels: $\vec{v}$, $\vec{r}$, $\vec{a}$.

Solució 11.

$$k = -1.5$$

Solució 12.

(a) (Veure gràfica)

(b) Distància total = 16 km.

(c) $\vec{R} = (8, -2)$, $|\vec{R}| = 2\sqrt{17}$ km.

Solució 13.

No

Solució 14.

a) $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 3)$.

b) $D = (1, 5)$.

Solució 15.

a) $\overrightarrow{PQ} = (4, 3)$, $\overrightarrow{QR} = (0, -6)$.

b) $|\overrightarrow{PQ}| = 5$, $|\overrightarrow{QR}| = 6$.

c) Distància total = 11.

Solució 16.

a) $D = (-2, 4)$.

b) Perímetre = 14 u. Àrea = 12 u².

Solució 17.

$$M = (1, -0.5).$$

Solució 18.

$$Q_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{5}, 3 + \frac{3\sqrt{10}}{5}\right) \text{ i } Q_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}, 3 - \frac{3\sqrt{10}}{5}\right).$$

Solució 19.

$$B = (4, -8).$$

Solució 20.

a) Sí, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{20}$.

b) Perímetre = $4 + 4\sqrt{5}$. Àrea = 8 u².

Solució 21.

Demostració teòrica (veure apunts).