Apunts (incomplets) de matemàtiques 1r Batxillerat

Albert Granados

Sobre l'autor

Albert Granados és llicenciat en matemàtiques i enginyer industrial per la Universitat Politècnica de Catalunya. És doctor en matemàtiques (UPC). Durant 10 anys s'ha dedicat a la recerca en diferents departaments de matemàtiques d'universitats i centres de recerca europeus: a la Universitat d'Stuttgart, a l'Inria (París) a la Universitat Tècnica Danesa (Copenhagen) i a la Universitat Politècnica de Catalunya. La seva recerca ha estat finançada amb beques pre i post-doctorals com: "La Caixa", DAAD, Marie-Curie, Ørsted i Beatriu de Pinós.
Actualment és professor de matemàtiques de secundària i batxillerat a l'institut Pere Vives i Vich d'Igualada.

Índex

Capítol 1

Successions

1.1 Definicions bàsiques

Una successió és un *conjunt* d'elements *ordenats* que on en tenim tants com els nombres naturals. Aquests elements s'anomenen **termes de la successió**. Tota successió té un primer terme, i després de cadascun sempre n'hi ha un de *següent*. Per exemple, els següents conjunt són successions:

$$a \longrightarrow 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$
$$b \longrightarrow 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \ldots$$

on els punts suspensiu indiquen que la successió segueix indefinidament.
Fixem-nos que no sabem del cert com aquestes dues successions continuen, però tot fa pensar que la primera successió és la successió de nombre parells, i la segona són els dígits del nombre π.
Els elements de les successions es poden anomenar, és a dir, donar-los un nom per tal de referir-nos-hi. El primer que fem és donar nom a tota la successió, i després afegir un subíndex per referir-nos a cadascun dels termes que la formen. Per exemple, si anomenem a la primera successió, els primers 4 termes seran

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$
$$a_3 = 6$$
$$a_4 = 8$$

i així *successivament*. En matemàtiques, sovint es diu que el primer terme és el terme a_0 (començant pel 0), però és més una qüestió estètica; per comoditat, nosaltres ens referirem al primer element com a_1.
Evidentment, podem fer el mateix amb la segona successió, b, però entre les dues hi ha una gran diferència. Ens preguntem si, sense trobar tots els termes anteriors, existeix alguna manera de trobar el terme que fa 1000. Pel que fa a la primera successió, si ho pensem un moment, el terme que fa 1000 serà el el 2000,

$$a_{1000} = 2000$$

Però en canvi, per calcular b_{1000} s'han de calcular els 999 dígits anteriors del nombre π. Tot i que existeixen maneres per fer-ho (bastant complicades per cert), no existeix una fórmula per calcular el terme que vulguem. Això fa que el nombre de dígits coneguts del nombre π sigui finit.

Si una successió *té fórmula*, diem que podem calcular-ne el **terme general**, cosa que escriurem com a_n. Si ho pensem un moment, el terme general de la primera successió és

$$a_n = 2n$$

El terme general l'hem d'entendre com una expressió que depen d'una mena de *variable* que només pot prendre valors naturals. Típicament, les variables enteres o naturals se'ls dóna el nom de n enlloc de x, tot i que també és comú fer servir les lletres i, j, k, l o m. Avaluant l'expressió per $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ etc anirem obtenint el primer, segon, tercer termes de la successió. Fixem-nos que, si avaluem l'expressió per $n = 1000$ obtindrem el terme que fa 1000 sense necessitat de conèixer tots els anteriors. Per tant, aquesta expressió ens permet trobar qualsevol element simplement avaluant; a l'expressió també se la sol anomenar **terme n-èssim** (terme *enèssim*), ja que és el terme que fa n.

Una altra manera de definir una successió és mitjançant una **relació de recurrència**. És a dir, una relació (normalment una fórmula) que relaciona cada element amb els anteriors. Per exemple, la relació

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$$

ens defineix una successió tal que cada terme és el producte dels dos anteriors. Fixem-nos necessàriament hem de donar el valor dels dos primer termes per tal de començar calculant el tercer.
Ens podem preguntar el següent, donada una relació de recurrència, podem trobar el terme general? Doncs en general és problema bastant difícil, tot i que existeixen algunes tècniques estàndards per fer-ho: la **Transformada Z** o **polinomi característic**.

1.2 Algunes succions famoses

1.2.1 Successions aritmètiques

S'obtenen sumant a cada terme una certa fixa anomenada d **diferència** per tal d'obtenir el següent. És a dir, compleixen la següent relació de recurrència:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

El seu terme general es pot trobar fàcilment com

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Una de les "gràcies" de les successions aritmètiques és que existeix una fórmula senzilla per sumar explícitament els n primers termes de la successió:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots a_{n-1} + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Aquesta fórmula és famosa perquè la va trobar C.F. Gauss a l'edat de 9 anys pel cas $d = 1$, simplement fixant-se que, si se suma el primer terme amb l'últim, el segon amb el penúltim, sempre s'obté el mateix valor. La fórmula es dedueix fàcilment canviant doncs l'ordre de la suma.

1.2.2 Successions geomètriques

Les successions geomètriques són aquelles en què cada element s'obté multiplicant l'anterior per una certa quantitat, r, anomenada **raó**. Estableixen doncs la següent relació de recurrència:

$$a_n = r \cdot a_{n-1}$$

També es pot trobar fàcilment el terme general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

i també es té una fórmula per tal d'obtenir la suma dels n primers termes:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Les successions geomètriques tenen propietats interessants segons el valor de r. Si $|r| < 1$, els termes de la successió *es fan fent petits* en valor absolut, mentre que si $r > 1$, aquesta *no està fitada* (creix descontroladament). A més, quan $0 < r < 1$, els termes de la successió es poden sumar fins l'infinit, i es té com a resultat:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots =$$
$$= a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \cdots = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } 0 < r < 1$$

1.2.3 La successió de Fibonacci

De successions n'hi ha moltes i de molts tipus. Segurament, la successió mes famosa de totes és la dels nombre de **Fibonacci**, també coneguda com **Successió de Fibonacci**, i és la següent:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

En aquesta successió, cada element ve donat per la suma dels dos anteriors. Per tant, per tal de poder seguir, s'ha de començar donant els dos primer termes. En aquest cas són $a_1 = 1$ i $a_2 = 1$, però podrien ser qualsevol nombre.

Fibonacci (Leonardo de Pisa) va nèixer a Pisa l'any 1170. Va ser uns dels impulsors del nombre aràbics, que són els que avui en dia utilitzem, en front els ferragosos nombres romans. La successió de Fibonacci té el seu origen en un problema relacionat amb la població de conills. No obstant, deu la seva a fama principalment a dos motius:

- Existeixen a la natura diferents elements que, almenys pels primers termes, segueixen la successió de Fibonacci, sobretot aquells als quals hi apareixen espirals, com per exemple als girasols, pinyes, cargols, etc

- La successió de Fibonacci està relacionada amb el **nombre d'Or** o **raó àrea**:

  $$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

  Aquest nombre és especial per diferents motius

  - apareix tant en qüestions estètiques (relació entre els costats de les targetes, a les piràmides d'Egipte, al Partenó, en diferents quadres com les Menines, la Gioconda, l'últim sopar, etc).
  - A més, matemàticament, aquest nombre és especial perquè no només és irracional, sinó que el nombre *més irracional de tots* ja que és el que pitjor s'aproxima per fraccions contínues:

    $$\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

1.3 Comença la teca: més definicions i propietats

Considerem a_n una successió que comença amb $n = 1$. Diem que

1. Una successió a_n és **creixent** tot element de la successió és més gran que l'anterior. De manera més precisa podem dir que a_n és creixent si

   $$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

(a_n és més petit que a_{n+1} per tot n més gran o igual que 1). Per exemple, la successió $a_n = n^2$ és creixent, ja que

$$0 < 1 < 4 < 9 < 16 < 25 < \dots$$

De fet això ho podríem demostrar:

$$a_n < a_{n+1} \Longleftrightarrow n^2 < (n+1)^2 \Longleftrightarrow \cancel{n^2} < \cancel{n^2} + 2n + 1 \Longleftrightarrow 0 < 2n + 1$$

cosa que és certa per tot $n \geq 0$.

2. Diem que la successió a_n és **decreixent** si tot element és més petit que l'anterior. Fent servir un llenguatge més matemàtic podem dir que a_n és decreixent si

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

(a_n és més gran que a_{n+1} per tot n més gran o igual que 1). Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ és decreixent, ja que

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

De fet també ho podríem demostrar:

$$a_n > a_{n+1} \Longleftrightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2},$$

cosa que és certa si $n > 1$.

3. Diem que una successió és **monòtona** si és creixent o decreixent. Per exemple, les dues successions anteriors són monòtones, però la successió $a_n = (-2)^n$ no ho és, perquè és oscil·lant:

$$1 > -2 < 4 > -8 < 16 > -32 < 64 \dots$$

4. Diem que M és **el màxim** d'una successió hi ha algun valor de la successió que iguala M però en canvi tota la resta de termes de la successió és més petita o igual. També podem dir simplement que el **màxim** és el valor més "gran" de la successió.
De manera més matemàtica podem dir que M és el màxim una successió si

$$\exists\, j \text{ t.q. } a_j = M \text{ i } a_n \leq M,\ \forall n \neq j.$$

(el terme j-èssim de la successió és igual a M però tota la resta de termes és més petita o igual que M).
Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no té màxim perquè cada element és més gran que l'anterior (és creixent), però la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que en té, i és $M = 1$ (el primer element de la successió).

5. Diem que m és el **mínim** d'una successió si existeix un valor de la successió que iguala a m però en canvi tots els altres termes són més grans o iguals que m. Dit d'una altra manera, el mínim és el valor més petit d'una successió.
Dit d'una manera més matemàtica, direm que m és el mínim d'una successió si

$$\exists\, j \text{ t.q. } a_j = m \text{ i } a_n \geq m,\ \forall n \neq j$$

(el terme j-èssim és igual a m i tota la resta de termes són més grans o iguals).
Per exemple, la successió $a_n = n^2$ té com a mínim $m = 0$ (el primer valor de la successió), però la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ no té mínim, perquè cada element de la successió és més petit que l'anterior.

6. Diem que K és una **fita superior** si tots els termes de la successió són més petits o iguals que K. Dit d'una altra manera, K és una fita superior si no hi ha cap element de la successió que sigui més gran que K.
   Dit d'una manera més matemàtica, K és una fita superior de la successió a_n si

   $$K \geq a_n, \forall n > 0.$$

   Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no té cap fita superior perquè creix "tant com es vulgui". De fet ho podríem demostrar: suposem que K és una fita superior. Per tant tindríem que $K > n^2$ per qualsevol n. Però si prenem $n > \sqrt{K}$ aleshores tindrem que $n^2 > K$, i per tant no pot tenir una fita superior. En canvi, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que en té, per exemple $K = 1$ és una fita superior, i $K = 2$ també. Fixem-nos que la fita superior no és única. De fet, si n'existeix una, qualsevol valor més gran també serà un fita superior.

7. De manera similar, direm que k és una **fita inferior** si tots els termes de la successió són més grans o iguals que k. D'una manera més matemàtica podem dir que k és un fita inferior si si es compleix

   $$k < a_n, \forall n \geq 0.$$

   La successió $a_n = n^2$ té 0 com a fita inferior, i -1 també, i $a_n = \frac{1}{n+1}$ té com a fita inferior $k = 0$, i $k = -10$. En canvi, la successió $a_n = -n^2$ no té fita inferior. Fixem-nos també que la fita inferior no és única, ja que, si n'existeix una, qualsevol valor més petit també serà una fita inferior.

8. Diem que una successió **està fitada** si té fita inferior i superior. Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no està fitada perquè no té cap fita superior, però $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que ho està.

9. Diem que S és el **suprem** d'una successió si S és la més petita de les fites superiors. Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ té $S = 1$ (que coincideix amb el seu màxim), i la successió $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ té $S = 2$. Però en canvi la successió $a_n = n^2$ no té suprem, perquè no té cap fita superior.

10. De manera similar diem que I és l'**ínfim** d'una successió si I és la més gran de les fites inferiors. Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ té ínfim $I = 0$, ja que és decreixent i els elements de la successió s'apropen a 0 tant com es vulgui. Observeu que en canvi no té mínim, i que qualsevol nombre > 0 no pot ser ínfim perquè, fent n prou gran, segur que el passem: per quelsvol $I > 0$ existeix n_0 tal que $a_n < I$ si $n > n_0$.

1.4 Propietats generals

Una successió qualsevol (no necessàriament monòtonona) té les següents propietats:

- Si una successió té màxim, aleshores està fitada superiorment i té suprem.
- Si una successió té mínim, aleshores està fitada inferiorment i té ínfim.

1.5 Algunes propietats de les successions monòtones

- Una successió creixent no té màxim
- Una successió decreixent no té mínim
- Una successió creixent fitada superiorment té suprem i, a més, aquest és el seu límit
- Una successió decreixent fitada inferiorment té ínfim i, a més, aquest és el límit

1.6 Límits de successions

1.6.1 Límit d'una successió

Dit d'una manera col·loquial, diem que una successió té límit si, en fer créixer n, el valor que obtenim s'apropa **tant com vulguem** a un valor. Diem que aquest valor n'és el límit. Dit d'una manera una mica més precisa, direm que una successió a_n té límit ρ si, **a partir d'un cert** n, la diferència $|a_n - \rho|$ es pot fer **tant petita com vulguem**. Finalment, la definició més rigorosa de límit és la següent:

Definició. *Diem que ρ és el límit de la successió a_n si, per $\forall\varepsilon > 0$ (per petit que sigui) $\exists n_0$ tal que*

$$|a_n - \rho| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Ho escriurem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \rho,$$

i es llegeix de la següent manera: el límit de la successió a_n quan n tendeix a infinit és ρ (ro).

La definició anterior es llegeix, textualment, de la següent manera:

Definició. *Diem que ρ és el límit de la successió a_n si per qualsevol valor ε positiu (per petit que sigui) existeix un valor n_0 de manera que, per qualsevol altre valor de n més gran que n_0, la diferència entre a_n i ρ (en valor absolut) és més que petita que el valor que ens havíem proposat (ε).*

Alternativament la podem llegir de la següent manera:

Definició. *Diem que ρ és el límit d'una successió a_n, a partir d'un valor de n prou gran, els termes queden sempre tant a prop de ρ com vulguem.*

Fixem-nos que el fet que distància d'una successió al seu límit es pugui fer tant petita com es vulgui no implica que la successió assoleixi aquell valor. De fet, això no passarà mai: al límit ens hi apropem tant com vulguem però no hi arribem mai, mai.

Exemple 1.6.1. *Considerem la successió*

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Si ens la mirem bé, aquesta successió consisteix en sumar al valor 1 una quantitat cada vegada més petita i per tant, si té límit, aquest haurà de ser 1. En efecte, quant més gran sigui el valor de n, més petit serà el resultat $\frac{1}{n}$ i per tant, en sumar 1, la successió s'apropará a 1 cada vegada més. Amb això aclarit, podem il·lustrar la definició rigorosa de límit de la següent manera. Agafem un valor ben petit i mirem si, a partir d'un cert valor de n, la successió queda sempre a una distància més petita que aquest valor. Escollim per exemple $\varepsilon = 10^{-10}$. Fixem-nos que, si escollim n_0 i considerem $n > n_0$ aleshores el que sumem a 1 és més petit que 10^{-10}. Per tant, podem dir que

$$|a_n - 1| < 10^{-10}, \forall n > 10^{10}.$$

De fet, això ho podem fer per qualsevol valor de ε tant petit com vulguem, només caldrà augmentar el valor mínim de n (n_0).

1.6.2 Càlcul de límits

A la pràctica, la definició matemàtica de límit anterior no resulta gens còmode per calcular el límit d'una successió. El més còmode és fer-ho com ho faria un "enginyer"; és a dir, pensem que donem un valor més gran a n, el més gran possible, i mirem què passa. Encara més, per què no fem $n = \infty$ directament? Doncs això és el que resulta més pràctic a l'hora de resoldre límits. Encara que ∞ no sigui cap número i de fet escriure $n = \infty$ no tingui cap sentit, pot resultar ser molt còmode. Ara bé, caldrà anar molt amb compte operant amb ∞. Vegem unes quantes situacions en les que ens podem trobar si substituïm n per ∞ en una successió:

a) $\infty + \infty \to \infty$

b) $\infty \cdot \infty \to \infty$

c) $\infty^{\infty} \to \infty$

d) $\frac{K}{\infty} \to 0$. Això és important tenir-ho clar. Si K és un nombre qualsevol, per més gran que sigui aquest, en dividir-ho per una cosa descontrol·ladament gran, obtindrem un valor cada vegada més proper a 0. Per exemple, imaginem que repartim una pizza que pesa 10^{10}Kg. Clarament, quants més siguem menys ens tocarà, però podríem pensar que pesa tant que sempre ens tocarà prou a cadascú. No obstant, podria arribar un moment en que siguem molts, moltíssims, tants com $10^{\left(10^{10}\right)^{\left(10^{10}\right)}}$. Mireu bé on són els parèntesis, aquest nombre té molts, molts zeros... En aquest cas ja ens toca ben poqueta pizza... Doncs el que hem de pensar és que aquest nombre, per gran que sigui, serà infinitament petit comparat amb l'infinit. Resumint, qualsevol nombre, per gran que sigui, dividit entre ∞ a la pràctica serà 0.

e) $\frac{K}{0} \to \pm\infty$. En efecte, si repartim una certa quantitat (K) entre uns quants, quant menys siguem més ens tocarà. Si tenim a ser 0, ens tocarà ∞ a cadascú. Ara bé, cal anar en compte amb els signes! D'una banda tenim que K pot ser negativa, però de l'altra, el denominador pot tendir a 0 sent negatiu o bé positiu. Això ens portarà a diferents combinacions que decidiran si el límit és ∞ o bé $-\infty$. Aquesta situació la tractarem en més detall al tema de funcions.

f) $\frac{\infty}{0} \to \pm\infty$. Aquesta és una situació curiosa. Com es tracta d'una divisió, podem raonar de la següent manera. D'una banda quant més tinguem a repartir (major sigui el numerador) més ens tocarà, i, de l'altra, quants menys siguem, encara ens tocarà més a cadascú. Per tant, una successió que ens porti a aquest resultat serà clarament divergent. Ara bé, caldrà anar amb compte amb el signes. Com el denominador no serà exactament 0 aquest podrà ser negatiu o positiu.

g) $\frac{0}{\infty} \to 0$. Raonant de la mateixa manera però en sentit contrari, una successió així tendeix a 0. En efecte, quants més siguem menys tocarà a cadascú i, quant menys tinguem, encara en tocarà menys.

h) $0^{\infty} \to 0$. Noteu que si ens trobem amb un successió que s'apropa a una potència amb la base fent-se petita i l'exponent divergent, el resultat que ens trobem és que s'ha d'apropar a 0. Un multiplicar un nombre petit (proper a 0) per si mateix el nombre encara es fa més petit. Si, a més, el multipliquem per si mateix un nombre arbitràriament gran de vegades, el que obtenim encara es fa més petit.

i) $k^{-\infty}$. Això pot donar o bé 0 o bé ∞, depenent de si $|k| > 1$ o no (vegeu els límits de successions exponencials). Fixeu-vos que
$$k^{-\infty} = \frac{1}{k^{\infty}},$$
si $k^{\infty} \to 0$, aleshores això tendirà a ∞, i si $k^{\infty} \to \infty$ això tendirà a 0.

j) $0^{-\infty} \to \infty$. És un cas particular del cas anterior. Fixeu-vos que, fent servir els límits anteriors, podem escriure $0^{-\infty} \to \frac{1}{0^{\infty}} \to \frac{1}{0} \to \infty$.

1.6.3 Indeterminacions

No obstant, ens podem trobar en situacions en les que, només substituint per ∞, no podem saber el valor del límit. Són les anomenades **indeterminacions**. Substituint n per ∞ ens podem trobar amb les següents indeterminacions:

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$. Efectivament, el valor d'aquest límit dependrà de qui creixi més ràpid, el numerador i el denominador. Si el primer crec més ràpid, aleshores serà divergent (tendirà ∞), i si el denominador creix més ràpid, aleshores segurament tendirà a 0. En canvi, si tots dos creixen al mateix ritme, aleshores el límit existirà. Més endavant veurem algun exemple.

2) $\infty - \infty$. De manera similar, el valor d'aquest límit pot ser qualsevol, dependrà de creixi més ràpid, allò que restem (subtrahend) o bé allò a qui restem (minuend). En el primer cas tendirà a $-\infty$, i en canvi en el segon a ∞. En canvi, si tots dos creixen al mateix ritme, aleshores el límit serà 0.

3) $0 \cdot \infty$. Això també és una indeterminació, ja que no sabem qui guanya. D'una banda si multipliquem per una cosa molt petita, el resultat hauria de ser molt petit. Però en canvi, de l'altra, si multipliquem per una cosa molt gran el resultat hauria de ser molt gran.

4) $\dfrac{0}{0}$. Ens trobem amb el mateix problema que amb $\frac{\infty}{\infty}$ però "al revés". És a dir, d'una banda quant menys pesi la pizza menys ens tocarà, i de l'altra quant menys siguem més ens tocarà. Això serà doncs una indeterminació i caldrà veure qui es fa petit més ràpid.

5) 0^0. D'una banda, quan elevem qualsevol nombre a 0 ens hauria de donar 1, però de l'altra, 0 elevat a qualsevol nombre és 0. Per tant, si ens substituir n per infinit ens trobem en una situació així, estarem davant d'una indeterminació.

6) 1^∞. Clarament, en multiplicar el nombre 1 un nombre arbitràriament gran de vegades, obtenim sempre 1. No obstant, si la base d'aquesta potència no és exactament 1, aleshores la cosa canvia i tornem a tenir un mena de competició entre si la base s'apropa més ràpid a 1 que gran es fa l'exponent o al revés. Curiosament, com veurem després, la successió

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ni divergeix ni tendeix a 1.

7) ∞^0. Una cosa similar passa amb les successions que tenen una base divergint i l'exponent tendint a 0. D'una banda, qualsevol nombre elevat a 0 dóna 1. Però de l'altra, un nombre arbitràriament gran elevat a una quantitat petita (però positiva) dóna un nombre molt gran. Per tant, tenim altre cop una mena de competició entre la base fent-se gran i l'exponent apropant-se a 0.

Més avall discutirem com resoldre algunes d'aquestes successions.

1.6.4 Successions exponencials

Un tipus curiós de successions són les **exponencials** o **geomètriques**; és a dir, successions del tipus

$$a_n = k^n,$$

volem estudiar quant val el límit

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

Suposem primer que $k > 0$. Aleshores distingim tres casos:

1) Si $k < 1$, aleshores el límit dóna 0. Efectivament, quan multipliquem un nombre més petit que 1 per si mateix, notem que encara es fa més petit. Si, a més, el multipliquem per si mateix un nombre arbitràriament gran de vegades, el resultat s'apropa cada vegada més a zero.

2) Si $k = 1$, la successió sempre val 1 i, per tant, el seu límit també.

3) Si $k > 1$, aleshores la successió divergeix a infinit. En efecte, en multiplicar un nombre més gran que 1 per si mateix, el nombre creix. Si ho fem un nombre arbitràriament gran de vegades, el nombre que obtenim es arbitràriament gran.

Suposem ara que $k < 0$. Notem aquesta successió aleshores oscil·larà, ja que el resultat serà positiu si n és parell i negatiu si n és senar. Distingim també tres casos:

1) Si $k > -1$ ($k \in (-1, 0)$). Aleshores, malgrat que la successió oscil·li, el límit serà 0 ja que, en valor absolut, el nombre s'anirà fent petit pel mateix raonament que abans.

2) Si $k = -1$, la successió serà alternada, ja que de fet serà la successió $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$. Per tant, la successió no tindrà límit, però tampoc serà divergent.

3) Finalment, si $k < -1$, aleshores en valor absolut la successió divergirà. Com anirà alternant el signe (pels termes parells positius i pels senars negatiu), la successió serà divergent oscil·lant entre $+\infty$ i $-\infty$.

Resumint,

$$\lim_{n\to\infty} k^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < k < 1 \\ \pm\infty & \text{si } k < -1 \end{cases}$$

1.6.5 Indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$ amb successions racionals

En general, ens trobarem aquest tipus d'indeterminació que tractem amb una successió racional; és a dir, amb una successió del tipus

$$a_n = \frac{bx^p + \cdots}{cx^q + \cdots},$$

on el numerador i denominador són polinomis de grau p i q, respectivament. En calcular el seu límit quan $n \to \infty$, simplement hem de comparar quin dels dos creix més ràpid, cosa que en dirà el terme de grau més alt. Per aquest motiu, a l'exemple, només hi hem considerat el terme de grau més alt de cadascun dels polinomis. Aleshores tindrem el següent resultat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{si } p > q \text{ i } b \cdot c > 0 \\ -\infty & \text{si } p > q \text{ i } b \cdot c < 0 \\ 0 & \text{si } p < q \\ \dfrac{b}{c} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Resumint: si el grau del numerador és més gran que el del denominador, el primer creix més ràpid i, per tant, el límit tendirà a ∞. Ara bé, haurem d'anar en compte amb els signes dels coeficients de grau més alt. Si tenen el mateix signe la successió tendirà a $+\infty$, però si tenen signes diferents, aleshores el resultat serà negatiu i la successió tendirà a $-\infty$.
En cas que el grau del denominador sigui més gran, aquest creixerà més ràpid que el numerador i la successió tendirà a 0.
Si tots dos polinomis tenen el mateix grau, aleshores "empaten" i el límit serà $\frac{b}{c}$.

1.6.6 Indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$ amb potències

Una altra manera d'acabar amb una indeterminació d'aquest tipus és mitançant successions exponencials. És a dir, successions en què el numerador o el denominador (o tots dos) sigui una potència. En aquest cas, l'únic que haurem de tenir en compte és que les potències guanyen als polinomis. Per exemple, la successió

$$a_n = \frac{2^n}{p(n)},$$

on $p(n)$ és un polinomi, és divergent. Per gran que sigui el grau de $p(n)$ la potència del numerador sempre guanyarà i la successió divergirà. Depenent del signe del coeficient de grau més alt de $p(n)$ la successió divergirà a $+\infty$ (en cas que sigui positiu) o a $-\infty$ en cas contrari.
També podríem considerar la successió

$$a_n = \frac{p(n)}{k^n}.$$

Assumint $k > 0$, aquesta successió divergirà si $k \leq 1$, però tendirà a 0 si $k > 1$, independentment del grau del numerador.

1.6.7 Algunes altres indeterminacions

Les indeterminacions del tipus 2), 3) i 4) bàsicament es resolen operant i reescrivint la successió com una successió racional i resolent una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$ simplement comparant graus. Vegeu els problemes resolts per trobar exemples.

1.6.8 Indeterminació del tipus 1^∞

Com hem comentat anteriorment, si ens trobem amb una successió que tendeix a 1^∞ (on a base no és exactament 1), ens trobarem davant d'una indeterminació, perquè en multiplicar un nombre infinitament proper a 1 un nombre ilimitat de vegades el que ens trobem és que el resultat pot no ser 1. Per exemple, considerem la successió

$$a_n = 1^n$$

Aquesta successió tendeix a 1^∞. No obstant, no és cap indeterminació perquè la base no tendeix a 1 sinó que és exactament 1. Els termes d'aquesta successió són sempre 1. No obstant, considerem la següent successió:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

En aquest cas, la base no és 1 sinó que hi tendeix. Si calculem uns quants termes d'aquesta successió veurem que sembla que s'apropa cada vegada més a un nombre estrany. Per exemple, el terme a_{100} resulta que és

$$a_{100} = 2.7048138294215260932671947108075308336779383827810027768 90,$$

el terme a_{1000} és

$$a_{1000} = 2.7169239322358924573830881219475771889643150188365728037 22$$

i el terme a_{10000} és

$$a_{10000} = 2.7181459268252248640376646749131465361138226492207208183 70.$$

Fixem-nos que no sembla que aquesta successió s'estigui apropant a 1. És més, sembla que té límit, i que aquest és un nombre proper a 2.71. Efectivament, aquesta successió tendeix a un nombre molt especial, que és el nombre e. És un nombre irracional que apareix molt sovint en ciències (fins i tot més que el π!) perquè té unes propietats molt especials. Vegem què és el nombre e.
Que sapiguem, l'origen del nombre e es remunta al segle $XVII$, quan un tal Jacob Bernoulli, treballant en un problema de probabilitat es va trobar amb aquesta successió (bé, una de molt semblant). Tot i que no ho va poder demostrar, ja va intuir que aquesta successió convergia, i que el seu límit era nombre curiós, i que era irracional (tenia infinits decimals no periòdics). No va ser fins al segle XVIII que Leonhard Euler ho va demostrar, i d'aquí que també es conegui com "el nombre d'Euler", tot i que el més comú és anomenar-lo nombre "e".
No obstant, la definició de nombre e més còmode (que va fer servir Euler) no és mitjançant la successió sinó la següent suma infinita (sèrie):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

És a dir, la suma infinita dels inversos del factorial és el nombre e. Malgrat ser una suma infinita, els sumands es fan petits tan ràpidament que la suma s'atura en un valor, que és precisament el nombre e, un nombre irracional. Aquesta suma i la successió $(1 + \frac{1}{n})^n$ es poden relacionar mitjançat el Binomi de Newton.

D'acord, però, com podem fer servir això per resoldre indeterminacions del tipus 1^∞? Doncs fent servir la següent propietat:

Propietat. Si tenim una successió a_n que compleix

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Dit d'una altra manera, si x és nombre molt, molt gran, aleshores el valor

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},$$

és molt, molt proper al nombre e.

Vegem com poder fer servir aquesta propietat per resoldre indeterminacions del tipus 1^∞.
Imaginem que tenim una successió exponencial, on la base tendeix a 1 i l'exponent a ∞. Tenim per tant una indeterminació del tipus 1^∞. La resoldrem fent que aparegui l'expressió anterior. Ens ocupem primer de la base, escrivint-la en la forma

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Imaginem que l'exponent era b_n. Aleshores ens caldrà fer aparèixer la successió a_n a l'exponent multiplicant i dividint b_n per a_n:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n \frac{b_n}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{\frac{b_n}{a_n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}}$$

Vegem amb un exemple.

Exemple 1.6.2. *Considereu la successió*

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+n-1}\right)^{n-1}$$

Si fem el límit substituïnt n per ∞ ens queda una indeterminació del tipus 1^∞. Resolem-la.
Escrivim primer la base en la forma anterior. Com volem tenir un 1 sumant, doncs sumem i restem 1:

$$\frac{2n^2+1}{2n^2+n-1} = 1 + \frac{2n^2+1}{2n^2+n-1} - 1.$$

Ajuntem ara la darrera part de la base:

$$1 + \frac{2n^2+1}{2n^2+n-1} - 1 = 1 + \frac{2n^2+1}{2n^2+n-1} - \frac{2n^2+n-1}{2n^2+n-1} = 1 + \frac{\cancel{2n^2}+1-(\cancel{2n^2}+n-1)}{2n^2+n-1} = 1 + \frac{-n+2}{2n^2+n-1}.$$

Un cop tenim l'1 sumant, ara volem que a la fracció que ens queda hi hagi un 1 al numerador. Això ho farem passant el numerador al denominador del denominador (és a adir, fent servir que $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$)

$$1 + \frac{-n+2}{2n^2+n-1} = 1 + \frac{1}{\frac{2n^2+n-1}{-n+2}}$$

Un cop tenim la base escrita en la forma que volem, només caldrà fer el límit de dividir l'exponent entre la successió que ha qudat al denominador, és a dir, el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\frac{2n^2+n-1}{-n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(-n+2)}{2n^2+n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+n-2}{2n^2+n-1} = -\frac{1}{2}.$$

Per tant el límit ens quedarà

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+n-1}\right)^{n-1} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

Capítol 2

Funcions

Contents

2.1 Bla bla bla, notació i definicions bàsiques

Una funció és una relació entre dos conjunts; és a a dir, una funció associa elements d'un conjunt (conjunt de sortida) amb elements d'un altre conjunt (conjunt d'arribada), amb l'única condició que, a cada element del conjunt de sortida li correspon **com a molt un** element del conjunt d'arribada.
Els elements d'aquests conjunts poden ser qualsevol cosa

1. La funció “alçada d'una persona”. El conjunt de sortida són les persones, i el d'arribada els nombres reals.
2. La funció “nombre de satèl·lits d'un planeta”. El conjunt de sortida podrien ser els planetes dels sistema solar, i el d'arribada els nombres enters.
3. La funció “classifica animals”. El conjunt de sortida podria ser els animals vertebrats del planeta Terra, i el d'arribada la classificació segons mamífers, aus, rèptils, amfibis i peixos. A cada animal li toca una d'aquests cinc grups

Nota. Els elements dels conjunts de sortida com d'arribada sovint s'anomenen punts. En algunes ocasions, les funcions es poden “dibuixar” (al pla o a l'espai), i per tant aquests tipus de funcions es podrien estudiar des d'un punt de vista més geomètric. En aquest cas, el concepte punt pot aparèixer i caldrà distingir doncs entre “punt” d'un dels dos conjunts o bé “punts” del pla.

Fixeu-vos que, si aquests tres exemples són funcions, com només poden retornar un valor com a molt, això implica que no hi poden haver ambigüitats. És a dir, ha d'estar ben clarament definit què és satèl·lit i què no ho és, quins animals són mamífers i quins no ho són i cada animal ha de pertànyer com a molt a un grup, mai a dos. Per això els biòlegs han fet l'esforç de definir amb exactitud cada grup d'animals perquè no hi hagi ambigüitats.

A les funcions els i podem donar noms, per exemple f, g, i h són els noms més comuns que s'utilitzen per funcions, en aquest ordre. En general, el que retorna una funció **depen** de l'element de sortida. Per tant, se sol utilitzar una **variable** perquè els representi, que s'anomena **variable independent**, i se sol representar amb la lletra x. Als exemples anteriors x podria ser una persona concreta, un animal qualsevol o un planeta del sistema solar.

El que ens retorna la funció, de vegades se sol anomenar variable (perquè varia), però com depen del valor de sortida, aquest s'anomena **variable depenent**. De vegades se li associa la lletra y quan es vol veure una funció (d'una sola variable) des d'un punt de vista geomètric (punts d'un pla). No obstant, nosaltres evitarem fer servir aquesta notació.

Amb tot, una funció l'escriurem $f(x)$, cosa que es llegeix “f de x”, on f és el nom de la funció i x és la variable independent. Això se sol representar esquemàticament de la següent manera

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

i es llegeix de la següent manera: la funció f va del conjunt A al conjunt B, que la variable independent és x (que pren valors al conjunt A) i les seves imatges, $f(x)$, pertanyen al conjunt B.

Donada una funció podem parlar de

Definició (Imatge)**.** *Diem que la* **imatge** *d'un element del conjunt de sortida és l'element del conjunt d'arribada que li correspon, si és que existeix.*

Per exemple, als exemples anteriors podríem tenir

1. $f(\text{“Joan”}) = 1.80$, si el Joan fa 1.80m
2. $f(\text{“Terra”}) = 1$ i $f(\text{Saturn}) = 59$, ja que la Terra té un satèl·lit (la Lluna) i Saturn 59.
3. $f(\text{“vaca”}) =$ “Mamífer”

Definició (Antiimatge)**.** *Diem que les antiimatges d'un element del conjunt d'arribada són els elements del conjunt de sortida que tenen aquella imatge.*

Fixem-nos que un element pot tenir més d'una antiimatge. Per exemple, hi ha tantes antiimatges de “Mamífers” com mamífers hi ha al món, i hi ha dos planetes al sistema solar que no tenen cap satèl·lit (Venus i Mercuri). Per tant, les antiimatges de “Mamífer” són moltíssimes (ossos, gossos, gats, humans, etc) i les antiimatges de 0 són "Venus" i "Mercuri". Una pregunta interessant quines són les antiimatges de 1.75 per la funció "alçada d'una persona". Serien totes les persones que mesures 1.75. Podríem pensar que n'hi ha moltes. Però, que mesurin exactament 1.75, és a dir, $1.75\overline{0}$? Doncs segurament cap...

Observació. Les imatges pertanyen al conjunt d'arribada, i les antiimatges pertanyen al conjunt de sortida.

Definició (Injectiva)**.** *Diem que una funció és injectiva si els elements del conjunt de sortida tenen imatges diferents.*

La funció que classifica animals no és injectiva, perquè $f(\text{"Ós"}) = f(\text{"vaca"}) = \text{"Mamífer"}$; hi ha molts animals mamífers. En canvi la funció alçada segurament sí que és injectiva, perquè no hi ha dues persones al món amb (exactament) la mateixa alçada.

Definició (Exhuastiva)**.** *Diem que una funció és* **exhaustiva** *si tots els elements del conjunt d'arribada tenen alguna antiimatge.*

Per exemple, la funció "Nombre de satèl·lits" no és exhaustiva perquè no hi ha cap planeta al sistema solar amb 13 satèl·lits.

Definició (Bijectiva)**.** *Diem que una funció és* **bijectiva** *si és injectiva i exhaustiva alhora.*

Les funcions bijectives són importants, perquè permeten "tornar enrere". És a dir, ens donen una equivalència entre conjunts identificant tots els elements d'un conjunt amb els elements d'un altre, un a un.

2.2 Anem al gra: funcions reals de variable real

A l'hora de la veritat, el que estudiarem (en aquest curs) són funcions entre nombres reals: els conjunts de sortida i d'arribada seran els nombres reals, $\mathbb{R}$. És a dir, per nosaltres les funcions vindran donades per expressions algebraiques que ens donen relacions entre nombres. Això ho representarem de la següent manera

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

on x és un nombre real i la seva imatge també. Pel ca que ens porta, la funció $f(x)$ ens vindrà donada en forma d'una expressió algebraica, però no té perquè així. De fet, les funcions que ens trobem al món real mai venen donades de manera exacta per una funció, i el que fan molt científics i científiques de molts camps és intentar trobar funcions que s'ajustin al que s'observa.

Un exemple, de com ens podria venir donada una funció és aquesta:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$$

En principi, x pot prendre qualsevol valor real (veurem que això de fet no és així, hi ha valors "prohibits"), i, en operar, obtenim un altre nombre real. Per exemple, podem calcular la imatge del 0 i del 1:

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 - 0 - 2} = -\frac{1}{2}$$
$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1^2 - 1 - 2} = \frac{0}{-2} = 0,$$

però no podem caclular la imatge del -1 ni del 2 perquè obtenim un 0 al denominador, i dividir entre 0 no es pot (no està ben definit).

La gràcia de les funcions reals de variable real és que es poden dibuxiar; és a dir, en podem fer una gràfica. Si agafem uns eixos de coordenades i a l'eix horitzontal (eix d'abscisses) hi posem els valors de la variable independent, x, i a l'eix vertical (eix d'ordenades) hi posem les imatges, $f(x)$, cada punt del pla simbolitza una parella de valor i la seva imatge. Així, el punt $(1, 0)$ vol dir que la imatge de l'1 és 0; per tant, un punt qualsevol de la gràfica d'una funció serà de la forma $(x, f(x))$.

2.3 Rectes: funcions lineals i afins

Les notes corresponents a aquesta secció són una ampliació dels apunts que es proporcionen a 3r d'ESO. Per visualitzar els continguts d'aquesta secció podeu fer servir l'applet de Geogebra:

https://www.geogebra.org/m/vuqyvvfk

2.3.1 Les rectes i el seu pendent

Bla bla bla: què és una recta?

Alguns diuen que una recta és el camí més curt entre dos. Ara bé, si en una ciutat volem anar d'un lloc a un altre, és evident que el camí més curt no és una recta, perquè implicaria saltar per sobre els edificis. I si volem de Barcelona a Nova York? El camí més curt és una recta? Doncs tampoc, perquè implicaria submergir-se dins l'oceà, perquè la terra és "esfèrica". Per tant, definir una recta d'aquesta manera primer cal aclarir com mesurem la distància.
D'altres que una recta és la trajectòria que segueix la llum. Ara bé, tal com va predir el mateix Einstein, la llum (i l'espai!) es corba a prop d'un camp gravitatori intens. Això es pot observar als eclipses totals de Sol, per exemple.

Així, què és una recta?? Doncs les rectes no existeixen. En efecte, les rectes són idealitzacions matemàtiques (equacions) d'allò que intuitavament definiríem com a "línia sense curbatura ni gruix". I com són aquestes idealitzacions matemàtiques? Doncs depèn del punt de vista:

- Geomètric (s'estudia a 4rt i a batxillerat)
- Analític (funcions)

Efectivament, la majoria de les rectes es poden escriure com un tipus concret de funcions: les funcions lineals i les funcions afins. Són funcions expressades com a polinomis de grau 1.

Què determina una recta?

Doncs bàsicament una recta es pot determinar de dues maneres:

1. Dos punts: per dos punts (diferents!) només hi passa una recta
2. Un punt de pas i el seu pendent (la seva "inclinació")

A 3r d'ESO ens fixarem en el segon punt de vista. En particular, en aquesta "fitxa" només ens fixarem en el pendent, i veurem rectes que passen per un determinat punt: l'origen.

Desnivell i el pendent d'una recta

De manera intuïtiva, quan parlem de pendent ens imaginem pujant per una muntanya o bé fent un ascens en cotxe o bicicleta. Diem que, "quant més pendent" té una pujada més empinada és aquesta. Sovint, també ens trobem per la carretera senyals com el de la figura 2.1 indicant un fort pendent, del 10% en aquesta cas.

Però, què és el pendent?

El primer què hem de tenir clar del pendent és que és masculí i no femení. És a dir, direm **el pendent** i **no la pendent**.

Figura 2.1

Figura 2.2

Un cop aclarit el gènere, definim pendent com la relació entre el que es puja i el que s'avança:

$$\text{pendent}=\frac{\text{El que es puja}}{\text{El que s'avança}}$$

Aquest quocient ens dóna el que s'ha de pujar per tal d'avançar una unitat.

Veiem algun exemple. Imaginem que anem d'un lloc a un altre pel camp i ho fem travessant una muntanya. Com es veu a la figura 2.2, quan pugem, d'una banda guanyem alçada i de l'altra estem avançant cap a la nostra meta (en direcció horitzontal). En l'exemple de la figura 2.2, per cada 1.5m que avancem (en direcció horitzontal) en pugem 0.5m (en direcció vertical); per tant, si dividim el que pugem entre el que avancem obtenim

$$\frac{0.75}{1.5}=0.5$$

Aquest número és una mena de "tant per 1", ens està dient que per cada per cada metre, centímetre, o km que avancem (en direcció horitzontal) hem de pujar-ne 0.5 (metres, centímetres o km).

Ara bé, tal com hem vist abans, sovint als senyals de trànsit el pendent s'expressa en "tant per cent". Per exemple, un pendent del 10%, com podem veure a la figura 2.3 els que ens està dient és que, per cada 100m que s'avancen n'hem de pujar 10m. Això, expressat en "tant per 1", seria

$$\frac{10}{100}=0.1$$

i diríem que, el pendent és de 0.1: per cada metre, centímetre o kilòmetre que avancem n'hem de pujar 0.1 (metres, centímetres o kilòmetres).

Fixeu-vos que, quant més gran és el pendent, més pugem perquè augmenta el numerador. Això pot ajudar a l'hora de recordar qui va al numerador (el que es puja) i qui al denominador (el que s'avança).

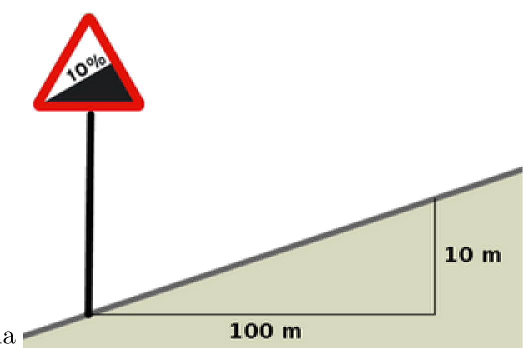


Figura 2.3

El signe del pendent: i si baixem?

Però, què passa si estem baixant enlloc de pujar? Això el pendent ens pot dir? Doncs sí, simplement que el interpretar el fet de baixar com pujar una quantitat negativa. Per exemple, si baixem per la vessant de la muntanya de la figura 2.2, aleshores direm que, per cada 1.5m que avancem (en direcció horitzontal) en baixem -0.5m. Per tant, en cas de baixada, el pendent seria

$$\frac{-0.75}{1.5}=-0.5$$

i serà negatiu.

Pot ser 0 el pendent?

I tant. Imaginem que ni pugem ni baixem, és a dir, estem en pla. En aquest cas, per cada metre que avancem en pugem 0, per tant, el pendent serà

$$\frac{0}{1}=0$$

Així doncs, què és una recta?

Ens els apartats anteriors us hem col·lat un petit gol. Fixeu-vos en la imatge de la figura 2.4. És el mont Merapi, a Indonèsia, que de fet, com es pot deduir del fum que surt, és un volcà. És bonic, oi?

Figura 2.4

Preguntem-nos quin és el pendent de la seva vessant esquerra. Clarament, la resposta és que depen del tram. Al principi és bastant pla, després el pendent és més fort i després torna a aplanar-se. Si dividim el que pugem entre el que avancem, ens donarà coses diferents segons el tram. I això per què? Doncs perquè el perfil de la vessant esquerra està lluny de ser una recta.
Fixeu-vos ara en la vessant dreta. Sembla que el pendent és pràcticament constant. És a dir, independentment del tram, si dividim el que pugem entre el que avancem sempre ens dóna el mateix. Per què? Doncs perquè s'assembla molt a una recta. Per tant podríem dir que:

Recta: és una "corba" de pendent constant (sense curvatura).

Però això què té a veure amb les funcions?

Doncs resulta que la majoria de les rectes es poden interpretar com a funcions, i tenen una equació. De fet, totes, menys les rectes verticals.

Fixem-nos en la figura 2.5. Clarament és una funció: per a cada valor de x ens retorna un valor. És una recta? Doncs efectivament. Podem calcular-li el pendent en diferents trams i ens dóna sempre el mateix. A la figura hi teniu indicats alguns "increments" en diferents trams. Els increments se solen simbolitzar amb el símbol Δ (delta, que és la lletra "d" grega majúscula). En el primer tram la funció "puja" 2 i "avança" 4, en el segon "puja" 1 i "avança" 2, i en el tercer "puja" 4 i "avança" 8. Si trobem el pendent en cadascun d'aquests trams (dividint el que es puja entre el que s'avança), sempre ens dóna el mateix:

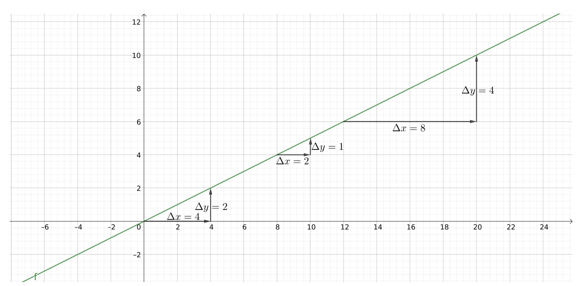


Figura 2.5

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = 0.5$$

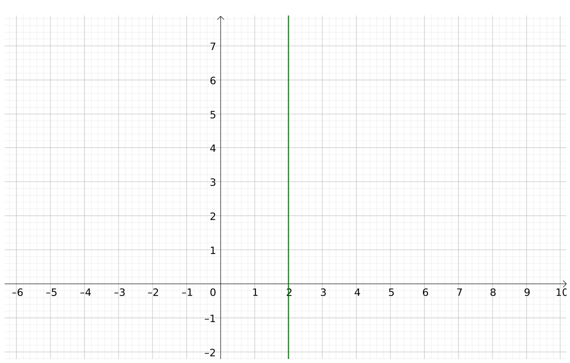


Figura 2.6

Per tant, es tracta d'una recta, i el seu pendent és 0.5, la qual cosa vol dir que per cada metre, centímetre o kilòmetre que s'avança se'n puja mig.

No totes les rectes són funcions?

Efectivament, no totes les rectes són funcions. Les rectes verticals no són funcions. Fixem-nos en la recta de la figura 2.6. És una funció? Si fos una funció, què val en $x = 1$? I en $x = 3$? I en $x = 4$? Doncs no val res, perquè aquests punts no tenen cap imatge associada. En canvi, què val en $x = 2$? Doncs ho val tot, i això no pot ser, perquè les funcions només poden tenir una imatge per cada valor de x. Per tant, totes les rectes són funcions, excepte les verticals.

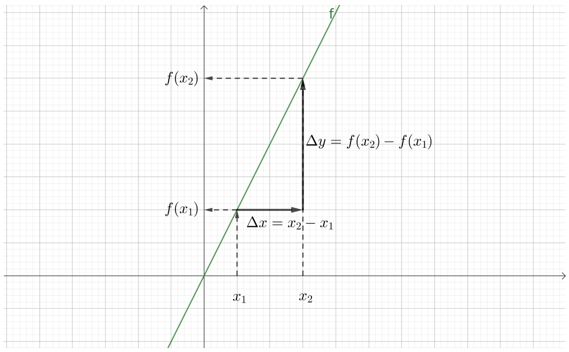


Figura 2.7

Càlcul del pendent d'una recta

Considerem la recta de la figura 2.7 Per tal de calcular-ne el pendent, hem d'agafar un tram qualsevol i dividir "el que es puja" entre "el que s'avança". És a dir, hem de dividir un increment d'alçada (Δy) entre l'increment horitzontal corresponent (Δx). Com ho calculem? Doncs com el pendent no depen del tram, agafem dos valors de x qualssevol (diferents!): x_1 i x_2. Per tant ja sabem el que avancem en direcció horitzontal:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

cosa que, en termes més físics, podem llegir com distància recorreguda: "posició final menys inicial".
I quant val l'increment vertical Δy? Doncs l'increment vertical és la diferència entre l'alçada al punt final i l'alçada al punt inicial, és a dir:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

és a dir, "alçada final menys inicial".
Per tant, el pendent serà:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2.3.2 Funcions lineals: rectes que passen per l'origen

Com és l'equació d'una recta? Doncs, com hem dit abans, primer ens centrarem en les rectes que passen per l'origen (valen 0 quan $x = 0$: $f(0) = 0$).
Imaginem que el pendent de la nostra recta és m. Com les rectes tenen el mateix pendent en tots els trams, agafem in increment que comenci en $x = 0$ i anem fins a un valor qualsevol, x, tal com podeu veure a la figura 2.8. Per tant tindrem

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \\ &\longrightarrow m = \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

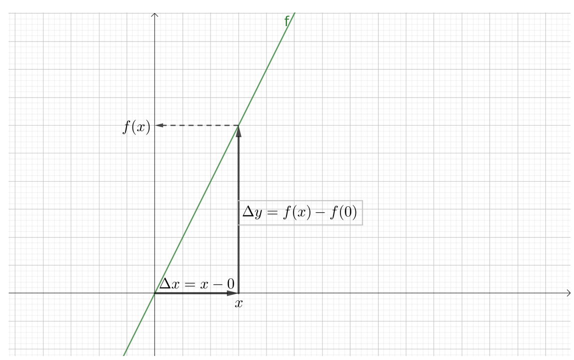


Figura 2.8

Si aïllem $f(x)$ tindrem

$$f(x) = mx$$

És a dir, les rectes que passen per l'origen (i no són verticals) venen donades per multiplicar x per un cert nombre, que precisament és el pendent de la recta. Aquest tipus de funcions s'anomenen *funcions lineals*:

Funcions lineals: són funcions del tipus $f(x) = mx$, i la seva gràfica correspon a una recta no vertical que passa per l'origen.

Alternativament, les funcions lineals es poden definir d'una manera més rigorosa. Una funció és lineal si compleix les dues condicions següents

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

on λ (lambda, lletra "l" grega) és qualsevol nombre. És a dir, la imatge de la suma és la suma de les imatges, i la imatge d'un producte és el producte d'un dels factors per la imatge de l'altre.
Veiem un exemple. La funció $f(x) = 3x$ compleix aquestes condicions? Agafem dos nombres qualssevol, per exemple $x = 2$ i $x = 5$, i calculem $f(2+5)$, $f(2)$ i $f(5)$:

$$\begin{aligned} f(2+5) &= f(7) = 21 \\ f(2) &= 6 \\ f(5) &= 15 \end{aligned}$$

fixem-nos que es compleix que
$$f(2+5) = f(2) + f(5).$$

Provem ara si compleix la segona condició. Ens preguntem per exemple si $f(2 \cdot 5) = 2 \cdot f(5)$. Calculem doncs

$$\begin{aligned} f(2 \cdot 5) &= f(10) = 30 \\ f(5) &= 15 \end{aligned}$$

i efectivament, es compleix. De fet, fàcilment es pot veure que totes les funcions del tipus $f(x) = mx$ compleixen les dues condicions anteriors.

Exemple 2.3.1. *Anem a comprovar que la funció*

$$f(x) = x^2$$

no és una recta. Si ho fos, el seu pendent seria sempre el mateix. Per tant, calculem el pendent en dos trams i veiem que no ens dóna el mateix. Per exemple, podem agafar $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. En aquest tram, el pendent ens sortiria
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3^2 - 2^2}{2 - 1} = \frac{9 - 5}{1} = 4$$
En canvi, si ara agafem ara $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ tenim el pendent en el tram $0 \longrightarrow 1$ ens sortiria

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

Com el pendent ens ha sortit diferent, la funció $f(x)$ no és cap recta

Exemple 2.3.2. *Comprovem ara que la funció*

$$f(x) = 2x + 3$$

és una recta, però no és una funció lineal.
Per comprovar que és una recta hauríem de veure que el pendent és sempre el mateix, independentment del tram que escollim. Agafem dos trams qualssevol, per exemple $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$, i obtenim que el pendent serà

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\overbrace{2 \cdot 1 + 3}^{f(1)} - \overbrace{(2 \cdot 0 + 3)}^{f(0)}}{1 - 0} = \frac{5 - 3}{1} = 2$$

Provem ara el tram $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. El pendent agafant aquest tram ens sortiria

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\overbrace{2 \cdot 3 + 3}^{f(3)} - \overbrace{(2 \cdot 1 + 3)}^{f(1)}}{3 - 1} = \frac{9 - 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

I ens ha sortit el mateix. I així podríem anar provam més trams i el pendent sempre ens donarà 2. De fet, com veurem més endavant, no importa el tram que escollim, una funció d'aquest tipus és una recta i qualsevol tram que escollim ens donarà el mateix pendent.
Provem ara si és lineal o no. Ho podem fer de dues maneres. Mirem si passa per l'origen:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

I no passa per l'origen, per tant no és lineal.
També podem provar les condicions anteriors. Agafem dos valors qualssevols i mirem si es compleix que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. *Provem amb* $x_1 = 2$ *i* $x_2 = 4$:

$$\begin{aligned} f(2+4) = f(6) &= 2 \cdot 6 + 3 = 15 \\ f(2) &= 2 \cdot 2 + 3 = 6 \\ f(4) &= 2 \cdot 4 + 3 = 11 \end{aligned}$$

Com $15 \neq 6 + 11$, *la funció no és lineal.*

Gràfiques de funcions lineals

Fem-ho al revés, és a dir, imaginem que ens donen una funció lineal. Com és la seva gràfica?
Considereu les següents funcions

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x & g(x) &= 3x \\ h(x) &= \frac{2x}{3} & i(x) &= -5x \\ j(x) &= -2x \end{aligned}$$

Com són les seves gràfiques?

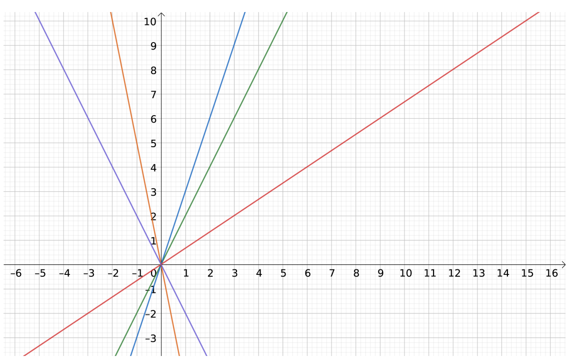


Figura 2.9

D'entrada sabem que seran rectes que passen per l'origen. La diferència entre elles és el pendent. Les cinc funcions estan representades a la Figura 2.9. Quina és quina?
Si ens fixem en el pendent, f, g i h creixen perquè el pendent és positiu, mentre que i i j decreixen, perquè el pendent és negatiu. Quins són els pendents?

$$\begin{aligned} f(x) &\longrightarrow m = 2 \\ g(x) &\longrightarrow m = 3 \\ h(x) &\longrightarrow m = \frac{2}{3} \\ i(x) &\longrightarrow m = -5 \\ j(x) &\longrightarrow m = -2 \end{aligned}$$

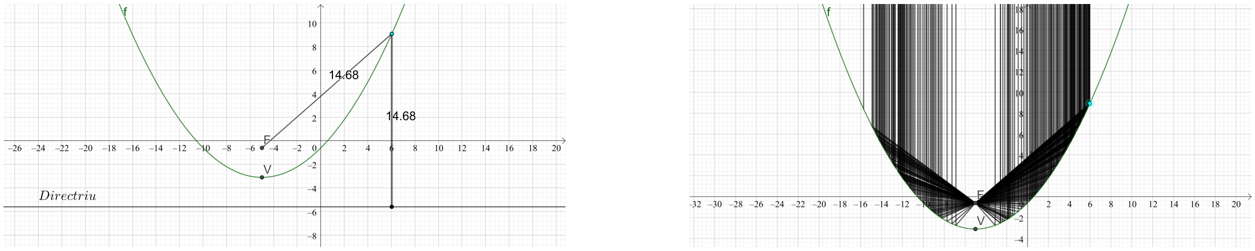
La funció g és la que té pendent més gran, per tant ha de ser la blava. Després li segueix f (la verda) i després h (la vermella). Fixeu-vos que el pendent de h és $\frac{2}{3}$ i no pas 2, perquè el nombre que multiplica a x és $\frac{2}{3}$:

$$h(x) = \frac{2x}{3} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{m} x$$

Finalment, entre les funcions i i j, fixem-nos que i té pendent més petit (és més negatiu), per tant és la que decreix més (la taronja) i j serà la lila.

2.3.3 Funcions afins

Les funcions afins són rectes que **no passen** per l'origen.



(a) Paràbola: els punts de la paràbola equidisten del focus i de la directriu.

(b) Paràbola: les rectes perpendiculars a la directriu es reflecteixin de manera que totes es tallen al focus.

Figura 2.10: Paràbola

2.4 Paràbola

Per visualitzar els continguts d'aquesta secció podeu fer servir l'applet de Geogebra:

https://www.geogebra.org/m/uxqu5zzr

2.4.1 Què és una paràbola?

Una paràbola és una corba al pla que té les següent dues propietats que la defineixen:

- Com a la figura 2.10a: considerem una recta i un punt que no pertanyi a la recta. Tots els punts del pla que es troben a la mateixa distància de la recta que del punt es troben sobre una corba que s'anomena *paràbola*. El punt s'anomena **focus** de la paràbola, i a la recta **directriu**.
- Com a la figura 2.10b: considerem un feix de rectes paral·lels (com podrien ser raigs de llums procedint de l'infinit). Aleshores, la corba que fa que totes les rectes es reflecteixin de manera que totes es tallin al mateix punt s'anomena **paràbola**. El punt on tallen les rectes s'anomena **Focus**.

Es pot veure que totes les paràboles que tinguin la directriu horitzontal es poden escriure com:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Els paràmetres a, b i c tenen els següents efectes:

- a: controla l'obertura de la paràbola. Quan més proper a zero és més oberta és la paràbola, mentre que quan més gran és més tancada és. Si $a > 0$ la paràbola és convexa (mira amunt), mentre que si $a < 0$ la paràbola és còncava (mira avall). Fixem-nos que si $a = 0$ aleshores la paràbola ja no és paràbola sinó una recta.
- b: controla la posició del vèrtex de la paràbola.
- c: desplaça la paràbola verticalment

2.4.2 Punts notables d'una paràbola

Vèrtex

El vèrtex d'una paràbola és el punt més proper a la directriu. També és el punt on canvia la monotonia. És a dir, és on passa de créixer a decréixer (en cas que sigui còncava) o de decréixer a créixer (en cas que sigui convexa). Per tant:

- Si $a > 0$ el vèrtex serà un mínim

- Si $a < 0$ el vèrtex serà un màxim

Per trobar el vèrtex, trobem primer la seva coordenada x. El truc consisteix en escriure la paràbola d'una altra manera. Primer eliminem la influència del paràmetre a:

$$f(x) = ax^2 + bx - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Ens fixem ara en l'expressió de dins del parèntesis i la intentem escriure de la següent manera:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + A)^2 + C$$

Fixem-nos que, escrita d'aquesta manera, la funció $(x + A)^2 + C$ pren el seu valor mínim quan $x = -A$. Per tant, només ens caldrà trobar A. Si "desfem" la part dreta de la igualtat obtenim

$$(x + A)^2 + C = x^2 + 2Ax + A^2 + C$$

i tornant a escriure la igualtat ens quedarà:

$$x^2 + 2Ax + A^2 + C = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Igualant els coeficients del mateix grau trobem que

$$A = \frac{b}{a}$$

Per tant, la coordenada x del vèrtex serà:

$$x_v = -\frac{b}{a}$$

Per trobar la coordenada y del vèrtex només ens caldrà avaluar la funció:

$$y_v = f(x_v)$$

2.5 Domini d'una funció

Definició (Domini)**.** *El domini d'una funció és el conjunt de "punts" (valors) del conjunt d'arribada pels quals la funció no està definida; és a dir, no retorna cap valor. A aquest conjunt li donarem el nom*

$$D(f),$$

i es llegeix "Domini d'f".

Els dominis de funcions reals solen ser tots els nombres reals excepte una llista de nombre, intervals o bé combinació d'ambdues coses. Repassem els conceptes bàsics referents a escriure conjunts de nombres.

- **Interval tancat**: s'escriu de la forma $[a, b]$, i consisteix en tots els nombres entre a i b, incloent-los tots dos. També es pot escriure com els valors de x que compleixen $a \leq x \leq b$.

- **Interval obert**: s'escriu de la forma (a, b) o bé $]a, b[$, i consisteix en tots els nombres entre a i b, sense incloure'ls. També es pot escriure com els valors de x que compleixen $a < x < b$.

- **Interval ni tancat ni obert**: s'escriu de la forma $[a, b)$ (o bé $[a, b[$) (inclou a però no b, $a \leq x < b$) o bé $(a, b]$ (no inclou a però b sí, $a < x \leq b$).

- **Intervals no fitats**: inclouen ∞ o $-\infty$ en un dels extrems. Per exemple, $(-\infty, a]$ són tots els nombres que compleixen $x \leq a$ (més petits o iguals que a), o bé (a, ∞), que serien els nombres que compleixen $x > a$ (estrictament més grans que a).

- **Unió**. Es simbolitza amb el símbol $\cup$. La unió de dos conjunts (per exemple, intervals) són els punts (valors) que estan o a un conjunt o a l'altre (o a tots dos). Per exemple, $[-2,1)\cup(2,4]$ són els valors de x que compleixen $-2\leq x<1$ o bé $2<x\leq 4$.
- **Intersecció**. Es simbolitza amb el símbol $\cap$. La intersecció de dos conjunts (per exemple, intervals) són els punts (valors) que es troben a tots dos conjunt alhora. Per exemple, $[2,5)\cap(3,6]$ són els valors de x que compleixen $3<x<5$.
- **Singletons**: són llistes de nombres, i s'inclouen entre claus: $\{a,b,c,d\}$.

Pel cas de funcions reals, hi ha diferents motius pels quals una funció podria no estar ben definida. Els motius principals són els següents

1. **Un denominador que s'anul·la**. Efectivament, la divisió entre 0 no està ben definida. Independentment de quina sigui la quantitat a repartir, no té sentit repartir-la en 0 parts. Així, quan tenim una funció donada pel quocient de dues expressions:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)},$$

els punts (valors d'x) que compleixin $h(x)=0$ no seran del domini. Per exemple, considerem la funció

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-3x+2}$$

El denominador s'anul·la quan $x=1$ o bé $x=2$. Per tant, aquests dos valors no seran del domini. Escriurem doncs

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1,2\},$$

és a dir, el domini d'aquesta funció són tots el nombres reals menys l'1 i el 2, independentment del que valgui el numerador! Ara bé, segons el que valgui el numerador a prop d'aquests valors, la funció pot tenir diferents comportaments. Com veurem més endavant, aquestes "singularitats" normalment donen lloc a asímptotes verticals (si el numerador no s'anul·la) o bé discontinuïtats del tipus evitable (en alguns casos en què el numerador també s'anul·li).

2. **Arrels quadrades (o d'índex parell) de nombres negatius**. Com tractarem amb funcions reals, el resultat que ens retornen aquestes funcions no poden ser complexos i, per tant, no podrem permetre que el radicand d'una arrel es faci negatiu. No obstant, recordem que no hi ha cap problema en calcular $\sqrt{0}$, que val 0.

3. **Logaritmes**. Com es veurà més endavant, no es poden calcular el logaritme de nombres negatius ni de 0. Per tant els dominis seran molt semblants als de les arrels, però haurem d'exloure també aquells valors pels quals l'expressió del logaritme val 0.

Vegem uns exemples.

Exemple 2.5.1. *Considerem la funció*

$$f(x)=\sqrt{x+2}.$$

Per trobar-ne el domini hem de trobar els valors de x pels quals el radicand és negatiu. Tenim dues opcions:

- *la primera és treballar amb una inequació:*

$$x+2<0\Longrightarrow x<-2.$$

És a dir, si $x<-2$ el radicand és negatiu i per tant aquests valors no seran del domini.

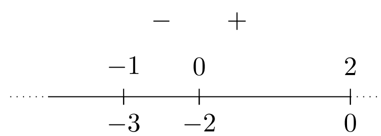
- *La segona opció és evitar treballar amb inequacions, cosa que pot ser una mica complicada quan tinguem (que en tindrem!) inequacions de segon grau. Aquest mètode és més senzill i menys perillós, tot i que menys elegant.*
  Primer busquem els valors que fan que el radicand sigui 0:

  $$x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2.$$

  Ara sabem que quan $x = -2$ el radicand val 0. Per tant, el més probable és que en $x = -2$ hi hagi un canvi de signe. Aleshores només cal mirar quin signe hi ha a cada banda de $x = -2$ i decidir amb quina ens quedem. Això ho podem fer simplement donant un valor a x a cada banda, per exemple $x = -3$ i $x = 0$, i obtenim

  $$\begin{array}{lcc} \textit{si } x = -3 & \longrightarrow & -3 + 2 = -1 < 0 \\ \textit{si } x = 0 & \longrightarrow & 0 + 2 = 2 > 0 \end{array}$$

  Per tant, tenim

  cosa que, algèbricament, podem escriure com

  $$\begin{array}{ll} x + 2 < 0 & \textit{si } x < -2 \\ x + 2 > 0 & \textit{si } x > -2 \\ x + 2 = 0 & \textit{si } x = -2 \end{array}$$

Evidentment, totes dues opcions ens porten al mateix resultat, x ha de ser més gran o igual que -2 o, equivalentment, no pot ser més petita que -2. Això ho direm de la següent manera

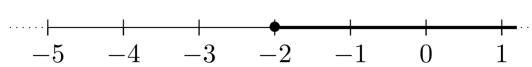
$$D(f) = \mathbb{R} \backslash (-\infty, -2) = [-2, \infty)$$

Fixem-nos que tenim dues opcions per definir el domini.

- *A la primera simplement traiem els valors que no són del domini, cosa que fem amb el símbol $\backslash$. Fixem-nos que estem traient tot un interval, que va des de $-\infty$ (no inclòs perquè ∞ mai es pot incloure als nombres reals) fins a -2 (també exclòs, perquè -2 sí que és del domini i no l'hem de treure).*

- *A la segona manera d'escriure el domini el donem explícitament. És a dir, estem dient que el domini és l'interval que va de -2 (inclòs, perquè -22 sí que és del domini) fins a ∞ (exclòs perquè ∞ no és cap número real i no es pot incloure).*

Gràficament, el domini el podem representar de la següent manera



Observeu el punt pintat, que indica que el valor $x = -2$ també està inclòs.

Vegem ara un altre exemple una mica més complicat.

Exemple 2.5.2. *Buscar el domini de la funció*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

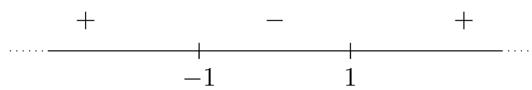
Com ara el radicand és una expressió quadràtica, tractar amb inequacions és una mica més delicat. Per tant fem-ho de la segona manera. Comencem buscant els punts on $x^2 - 1$ *val* 0*:*

$$x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1.$$

Ara tenim dos valors on l'expressió val 0 *i, per tant, dos possibles canvis de signe. Avaluem per tant l'expressió en tres valors diferents: a l'esquerra de* -1*, entre* -1 *i* 1 *i a la dreta de* 1*:*

x	-2	0	2
$x^2 - 1$	3	-1	3
Signe	$+$	$-$	$+$

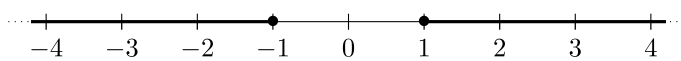
Gràficament:



el radicand és negatiu si x *està entre* -1 *i* 1*.*
Fixem-nos que això també ho podríem haver raonat de la següent manera. Com $x^2 - 1$ *és una paràbola convexa (mira cap amunt) i tala dues vegades l'eix d'abscisses, serà negativa entre els dos talls.*
En qualsevol cas, el domini serà el resultat de treure a $\mathbb{R}$ *tots els el punts de l'interval* $(-1, 1)$ *(exclosos el* -1 *i l'*1*!), cosa que podem escriure com*

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

La segona igualtat és la manera explícita de donar el domini. En aquest cas haurem d'unir els intervals $(-\infty, -1]$ *i l'interval* $[1, \infty)$*.*
El domini el podem representar també gràficament de la següent manera



2.6 Operacions entre funcions

Hi ha dos tipus d'operacions entre funcions: les que es fan entre les imatges, i les que no.
Com el primer tipus d'operacions es fan entre les imatges, podrem fer les mateixes operacions que es poden fer al conjunt d'arribada. Per exemple, si al conjunt d'arribada hi tenim els nombres reals, aleshores amb les funcions podrem fer les següents operacions:

1. **Producte per escalar**. Si tenim una funció f la podem multiplicar per un nombre real (se'ls anomena "escalars") i obtenim una altra funció "escalada":

   $$g(x) = \lambda \cdot f(x)$$

   Per exemple, si tenim la funció $f(x) = x^2$, podem considerar la funció $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$.

2. **Suma**. Si tenim dues funcions, f i g, les podem sumar i obtenim una nova funció que és la suma de les dues:

   $$h(x) = f(x) + g(x)$$

   Per exemple, si volem calcular la imatge de 2 per la funció h només haurem de sumar les imatges de 2 per f i g: $h(2) = f(2) + g(2)$, cosa que podem fer perquè $f(2)$ i $g(2)$ són dos nombres reals.

3. **Producte**: Si tenim dues funcions, f i g, les podem multiplicar i obtenir una nova funció que n'és el producte:
$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$
Per exemple, si volem calcular la imatge de 2 per la funció h només haurem de multiplicar les imatges de 2 per f i g: $h(2) = f(2) \cdot g(2)$, cosa que podem fer perquè $f(2)$ i $g(2)$ són dos nombres reals.

Evidentment, com aquestes operacions en el fons són operacions entre nombres, se'n deriven les mateixes propietats que tenim amb aquests (commutativa, associativa, distributiva del producte respectes la suma, existència d'oposat i invers, existència d'element neutre...) Naturalment, en haver oposat i invers, podem concloure que les funcions les podem restar (sumar l'oposat) i dividir (multiplicar per l'invers).

2.6.1 Domini de la suma, producte i quocient de funcions

Imaginem que tenim dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, cadascuna amb el seu domini: $D(f)$ i $D(g)$ ens preguntem pel domini de les funcions que en resulten d'operar entre elles.

- **Producte per escalar**. Si tenim una funció f i un escalar (un nombre real) $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores el domini de la funció que resulta de multiplicar λ per f és el mateix que el de f. Això és així ja que, en avaluar $\lambda f(x)$ només que necessitem avaluar f i després multiplicar per λ. Així:
$$D(\lambda \cdot f) = D(f)$$
- **Suma**. Quan sumem dues funcions, $f(x) + g(x)$ necessitem avaluar-les les dues. Per tant, el domini de la funció suma seran tots aquells valors pels quals podem avaluar tant f com g. És a dir, són els valors que estan a tots dos domini. Això, com a conjunts s'expressa amb la intersecció:
$$D(f + g) = D(f) \cap D(g)$$
A la pràctica simplement caldrà descartar tots aquells valors que no siguin del domini de f o del domini de g.
- **Funció resta**. Si tenim dues funcions f i g, podem considerar la funció resta $(f - g)(x)$. Ara bé, com restar no és res més que sumar l'oposat, tenim
$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x)$$
Per tant, no és més que una combinació de les operacions "multiplicar per -1" i sumar:
$$D(f - g) = D(f) \cup D(g)$$
- **Funció producte**. Si tenim dues funcions i les multipliquem, el domini passa a ser com el de la suma, ja que només necessitem poder avaluar les dues funcions (no s'afegeixen problemes extres):
$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$
- **Funció inversa respecte el producte**. Si tenim una funció f ens podem preguntar quant val el domini de la funció $(1/f)(x)$. Aquesta funció resulta d'invertir (respecte el producte) la funció f:
$$(1/f)(x) = \frac{1}{f(x)}$$
En aquest cas, per tal d'avaluar la funció $(1/f)$ no només necessitem poder avaluar la funció f, sinó que necessitem que no s'anul·li! Per tant, el domini de la funció $(1/f)$ serà el mateix que el de f llevat dels punts del seu nucli. Això ho podem escriure de la següent manera:
$$D(1/f) = D(f) \backslash \mathrm{Nuc}(f)$$

- **Funció quocient**. Si tenim dues funcions, f i g, podem considerar la funció que resulta de dividir-les:

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Altra cop, per avaluar la funció f/g necessitem poder avaluar les dues, però a més haurem de descartar els punts del nucli de g:

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \backslash \mathrm{Nuc}(g)$$

De fet això es pot veure considerant que la divisió és el producte per l'invers (respecte el producte):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

2.6.2 Nucli de la suma, producte i quocient de funcions

Donades dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ de les quals sabem

$$D(f) \quad D(g) \quad \mathrm{Nuc}(f) \quad \mathrm{Nuc}(g)$$

ens preguntem què podem dir de

$$\mathrm{Nuc}(f \cdot g) \quad \mathrm{Nuc}(f + g) \quad \mathrm{Nuc}(\frac{f}{g})$$

1. **Producte**. Ens preguntem quines són les solucions de l'equació

$$f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Clarament, si $a \in \mathrm{Nuc}(f)$ aleshores es compleix que $f(a) = 0$ i, per tant,

$$f(a) \cdot g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$$

independentment del valor de $g(a)$, però necessitem que existeixi! Per tant, necessitem també que $a \in D(g)$, perquè en cas contrari no podem avaluar l'expressió $f(a) \cdot g(a)$.
De la mateixa manera, si $b \in \mathrm{Nuc}(g)$ tindrem que

$$f(b) \cdot g(b) = f(b) \cdot 0 = 0$$

sempre i quant $b \in D(f)$. Per tant tenim que, si un valor de x pertany al nucli d'alguna de les dues funcions, aleshores aquest valor també pertanyerà al nucli de la funció producte. Ara bé, és possible que hi ha nous valor al nucli de $f \cdot g$ que no pertanyin ni a $\mathrm{Nuc}(f)$ ni a $\mathrm{Nuc}(g)$? Doncs no, vegem-ho.
Imaginem que $a \in \mathrm{Nuc}(f \cdot g)$. Aleshores

$$f(a) \cdot g(a) = 0$$

Però, per la propietat del producte per 0, si dos nombres multiplicats donen zero aleshores almenys un d'ells ha de ser zero. Per tant $a \in \mathrm{Nuc}(f)$ o bé $a \in \mathrm{Nuc}(g)$ (o les dues).
Resumint, en nucli del producte el formen els elements del nucli de f que siguin del domini de g i els elements del nucli de g que siguin del domini de f:

$$\mathrm{Nuc}(f \cdot g) = (\mathrm{Nuc}(f) \cap D(g)) \cup (\mathrm{Nuc}(g) \cap D(f))$$

2. **Suma**. Volem saber quines són les solucions de l'equació

$$f(x) + g(x) = 0$$

En general, les solucions d'aquesta equació no les coneixem. Fixem-nos que si $a \in \text{Nuc}(f)$ però $a \notin \text{Nuc}(g)$ aleshores

$$f(a) + g(a) = g(a) \neq 0$$

i per tant $a \notin \text{Nuc}(f+g)$. No obstant, si un valor és del nucli de totes dues funcions ($a \in \text{Nuc}(f) \cap \text{Nuc}(g)$), aleshores sí que es complirà $a \in \text{Nuc}(f+g)$, ja que

$$f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$$

Fixem-nos que si b és una solució de l'equació $f(x) + g(x) = 0$:

$$f(a) + g(a) = 0$$

això no implica que tots dos valors siguin zero. Per tant, l'equació $f(x) + g(x) = 0$ pot tenir solucions que no siguin de cap dels dos nuclis de les funcions f i g. Així, en principi, només podem afirmar que el nucli de $f+g$ conté els punts que són de tots dos dominis:

$$\text{Nuc}(f+g) \supseteq \text{Nuc}(f) \cap \text{Nuc}(g)$$

3. **Quocient**. Busquem ara solucions de l'equació

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$$

Per tant, en principi, el nucli de f serà el nucli del quocient. Ara bé, per tal de dir que, si $f(a) = 0$ aleshores $\frac{f(a)}{g(a)} = 0$ necessitem dues coses més:

- poder avaluar $g(x)$ en $x = a$ ($a \in D(g)$)
- que $g(a) \neq 0$ ($a \notin \text{Nuc}(g)$)

Per tant, el nucli de f/g el formaran els valors del nucli de f que siguin del domini de g però que no siguin del nucli de f:

$$\text{Nuc}\left(\frac{f}{g}\right) = \Big(\text{Nuc}(f) \cap D(g)\Big) \backslash \text{Nuc}(g)$$

Exemple 2.6.1. *Considerem les funcions*

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

Volem trobar $Nuc(f \cdot g)$, $Nuc(f+g)$, $Nuc\,(f/g)$ *i* $Nuc\,(g/f)$.

D'entrada, solucionant les equacions:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x + 2 = 0$$

tenim

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{1\}$$
$$Nuc(f) = \{-2, -1\}$$
$$D(g) = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$$
$$Nuc(g) = \{-1, 1\}$$

Per tant tindrem:

- $Nuc(f\cdot g) = \overbrace{\{\underbrace{\cancel{-2}}_{\notin D(g)}, -1\}}^{Nuc(f)} \cup \overbrace{\{-1, \underbrace{\cancel{1}}_{\notin D(f)}\}}^{Nuc(g)} = \{-1\}$
- *$Nuc(f+g) \supseteq \{-1\}$ ja que -1 està a tots dos nuclis. No obstant, si solucionem l'equació*

$$f(x)+g(x)=0$$

potser trobem més solucions. Intentem'ho:

$$\begin{aligned}
f(x)+g(x) &= \frac{x^2+3x+2}{x-1}+\frac{x^2-1}{x+2} = \\
&= \frac{(x^2+3x+2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{(x^2-1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(x^2+3x+2)(x+2)+(x^2-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \\
&= \frac{\overbrace{(x+1)(x+2)}^{x^2+3x+2}(x+2)+\overbrace{(x+1)(x-1)}^{x^2-1}(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+1)\big((x+2)^2+(x-1)^2\big)}{(x-1)(x+2)} = \\
&= \frac{(x+1)\big(x^2+4x+4+x^2-2x+1\big)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+1)(2x^2+2x+5)}{(x-1)(x+2)} = 0
\end{aligned}$$

En nucli d'aquesta funció sortirà de resoldre les equacions:

$$\begin{aligned}
x+1=0 &\Longrightarrow x=-1\\
2x^2+2x+5=0 &\Longrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{4}\notin\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Com la segona equació no té arrels reals, no hi ha cap altre més valor al nucli i, per tant,

$$Nuc(f+g)=\{-1\}$$

- $Nuc\left(\frac{f}{g}\right) = \overbrace{\{\underbrace{\cancel{-2}}_{\notin D(g)}, \underbrace{\cancel{-1}}_{\in Nuc(g)}\}}^{Nuc(f)} = \emptyset$
- $Nuc\left(\frac{g}{f}\right) = \overbrace{\{\underbrace{\cancel{-1}}_{\in Nuc(f)}, \underbrace{\cancel{1}}_{\notin D(f)}\}}^{Nuc(g)} = \emptyset$

2.6.3 Composició de funcions

Hi ha però una altra categoria d'operacions entre funcions, que no són les que es deriven d'operar amb les imatges. L'exemple més clàssic és la composició.

Definició (Composició de dues funcions)**.** *Donades dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, definim la funció "f composada amb g" com*

$$(f\circ g)(x) = f\left(g\left(x\right)\right)$$

És a dir, considerem la funció que resulta de concatenar les funcions g i la f. Dit d'una altra manera, la composició és la funció que resulta de fer primer g i el que ens doni entrar-ho a la funció f. Això es pot resumir gràficament de la següent manera:

$$\begin{array}{ccccc}
 & g & & f & \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & f\big(g(x)\big)
\end{array}$$

Com es pot intuir, la composició de funcions no és commutativa; és a dir, no és el mateix primer fer g i després f que al revés. Vegem-ho amb un exemple; considerem les funcions

$$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=\frac{3x+2}{x-1}$$

aleshores

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)=\sqrt{\frac{3x+1}{x-1}+2}$$
$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g\left(\sqrt{x+2}\right)=\frac{3\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$$

i, com era d'esperar, la propietat commutativa no es compleix.
Vegem algunes propietats importants

1. **No és commutativa**, com ja hem vist.

2. **Element neutre: la funció identitat** Recordem, l'element neutre d'una operació és aquell element que, en operar-lo amb un altre, el deixa igual. En el cas de la composició, l'element neutre ha de ser una funció que "no faci res", és a dir, una funció que deixi iguals els elements als quals s'aplica. Aquesta funció és la funció $Id(x)=x$, i s'anomena **funció identitat**. Noteu que si tenim qualsevol funció $f(x)$, aleshores es compleix

$$(f\circ Id)(x)=f\big(Id(x)\big)=f(x)$$
$$(Id\circ f)(x)=Id\big(f(x)\big)=f(x),$$

   i per tant la funció identitat no fa res en operar-la amb la composició.

3. **Funció inversa**. En general, l'invers d'un element respecte d'una operació, si existeix, és aquell que en operar-lo amb l'element s'obté l'element neutre. És a dir, desfà l'operació. Per exemple, l'invers de 2 respecte el producte és $\frac{1}{2}$ perquè

$$2\cdot\frac{1}{2}=1$$

   que és el neutre del producte. L'element invers de 2 respecte la suma és el -2 (i s'anomena oposat), ja que

$$2+(-2)=0$$

   ja que 0 és l'element neutre de la suma.
   Doncs de la mateixa manera, l'invers una funció respecte de la composició és aquella funció que en composar-la s'obté l'element neutre. Es denota per $f^{-1}(x)$ (alerta, no confondre amb $\frac{1}{f(x)}$!!!) i s'escriuria

$$(f\circ f^{-1})(x)=Id(x)$$
$$(f^{-1}\circ f)(x)=Id(x)$$

   Dit d'una altra manera, la inversa d'una funció és aquella funció que desfà el fa la funció f i, per tant en certa manera podem dir que "torna enrere". No obstant, com veurem més endavant, no sempre podrem tornar a enrera.

2.6.4 Càlcul de la funció inversa

Com hem dit, la funció inversa desfà el que fa la funció. Això ho podem resumir amb el diagrama següent:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = y \\ x = f^{-1}(y) &\longleftarrow\!\shortmid\ y \end{aligned}$$

Fixem-nos que, per diferenciar si la variable pertany al conjunt d'arribada o al de sortida, li diem x a la de sortida i y a la d'arribada. Així, la variable independent de la funció inversa és y, mentre la que la variable independent de la funció original és x. Vegem dos exemples

Exemple 2.6.2. *Considerem la funció*

$$f(x) = x + 2$$

la podem entendre com la funció "sumar 2". Així, la seva inversa hauria de ser la funció "restar 2":

$$f^{-1}(y) = y - 2$$

Comprovem si en composar-les obtenim la identitat:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \underbrace{(x+2)}_{y} - 2 = x$$

En obtenir la funció identitat, la funció $y - 1$ desfà el que fa la funció $x + 2$ perquè "ens quedem igual".

Exemple 2.6.3. *Podem també trobar la inversa de la funció "multiplicar per 3 i després restar 1":*

$$f(x) = 3x + 1$$

La inversa hauria de una funció que primer restés 1 i després dividís entre 3, és a dir,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$$

Fixeu-vos que l'ordre importa i primer hem des desfer l'últim que fa f. La funció que primer divideix entre 3 i després resta 1

$$\xcancel{f^{-1}(y) = \frac{y}{3} - 1}$$

no seria la inversa perquè les operacions no es desfan en l'ordre correcte.
Comprovem que, en composar la inversa amb la funció obtenim la identitat i, per tant, una desfà el que fa l'altra:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x+1) = \frac{\overbrace{(3x+1)}^{y} - 1}{3} = x$$

Aquests dos exemples són relativament senzills perquè la inversa es pot trobar "a vista". Aleshores sorgeixen dues preguntes

1. Com podem trobar la inversa d'una manera més sistemàtica? És a dir, si tenim una funció una mica més complicada, com podem trobar-ne la inversa sense haver-ho de fer "a vista"?

2. És sempre possible trobar la inversa?

La resposta a la primera pregunta la trobem a la següent secció.
Pel que fa a la segona, observem que, per tal de poder "tornar enrere", caldrà evitar ambigüitats. És a dir, caldrà que hi ha només una manera de tornar enrere, perquè si n'hi ha dues o més aleshores la inversa no "estarà ben definida". Vegem un exemple

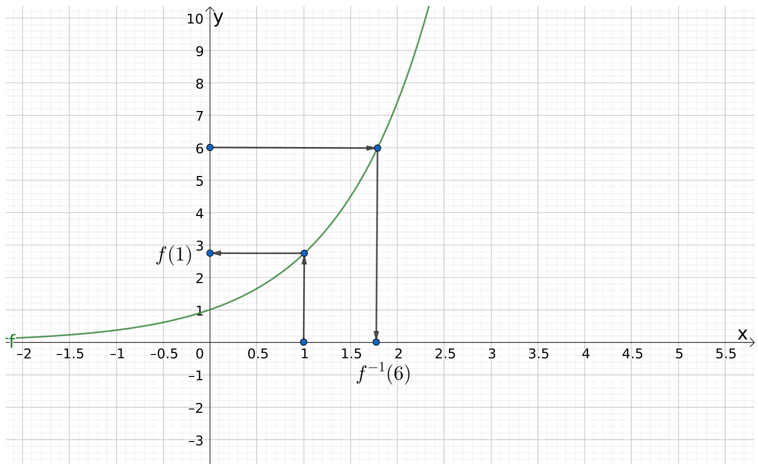


Figura 2.11: Una funció qualsevol

Exemple 2.6.4. *Considerem la funció*

$$f(x) = x^2$$

i ens preguntem, quina funció desfà elevar al quadrat? Doncs n'hi ha dues

$$g(y) = \sqrt{y}$$
$$h(y) = -\sqrt{y}$$

Com tenim dues maneres de tornar enrere, no podem calcular **la** *inversa, perquè n'hi ha dues, i per tant aquesta no és única.*

Aleshores, què ha de complir una funció per tal que només tingui una inversa?

Observació. Per tal de poder calcular **la** inversa d'una funció necessitarem que aquesta sigui **injectiva**. És a dir, de cada imatge podrem trobar només una antiimatge.

Càlcul de la gràfica de la funció inversa

Imaginem que tenim la funció de la Figura 2.11. Com veiem, per calcular la imatge d'un nombre tracem una recta vertical fins tocar la funció i, des d'allà, en tracem una altra d'hortizontal fins tocar l'eix d'ordenades (eix y). L'alçada a la que tallem aquest eix és la imatge de x. Per exemple, la imatge d'1 és $f(1) = 2.71$ (aproximadament).
Per calcular el valor de la inversa en algun nombre, ho fem al revés. Com la inversa porta les antiimatges a les imatges, hem d'associar un valor d'y a un d'x. Per fer-ho agafem un valor d'y, tracem una recta horitzontal fins tocar la funció i, des d'allà, en tracem una altra de vertical fins tallar l'eix d'abscisses (eix x). Per exemple, gràficament podem veure que l'antiimatge de 6 és 1.77 (aproximadament). Per tant podem escriure

$$f^{-1}(6) = 1.77$$

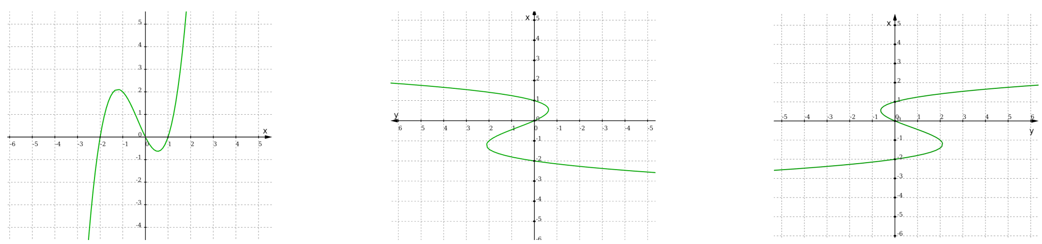
Vista així, el que fem per trobar la gràfica de la inversa és que l'eix vertical, y, passi a ser la variable (l'horitzontal) i l'eix horitzontal, x, passi a ser les imatges. Per tant, la gràfica de la inversa d'una funció la trobarem intercanviant els eixos, és a dir, girant 90° en sentit antihorari, tal com quedaria a la Figure 2.12a No obstant, en fer això, l'eix horitzontal ens queda "al revés" (els positius queden a l'esquerra) i per tant haurem de fer una simetria: plegar el pla per l'eix x, que serà el vertical. Així, la gràfica de la funció inversa ens quedarà com a la Figura 2.12b.

Fixem-nos que la funció la gràfica de la Figura 2.11 és injectiva i, per tant, en podem trobar la inversa. Vegem ara què passa si intentem fer el mateix amb una funció no injectiva.

(a) Gràfica girada 90°, l'eix y queda invertit. (b) Gràfica girada 90° després de la simetria.

Figura 2.12: Inversa de la funció de la Figura 2.11.

Exemple 2.6.5. *Considerem la funció de la Figura 2.13a. Si fem el mateix procediment que abans obtenim*



(a) Funció no injectiva (b) Gràfica girada 90° (c) Simètrica de la gràfica girada 90°.

Figura 2.13: Inversa d'una funció no injectiva

la gràfica de la Figura 2.13c, que no és una funció perquè tenim diferents valors (els que estan entre -0.5 *i* 2*, aproximadament) que tenen més d'una imatge, cosa que una funció no pot fer. Per tant, la nostra funció no és invertible en aquests valors.*

Càlcul analític de la funció inversa

Com hem vist, per tal de calcular la inversa el que fem és fer que y passi a ser la variable, i x la funció. Dit d'una altra manera, hem d'escriure x en funció de y. Veiem alguns exemples.

Exemple 2.6.6. *Considerem la funció*

$$f(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

Si ara diem $y = f(x)$*, per tal d'escriure* x *en funció de* y *el que hem de fer és aïllar* x *de l'equació*

$$y = \frac{x+3}{x-1}$$

$$\begin{aligned} y(x-1) = x+3 &\longrightarrow y(x-1) - x - 3 = 0 \longrightarrow yx - y - x - 3 = 0 \\ &\longrightarrow x(y-1) - y - 3 = 0 \longrightarrow x = \frac{y+3}{y-1} \end{aligned}$$

Per tant, la inversa quedarà

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-1}$$

Podem comprovar ara que, efectivament, en composar les dues funcions obtenim la identitat:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$
$$= \frac{\overbrace{\boxed{\frac{x+3}{x-1}}}^{y}+3}{\underbrace{\boxed{\frac{x+3}{x-1}}}_{y}-1} = \frac{\frac{x+3}{x-1}+\frac{3(x-1)}{x-1}}{\frac{x+3}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}$$
$$= \frac{\frac{x+3+3x-3}{x-1}}{\frac{x+3-x+1}{x-1}} = \frac{\frac{4x}{x-1}}{\frac{4}{x-1}} = \frac{\cancel{4}x\cancel{(x-1)}}{\cancel{4}\cancel{(x-1)}} = x$$

i efectivament és la inversa.

Vegem ara què passa si intentem calcular la inversa d'una funció no injectiva.

Exemple 2.6.7. *Considerem la funció*

$$f(x) = x^2$$

Efectivament, es tracta d'una funció no injectiva perquè hi ha diferents valors de x amb la mateixa imatge, per exemple

$$f(3) = f(-3) = 9$$

Per tal de calcular la inversa diem $f(x) = y$ i aïllem x de l'equació

$$y = x^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

Veiem que tenim dues possibles funcions inverses:

$$g(x) = \sqrt{y}$$
$$h(x) = -\sqrt{y}$$

Quina és la bona? En composar-les, hauríem d'obtenir la funció identitat. Vegem què passa quan les composem $f(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2}$$
$$(h \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right) = h\left(x^2\right) = -\sqrt{x^2}$$

Fixem-nos en dues coses:

1. *No s'ha simplificat l'arrel amb el quadrat, encara*

2. *Aparentment, la funció h no pot ser la inversa perquè apareix un signe negatiu davant de l'arrel quadrada.*

Aleshores, quina és la bona? Totes dues i cap. Per veure-ho la clau està en simplificar correctament l'arrel i el quadrat. Suposem que fos cert que

$$\sqrt{x^2} = x.$$

Aleshores, si $x < 0$ tenim un problema amb el signe. Vegem-ho amb $x = -3$:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

i ens ha sortit 3 *enlloc de* -3. *Per tant, si* $x<0$ *no és cert que* $\sqrt{x^2}=x$, *sinó que hauria de ser* $\sqrt{x^2}=-x$. *Per tant, tenim*

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & si\ x>0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$

Dit d'una altr manera,

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

Ara fem servir això allà on ens havíem quedat amb les composicions

$$(g\circ f)=\begin{cases} \boxed{x \quad si\ x>0} \\ -x \quad si\ x<0 \end{cases}$$

$$(h\circ f)=\begin{cases} -x \quad si\ x>0 \\ \boxed{x \quad si\ x<0} \end{cases}$$

Per tant, la funció g *és la inversa de* f *si* $x>0$, *i la funció* h *ho és quan* $x<0$.

Vegem un altre exemple

Exemple 2.6.8. *Considerem ara la funció*

$$f(x)=x^2-2x-4$$

Per tal de trobar la inversa volem aïllar x *de l'equació*

$$y=x^2-2x-4$$

$$x^2-2x-4-y=0\longrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(-4-y)}}{2}=\cdots=1\pm\sqrt{5+y}$$

Com per aïllar x *hem hagut de resoldre una equació de 2n grau, ens trobem en què tenim dues solucions possibles i, per tant, la inversa no és única ja que hem d'escollir una de les següents funcions*

$$g(y)=1+\sqrt{5+y}$$
$$h(y)=1-\sqrt{5+y}$$

Comprovem ara que totes dues inverteixen la funció f.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g\left(f\left(x\right)\right)=1+\sqrt{5+f(x)}\\ &=1+\sqrt{5+x^2-2x-4}=1+\sqrt{x^2-2x+1}\\ &=1+\sqrt{(x-1)^2}=1+|x-1|\end{aligned}$$

i si provem amb la funció $h(x)$ *obtenim*

$$\begin{aligned}(h\circ f)(x)&=h\left(f\left(x\right)\right)=1-\sqrt{5+f(x)}\\ &=1-\sqrt{5+x^2-2x-4}=1-\sqrt{x^2-2x+1}\\ &=1-\sqrt{(x-1)^2}=1-|x-1|\end{aligned}$$

Ara haurem de distingir quina d'elles és la inversa segons si $x>1$ *o bé* $x<1$:

$$(g\circ f)=\begin{cases} \boxed{1+(x-1)=x \quad si\ x>1} \\ 1-(x-1)=2-x \quad si\ x<1 \end{cases}$$

$$(h\circ f)=\begin{cases} 1-(x-1)=2-x \quad si\ x>1 \\ \boxed{1-\big(-(x-1)\big)=1+(x-1)=x \quad si\ x<1} \end{cases}$$

Per tant, g *és la invesa si* $x>1$ *i* h *ho és si* $x<1$.

2.7 Comença la teca: límits laterals

2.7.1 Intuïció i càlcul gràfic

Hem vist que hi ha punts que no són del domini, és a dir, valors de x pels quals la funció no ens retorna cap valor. Ens preguntem ara, què els passa a les funcions a prop d'aquests punts? Desapareixen de sobte, o fan alguna cosa especial a prop d'aquell valor?
Doncs la manera de saber-ho és "apropar-nos a aquell valor", sense arribar-hi, la qual cosa es fa mitjançant límits a un un cert valor: és a dir, veiem què li passa a la funció quan la variable x s'apropa infinitament a un cert valor. Per exemple, si volem veure què li passa a la funció

$$f(x) = \frac{x-3}{4}$$

quan x s'apropa a 5, escriurem

$$\lim_{x\to 5} f(x)$$

A la pràctica, la manera de calcular un límit així serà substituir x per 5, i veure què passa. En el cas anterior, la funció no té cap problema quan $x = 5$ i, per tant, en aquest cas, sembla raonable pensar que, quan x s'apropa a 5 el valor que obtenim és proper a $f(5) = \frac{1}{2}$. En aquest cas, això és cert, i direm que

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \frac{1}{2},$$

ja que la funció no té cap problema a prop de $x = 5$.

Observació. Si una funció no té "cap problema" en $x = a$, aleshores sempre tindrem

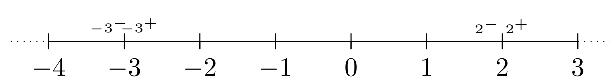
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

i el límit el calcularem simplement substituint x per a.

No obstant, la vida és dura, i de vegades no ho tindrem tan fàcil. De fet, el sentit de fer un límit a un cert valor és precisament quan la funció presenta algun problema en aquell valor.
Sovint ens trobarem en què haurem de distingir per quina banda ens apropem a un determinat valor, per la dreta o per l'esquerra? Per dreta o esquerra ens referirem a valors més grans (dreta) o més petits (esquerra). Això ho simbolitzarem amb el símbol $^+$ (dreta) o bé $^-$ (esquerra). Per exemple

Dreta del 2:	$\longrightarrow$	2^+	$\longrightarrow$	2.00001
Esquerra del 2:	$\longrightarrow$	2^-	$\longrightarrow$	1.9999
Dreta del -3:	$\longrightarrow$	-3^+	$\longrightarrow$	-2.999
Esquerra del -3:	$\longrightarrow$	-3^-	$\longrightarrow$	-3.00001

Gràficament:



De fet, sovint ens trobarem que segons si ens apropem per una banda o per l'altra, la funció farà coses diferents. Això ho distingirem mitjançant el que s'anomenen **límits laterals**. Per exemple, si volem veure com es comporta una funció quan x s'apropa a 1 per la dreta escriurem

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

i si volem veure què li passa quan ens apropem a 1 per l'esquerra:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Vegem alguns exemples.

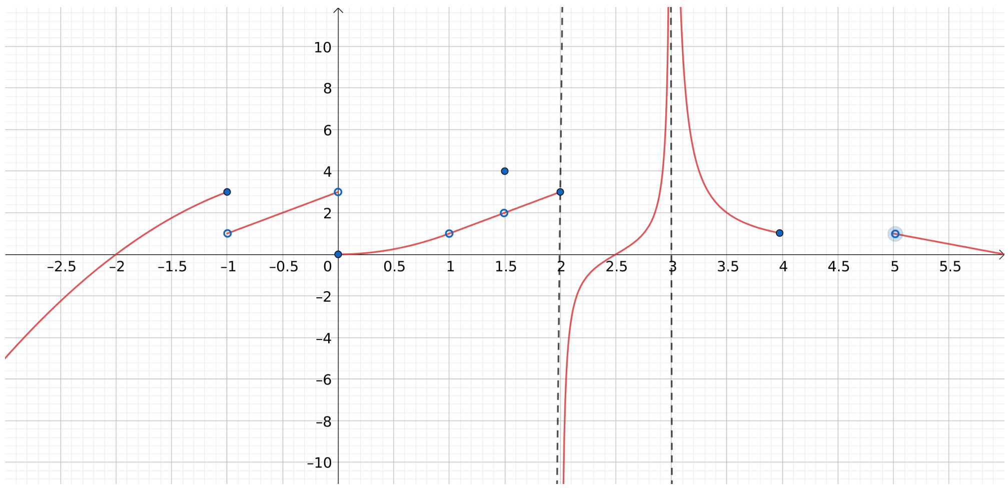


Figura 2.14

Exemple 2.7.1. *Considereu la funció de la Figura 2.14. Es demana*

a) *Trobeu les imatges de* -1, 0, 1, 1.5, 2, 3, 4 *i* 5

b) *Trobeu* $D(f)$

c) *Estudiar els límits laterals de la funció en aquests punts*

d) *Discutir si existeixen o no els límits de la funció en aquests punts*

Solució:

a) *Fixem-nos que als punts on ens demanen estudiar la funció, aquesta fa coses estranyes. Per tal de trobar les imatges, només cal que trobem l'alçada a la que tallem la funció. En cas de no tallar-la no hi haurà imatge, i en cas que ens trobem alguna cosa estranya, manaran els punts "negres", si n'hi ha. Per tant, tenim*

$$
\begin{aligned}
&f(-1) = 3\\
&f(0) = 0\\
&f(1) \nexists\\
&f(1.5) = 4\\
&f(2) \ = 3\\
&f(3) \nexists\\
&f(4) = 1\\
&f(5) \nexists
\end{aligned}
$$

Les imatges de 1 5 *no existeixen perquè hi ha una "bola blanca", i la imatge de* 3 *tampoc existeix perquè la recta* $x = 3$ *no talla la funció.*

b) *Pel que fa al domini, Fem un llistat dels punts pels quals no tenim antiimatge:*

$$\{1\}, \{3\}, (4, 5]$$

Per tant, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R}\backslash\Big(\{1\} \cup \{3\} \cup (4, 5]\Big) = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 4] \cup (5, \infty)$$

c) Estudiem ara els límits laterals:

$$\begin{array}{cc}
\lim_{x\to -1^-} f(x)=3 & \lim_{x\to -1^+} f(x)=1 \\
\lim_{x\to 0^-} f(x)=3 & \lim_{x\to 0^+} f(x)=0) \\
\lim_{x\to 1^-} f(x)=1 & \lim_{x\to 1^+} f(x)=1 \\
\lim_{x\to 1.5^-} f(x)=2 & \lim_{x\to 1.5^+} f(x)=2 \\
\lim_{x\to 2^-} f(x)=3 & \lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty \\
\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty & \lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty \\
\lim_{x\to 4^-} f(x)=1 & \lim_{x\to 4^+} f(x)\nexists \\
\lim_{x\to 5^-} f(x)\nexists & \lim_{x\to 5^+} f(x)=1
\end{array}$$

d) Fixem-nos que ens trobem en coses estranyes:

- *En $x=-1$ els dos límits laterals no coincideixen, perquè la funció fa un “salt”. Per tant, segons si ens apropem per l'esquerera o per la dreta obtenim valors diferents (3 i 1, respectivament). A més, la imatge de la funció és 3, que coincideix amb el límit de la funció per l'esquerra. Ens preguntem ara, existeix el límit de la funció quan $x\to -1$? Doncs* **no existeix**, *perquè depèn de si ens apropem per l'esquerra o per la dreta:*

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)\Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)\nexists$$

- *En $x=0$ tenim una situació similar. El límit quan $x\to 0$ no existeix perquè depen de per on ens apropem al 0.*
- *En $x=1$ tenim una situació curiosa. Els límits laterals coincideixen i valen 1, però la imatge d'1 no existeix. No obstant, com els límits laterals coincideixen, podem dir que el límit quan $x\to 1$ sí que existeix, perquè per totes dues bandes obtenim el mateix*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1\Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=1$$

- *En $x=1.5$ la situació encara és més estranya. Els límits laterals existeixen i valen el mateix, per tan el límit quan $x=1.5$ també existeix:*

$$\lim_{x\to 1.5} f(x)=2$$

  No obstant, la imatge del 1.5 no val 2 sinó 4.

- *En $x=2$ el límit per la dreta no existeix, perquè val $-\infty$. Per tant, el límit de la funció quan $x\to 2$ no existeix*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)\nexists \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x)\nexists$$

- *La situació en $x=3$ és curiosa. Hem de tenir clar que cap dels dos límits laterals existeix, perquè ens dóna $+\infty$ per les dues bandes. Per tant, el límit de la funció quan $x\to 3$ no existeix, però en canvi podem dir que*

$$\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$$

- *En $x=4$ i $x=5$ només tenim funció per una banda perquè la funció “desapareix”. Per tant, en cap d'ells podem dir que el límit de la funció quan $x\to 4$ o $x\to 5$ existeixi, perquè per una banda no existeix.*

2.7.2 Càlcul analític de límits laterals

Molt bé, però i si no tenim una representació gràfica de la funció? Com podem calcular-ne els límits laterals? A la pràctica, començarem substituint x pel valor que ens donen, és a dir, intentarem calcular-ne la imatge. Aleshores, ens podem trobar bàsicament en diferents situacions

- **Funcions definides a trossos:** si la funció canvia de branca just on volem calcular el límit haurem d'anar per una branca o per l'altra segons si estem a la dreta o l'esquerra
- En **funcions racionals:** si resulta que el denominador s'anul·la on volem calcular el límit, ens podem trobar en una de les dues situacions següents:
  - si **s'anul·la un denominador i el numerador no**, segurament tindrem que el límit donarà $+\infty$ o $-\infty$. El més probable és que el denominador canviï de signe i que això depengui de si ens apropem per una banda o per l'altra. En aquest cas haurem tenir en compte el següent
    $$\frac{\text{Nombre positiu}}{\text{Nombre molt proper a zero però positiu}} = \text{Nombre molt gran i positiu}$$
    $$\frac{\text{Nombre positiu}}{\text{Nombre molt proper a zero però negatiu}} = \text{Nombre molt gran però negatiu}$$
    Per exemple
    $$\frac{2}{0.00000001} = 2 \cdot 10^8$$
    $$\frac{3}{-0.0000000001} = -3 \cdot 10^{10}$$
    Per tant, d'alguna manera podem dir que, si $k > 0$,
    $$\frac{k}{0^+} \to +\infty$$
    $$\frac{k}{0^-} \to -\infty$$
  - En funcions racionals, ens pot passar que s'anul·lin tant numerador com denominador. En aquest cas ens trobarem amb una **indeterminació del tipus** $\frac{0}{0}$ que haurem de resoldre. Més endavant veurem com, però bàsicament el que farem serà factoritzar i simplificar per tal de calcular el límit.

Més enllà de les funcions racionals i les funcions definides a trossos, hi ha altre funcions que poden portar problemes a l'hora de calcular límits en algun punt, com ara els logaritmes o les arrels d'índex parell.

Vegem algun exemple.

Exemple 2.7.2. *Considereu la funció*
$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$
i anem a estudiar els límits de la funció als punts on aquesta tingui problemes.
Clarament, l'únic lloc on aquesta funció té problemes és en $x = 2$, perquè s'anul·la el denominador i el numerador no. Per tant tenim
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2}{0}$$
Ara bé, aquest límit és $+\infty$ o $-\infty$? Doncs això dependrà del signe del denominador. Fixem-nos que $x-2$ canvia de signe en $x = 2$, passa de ser negatiu a ser positiu. Per tant, si ens apropem per l'esquerra $x-2$ tendirà a 0 però per la seva esquerra (serà negatiu). En canvi, si ens apropem a 2 per la dreta, $x-2$ també s'apropa a 0, però per la dreta de 0 (és positiu). Per tant, podem escriure
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

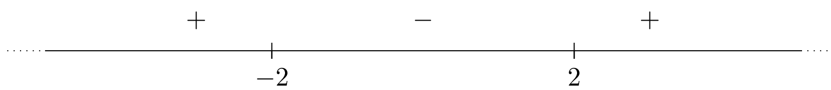
Exemple 2.7.3. *Estudieu el comportament de la funció als punts que no són del domini*

$$\frac{x-1}{x^2-4}$$

El domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

perquè el denominador s'anul·la en $x = \pm 2$. *Per estudiar els límits laterals, estudiem el canvi de signe del denominador. Ho podem fer "gràficament". Com el* $x^2 - 4$ *val* 0 *en aquests dos valors, podem avaluar l'expressió en punts a l'esquerra de* -2 *(per exemple en* $x = -3$*), entre* -2 *i* 2 *(per exemple en* $x = 0$*) i a la dreta de* 2 *(per exemple en* $x = 3$*). Així obtenim*



Per tant obtenim:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2.7.3 Quan cal fer els límits laterals?

Caldrà fer els límits laterals en un valor de x quan en apropar-nos per la dreta o per l'esquerra obtinguem valors diferents. Això podrà passar en els següents dos casos:

Límits laterals en $x = a$:

- Funcions definides a trossos
  Canvi de branca en $x = a$
  - $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a \\ h(x) & \text{si } x > a \end{cases}$
  - $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$
  - $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$
- En substituir $x = a$ el denominador s'anul·la
  però el numerador no.

2.7.4 Indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$

I què passa si ens trobem que se'ns anul·la el numerador i denominador alhora? Que donarà el límit? Doncs es tracta d'una indeterminació, perquè el límit podria sortir qualsevol cosa perquè això dependrà de qui es faci petit més ràpid, el numerador, el denominador o tots es fan petits igual de ràpid?

1. Si el numerador guanya ens sortirà 0. Per exemple, en apropar x a 0 en la funció

$$f(x) = \frac{x^2}{4x}$$

l'ordre del numerador és el doble de petit que el denominador. Dit d'una altra manera, el numerador té el doble de zeros que el denominador. Per exemple, si calculem

$$f(10^{-5}) = \frac{10^{-10}}{4 \cdot 10^{-5}}$$

per tant, com el numerador és sempre molt més petit que el denominador, el límit sortirà 0. Evidentment, podríem haver simplificat la funció per veure que ens dóna 0

2. Si el denominador guanya ens sortirà $\pm\infty$. Per exemple, en apropar x a 0 en la funció

$$f(x) = \frac{3x}{x^2}$$

ens trobem ara que l'ordre del denominador és el doble de petit que el numerador. És a dir, el denominador té el doble de zeros (a la dreta de la coma) que el numerador. Si avaluem f en $x = 10^{-5}$ obtenim

$$f(x) = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{10^{-10}}$$

i, efectivament, el denominador és molt més petit que el numerador. Per tant, el límit ens sortirà $\pm\infty$ (caldrà fer límits laterals perquè probablement hi haurà un canvi de signe).

3. Si tots dos empaten, ens sortirà un nombre. Que empatin voldria dir que tots dos són del mateix ordre (tenen el mateix nombre de zeros a la dreta de la coma) i per tant entre ells es manté una proporció (que serà el límit). Per exemple, si avaluem en $x = 10^{-5}$la funció

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2}$$

obtenim

$$f(10^{-5}) = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{10^{-5}}$$

i tant numerador com denominador tenen el mateix nombre de zeros. La proporció entre ells és sempre la mateixa, 3, ja que el numerador és el triple que el denominador. Per tant el límit serà 3. Evidentment, ja es veu clarament que si simplifiquem la funció obtenim 3

Resolució de la indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

En la majoria de casos en què ens trobarem aquest curs aquesta indeterminació l'obtindrem a través de fraccions algebraiques; és a dir, funcions que són el quocient de dos polinomis.
Si en fer el límit a un nombre ens trobem que tant el numerador com el denominador s'anul·len, ens estarem trobant en què tots dos polinomis (numerador i denominador) tenen una arrel en comú i, per tant, en factoritzar-los ens trobarem algun factor en comú. Dit d'una altra manera, la fracció es podrà simplificar.

Per tal de resoldre aquest tipus d'indeterminacions en fraccions algebraiques farem:

1. Factoritzar numerador i denominador

2. Simplificar tot el que es pugui fins que només s'anul·li un d'ells com a màxim.

3. Aleshores, un cop hem simplificat, podrem tenir 3 casos:

   3.1 Si només s'anul·la el numerador el límit serà 0

   3.2 Si només s'anul·la el denominador, el límit serà $+\infty$ o $-\infty$. Caldrà fer límits laterals (preferentment fent servir la versió simplificada per agilitzar els càlculs) i procedir com amb els límits on només s'anul·la el denominador.

   3.3 Si els factors problemàtics desapareixen tant del numerador com del denominador, aleshores tots dos empataven. En aquest cas, el límit el trobarem simplement avaluant, ja que la versió simplificada de la funció ja no tindrà cap problema en aquell valor de x

2.7.5 Resum

En fer límits de funcions racionals quan x tendeix un nombre, ens trobarem en alguna de les situacions següents:

- Si el **denominador no s'anul·la**: La funció no presenta cap problema, per tant el límit serà el que resulti de substituir x pel valor del on estiguem fent el límit.
- Si **només el numerador** s'anul·la: És un cas particular del cas anterior, el límit valdrà 0.
- Si **només el denominador** s'anul·la: Caldrà fer límits laterals per saber si per dreta i esquerra hi tenim $+\infty$ o $-\infty$.
- Si **tots dos** s'anul·len: Caldrà factoritzar el numerador i denominador i simplificar tot el que es pugui. Fent servir la versió simplificada ens trobarem en alguna de les dues condicions anteriors.

2.8 Continuïtat

Una funció és contínua en $x = a$ si $f(a)$ existeix i és el mateix valor al que ens apropem en apropar x a a, tant per una banda com per l'altra. Dit d'una altra manera, $f(x)$ és contínua en $x = a$ si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Si això no passa, aleshores tindrem un dels següents casos:

- Discontinuïtat **evitable**: Els límits laterals existeixen i són iguals, però no coincideixen amb la imatge de la funció:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

- Discontinuïtat de **salt**: Els límits laterals existeixen però són diferents

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \pm\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \pm\infty$$

- Discontinuïtat **asimptòtica**: Alguns dels límits laterals és + o $-\infty$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o bé} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

2.8.1 Punts problemàtics: candidats a discontinuïtats

Per trobar discontinuïtats en una funció hem d'obtenir uns valors candidats que caldrà estudiar, aquests seran:

- **Punts que no siguin del domini**. Principalment valors de x pels quals s'anul·la un denominador. En aquest cas, a funció segur que no serà contínua, però caldrà veure quin tipus de discontinuïtat té.
- **Canvis de branca**. Els valors pels quals es canvia de branca en una funció definida a trossos són origen de molts problemes. Malgrat poden ser del domini, en aquests valors pot passar de tot.

Al següent esquem hi tenim un resum del que pot passar segons el candidat a estudiar en funcions definides a trossos o en funcions racionals.

- En $x = a$ hi ha un canvis de branca en una funció definides a trossos
  - Funció contínua si
    $$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$
  - Discontinuïtat de salt si
    $$f(a^-) \neq f(a^+)$$
    i cap d'ells és infinit.
  - Discontinuïtat asimptòtica si algun lateral és $+\infty$ o $-\infty$
  - Discontinuïtat evitable si
    $$f(a^-) = f(a^+) \neq f(a)$$
- Si en una funció racional el denominador s'anul·la en $x = a$, però el numerador no
  - Discontinuïtat asimptòtica
- Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$ en una funció racional
  - Discontinuïtat asimptòtica si en simplificar sobreviu un factor que s'anul·la al denominador.
  - Discontinuïtat evitable altrament.

Cal tenir en compte que la classificació anterior no és exhaustiva, ja que podem trobar discontinuïtats donades per altres casuístiques, combinacions de les anteriors. Per exemple, les següents funcions no són funcions racionals, però tenen discontinuïtats que es poden estudiar fent servir l'esquema anterior.

- $e^{-\frac{1}{x^2}}$
- $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\ln(x-4)$
- $\dfrac{1}{\arctan(x)}$
- $\dfrac{x}{\sin(x)}$
- $\tan(x)$

2.9 Comportament a l'infinit

I què passa qua x creix? I quan x decreix? Què la funció? Creix? Decreix? S'estanca?

Això ho podem estudiar fent els límits quan $x \to \infty$ (quan x creix, és a dir, mirem què fa la funció cap a la dreta) i quan $x \to -\infty$ (quan x decreix, és a dir, mirem què la funció cap a l'esquerra).

- En fer un límit d'una funció a l'infinit
  $$\lim_{x\to\infty} f(x)$$
  farem servir els mateixos criteris que hem fet servir per successions: enlloc de fer servir n ara farem servir x, ja que en fer créixer x no importa si mirem només valors enters o no.

- En fer un límit al $-\infty$
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
  en el fons farem el mateix, tot i que haurem de vigilar amb els signes (especialment quan tinguem exponents senars), ja que ara x serà negativa. De fet es té la següent propietat:
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$$

Ens podrem trobar amb els següents casos:

$$
\begin{cases}
\bullet \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases}
+\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció “se'n va amunt”.} \\ \bullet \text{ la funció creix sense límit quan ens la mirem cap a la dreta.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada superiorment quan } x \to +\infty. \end{cases} \\
-\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció “se'n va avall”.} \\ \bullet \text{ la funció decreix sense límit quan ens la mirem cap a la dreta.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada inferiorment quan } x \to +\infty. \end{cases} \\
\in \mathbb{R} \begin{cases} \bullet \text{ La funció “s'estanca”, s'apropa a algun valor quan } x \to +\infty \\ \quad \text{(tindrà una asímptota horitzontal per la dreta)} \\ \bullet \text{ El límit existeix} \\ \bullet \text{ La funció està fitada quan } x \to \infty \text{ (superior o inferiorment)} \end{cases}
\end{cases} \\
\bullet \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases}
+\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció “ve d'amunt”} \\ \bullet \text{ la funció creix sense límit quan ens la mirem cap a l'esquerra.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada superiorment quan } x \to -\infty. \end{cases} \\
-\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció “ve d'avall”} \\ \bullet \text{ la funció decreix sense límit quan ens la mirem cap a l'esquerra.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada inferiorment quan } x \to -\infty. \end{cases} \\
\in \mathbb{R} \begin{cases} \bullet \text{ La funció “s'estanca”, s'apropa a algun valor quan } x \to -\infty \\ \quad \text{(tindrà una asímptota horitzontal per l'esquerra)} \\ \bullet \text{ El límit existeix} \\ \bullet \text{ La funció està fitada quan } x \to -\infty \text{ (superior o inferiorment)} \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

2.9.1 Límits a l'infinit de funcions racionals

Considerem una funció racional, és a dir, una funció del tipus

$$f(x) = \frac{ax^p + \cdots}{bx^q + \cdots} \text{ amb } a, b \neq 0$$

on p i q són els graus més alts del numeradors i denominadors, respectivament.
Aleshores tenim les següents possibilitats

$$
\begin{cases}
\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases}
\bullet \text{ Si } p > q \begin{cases} \bullet \text{ Si } \frac{a}{b} > 0 \Longrightarrow +\infty \\ \bullet \text{ Si } \frac{a}{b} < 0 \Longrightarrow -\infty \end{cases} \\
\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } p = q \Longrightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \Longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{Asímptota horitzontal per la dreta} \begin{cases} \bullet\ y = \frac{a}{b} \\ \bullet\ y = 0 \end{cases}
\end{cases} \\
\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases}
\bullet \text{ Si } p > q \begin{cases} \text{Caldrà mirar els signes del numerador i de-} \\ \text{nominador quan } x \text{ és gran però negativa,} \\ \text{tenint en compte si els graus són senars o} \\ \text{parells i els signes dels coeficients.} \\ \quad \bullet \text{ Si tenen el mateix signe} \Longrightarrow +\infty \\ \quad \bullet \text{ Si tenen signe diferent} \Longrightarrow -\infty \end{cases} \\
\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } p = q \Longrightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \Longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{Asímptota horitzontal per l'esquerra} \begin{cases} \bullet\ y = \frac{a}{b} \\ \bullet\ y = 0 \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

2.10 Asímptotes

Una asímptota és una recta a la qual la funció s'hi apropa tant com es vulgui. N'hi de tres tipus

$$
\begin{cases}
\text{Verticals} \begin{cases} \bullet \text{ són rectes de la forma } x = a \\ \bullet \text{ En fer } x \to a^+ \text{ o } x \to a^- \text{ el límit dóna } +\infty \text{ o } -\infty. \end{cases} \\
\text{Horitzontals} \begin{cases} \bullet \text{ són rectes de la forma } y = a \\ \bullet \text{ Poden ser per l'esquerra o per la dreta} \begin{cases} \bullet \text{ Si } \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Longrightarrow \\ \quad \text{Asímptota horitzontal } y = a \text{ per la dreta} \\ \bullet \text{ Si } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \Longrightarrow \\ \quad \text{Asímptota horitzontal } y = a \text{ per l'esquerra} \end{cases} \end{cases} \\
\text{Obliqües:} \begin{cases} \bullet \text{ Són rectes de la forma } y = mx + n \\ \bullet \text{ Poden ser tant per l'esquerra com per la dreta} \\ \bullet \text{ Cal trobar el pendent } (m) \text{ i després l'ordenada a l'origen } (n) \end{cases}
\end{cases}
$$

Capítol 3

Trigonometria

3.1 Sinus, cosinus i tangent d'angles aguts: a partir d'un triangle rectangle

3.1.1 Principals relacions entre les raons trigonomètriques

3.2 Sinus, cosinus i tangent de qualsevol angle

En aquesta secció us podeu ajudar de l'applet de Geogebra:

https://www.geogebra.org/m/sdkskczr

Per tal de definir el sinus, cosinus i tangent d'un angle qualsevol considerem la circumferència unitat, com a la Figura 3.1. El sinus i cosinus d'un angle qualsevol es defineixen com les coordenades x i y, respectivament,

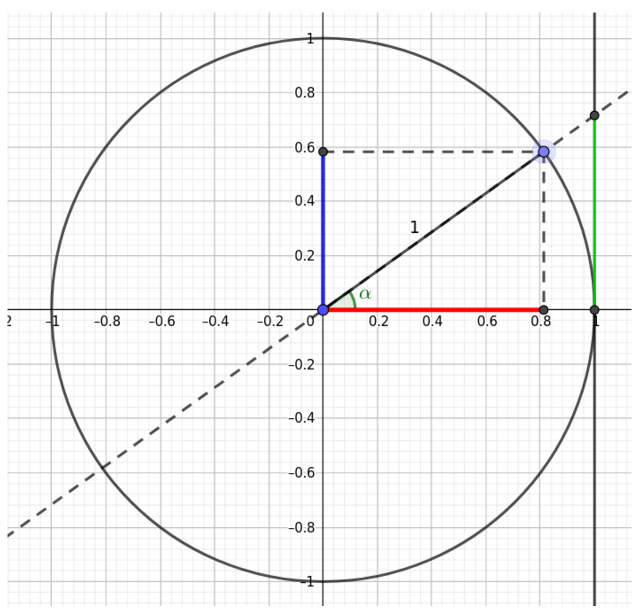


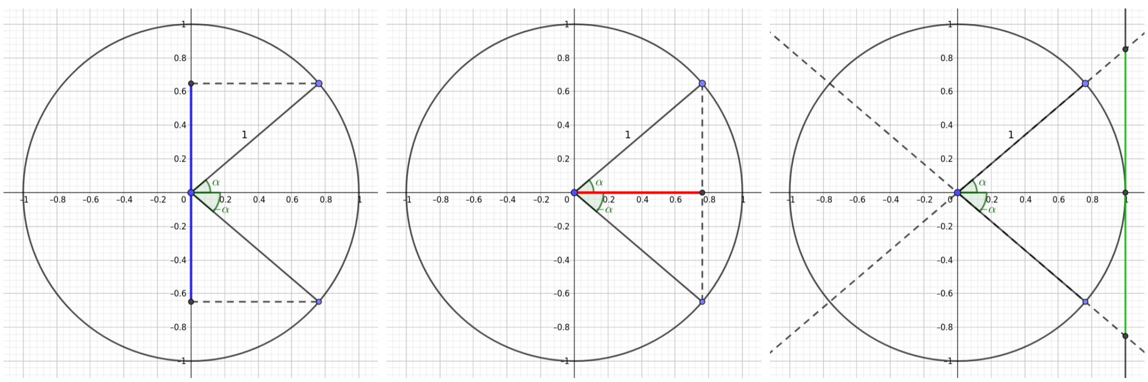
Figura 3.1: Sinus, cosinus i tangent d'un angle qualsevol.

del punt de la circumferència que defineix un sector circular d'aquell angle mesurat des de l'eix d'abscises en sentit anti-horari.

3.3 Identitats i relacions entre raons trigonomètriques de diferents angles

3.3.1 Angle oposat

L'angle oposat resulta de canviar el sentit de gir, d'anti-horari (positiu) a horari (negatiu), tal com es mostra a la Figura 3.2. De la Figura 3.2 clarament obtenim les següent identitats:



(a) Sinus de l'angle oposat (b) Cosinus de l'angle oposat (c) Tangent de l'angle oposat

Figura 3.2: Raons trigonomètriques de l'angle oposat

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

D'aquí es dedueix que el cosinus, com a funció, és una funció simètrica (o parella), mentre que el sinus i la tangent són funcions antisimètriques (o funcions senars).

3.3.2 Angles suplementaris

De la Figura 3.3 deduïm les següents igualtats:

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos(\alpha)$$

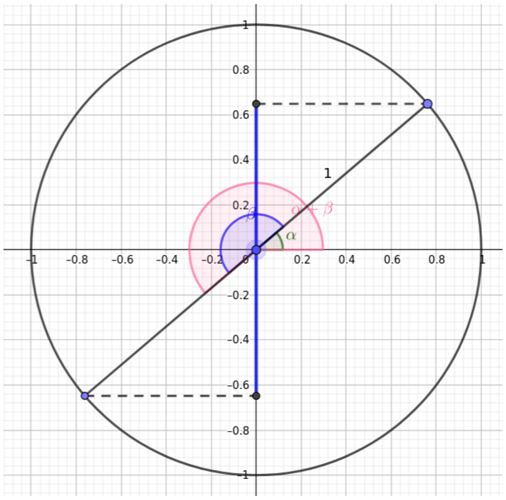
D'aquí traiem fàcilment que

$$\tan(\alpha \pm \pi) = \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

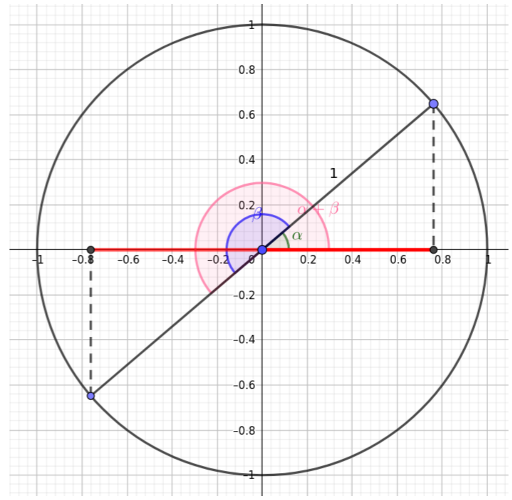
3.3.3 Angles complementaris

De la Figura 3.4 deduïm les següents igualtats:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$
$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$

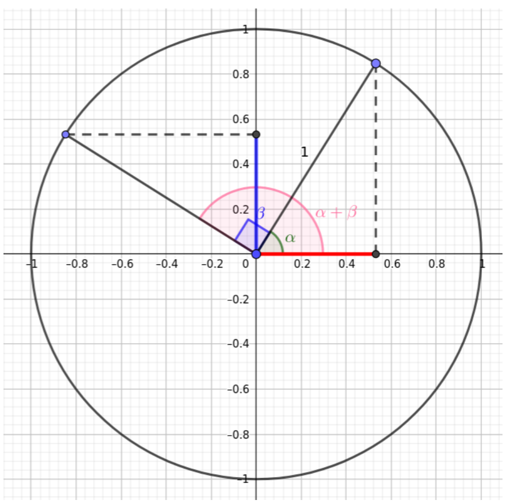


(a) Sinus de l'angle suplementari

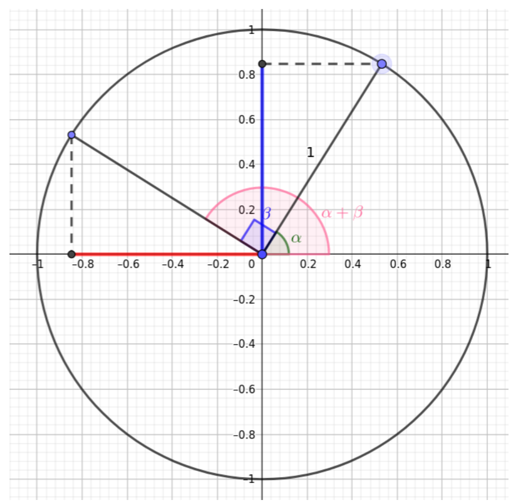


(b) Cosinus de l'angle suplementari

Figura 3.3: Raons trigonomètriques de l'angle suplementari



(a) Sinus de l'angle $\alpha + \frac{pi}{2}$



(b) Cosinus de l'angle complementari

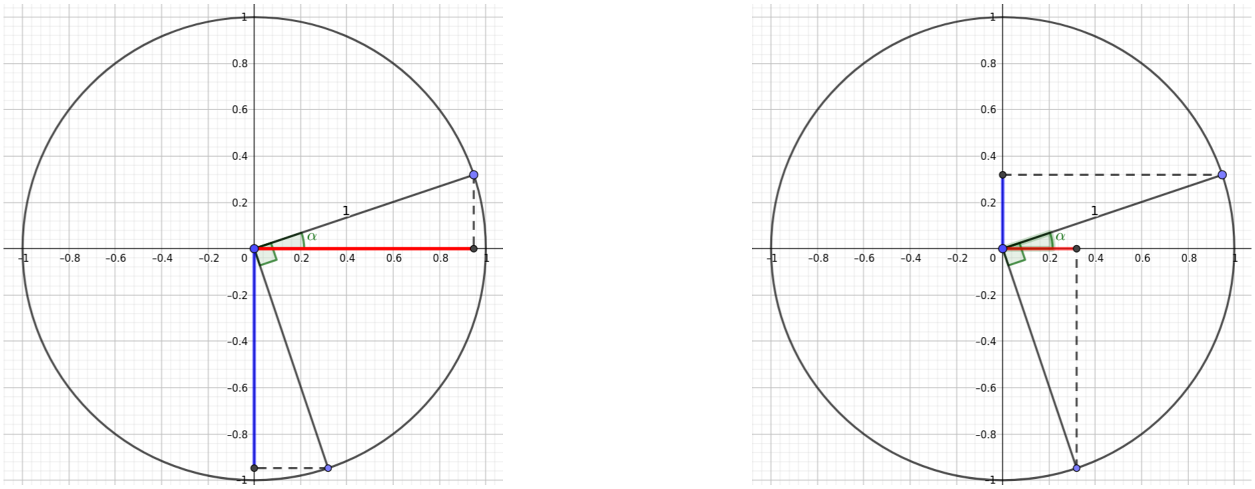
Figura 3.4: Raons trigonomètriques de l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Fàcilment podem deduir-ne la tangent:

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = \boxed{-\frac{1}{\tan(\alpha)}}$$

De la Figura 3.5 es dedueixen les següents identitats:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha)$$
$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha)$$



(a) Sinus de l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (b) Cosinus de l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Figura 3.5: Raons trigonomètriques de l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Altre cop, fàcilment en podem deduir la tangent:

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

3.4 Angle suma

Pel que segueix us podeu ajudar de l'applet de Geogebra

https://www.geogebra.org/m/ytp75rvt

De la Figura 3.6 tenim les següents identitats pel sinus i cosinus de l'angle suma:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Fixem-nos que fent servir aquestes fórmules podem deduir les igualtats de les seccions anteriors. Per exemple:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(\alpha)\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \cos(\alpha)\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} =$$
$$= -\cos(\alpha)$$

A partir d'aquestes fórmules es poden deduir totes les següents:

1. Angle resta:

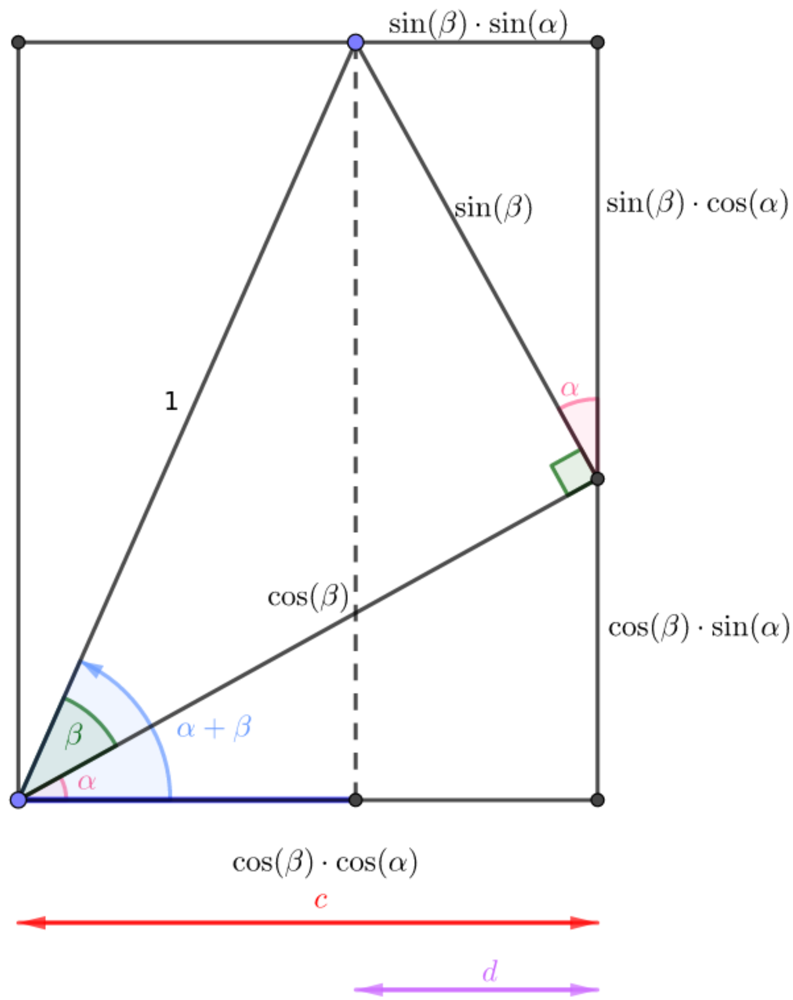


Figura 3.6: Sinus i cosinus de l'angle suma

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin(\alpha)\underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos(\beta)}+\cos(\alpha)\underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)}=$$
$$=\boxed{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\sin(-\beta)=$$
$$=\boxed{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

2. Angle doble:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \\ &= \boxed{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)} \\ \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \\ &= \boxed{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}\end{aligned}$$

3. Angle meitat. Primer escrivim:

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Fent servir que $1 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (sumant membre a membre amb l'equació anterior) obtenim

$$1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Aillant obtenim

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

Substituïnt a $1 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ també obtenim

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

Capítol 4

Geometria plana

4.1 Vectors al pla i espais vectorials

4.2 Vectors i punts al pla

La manera més típica de situar un punt al pla (per exemple en un full o en una pissarra) és mitjançant coordenades cartesianes. És a dir, donats uns eixos, horitzontal i vertical, i un punt on es tallen (anomenat origen), qualsevol punt al pla es pot situar (de manera única!) determinant la distància que s'ha de recórrer en direcció horitzontal i vertical respecte l'origen. Per conveni, la primera coordenada indica la direcció horitzontal, i la segona el vertical.
Per exemple, el punt $(2, 1)$ està situat a dues unitats en sentit horitzontal en sentit positiu (dreta) i una en direcció vertical en sentit positiu (amunt). Fixeu-vos que, per arribar a aquest punt des de l'origen, l'ordre dels desplaçaments no importa; és a dir, es pot fer primer el moviment vertical i després l'horitzontal o bé a la inversa. Això té a veure amb la propietat commutativa de la suma de vectors, com es veurà més avall.
Fixeu-vos que es poden afegir tantes coordenades com es vulguin. Per exemple, el punt $(1, 2, -1)$ es podria interpretar com un punt a l'espai situat a una unitat en la direcció "ample", dues unitats en direcció "profunditat" i una unitat en direcció vertical (alt) però en sentit negatiu (avall). Si a aquest mateix punt li afegim una altra coordenada, $(1, 2, -1, 30)$, aquesta quarta coordenada seria més difícil d'interpretar en un sentit geomètric clàssic, però per exemple podria donar-nos la temperatura del punt $(1, 2, -1)$.

Una altra manera d'interpretar els punts al pla (o a l'espai o on sigui) és a través dels vectors. Per exemple, $(1, 2)$ podria ser tant un punt com un vector.

4.2.1 Espais vectorials

Què és un espai vectorial? La manera més típica i senzill d'introduir els espais vectorials és a través dels vectors. Els vectors no són més que elements (nombres reals) ordenats ficats dins d'un parèntesis i separats per comes. Des d'un punt de vista geomètric, aquests elements es poden interpretar com "coordenades". Per exemple, el vector $(2, 1)$ es pot interpretar com el punt Un espai vectorial és un conjunt d'elements on s'hi poden definir una

4.3 Dependència/independència lineal

Imaginem que tenim uns quants vectors: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots \vec{v}_n$. Informalment, direm que són linealment dependents si podem escriure algun d'ells com a combinació lineal dels altres. És a dir, podem escriure (per exemple el primer) de la següent manera:

$$\vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \cdots \lambda_n \vec{v}_n$$

4.4 El producte escalar

4.5 Rectes al pla

4.5.1 Diferents expressions d'una recta

La manera més "natural" d'escriure una recta és en forma **geomètrica**, és a dir, donant un punt de pas $P = (p_x, p_y)$ i una direcció (vector director), $v = (v_x, v_y)$. En sumar al punt P múltiples del vector v anem generant els diferents punts de la recta:

$$(x, y) = (p_x, p_y) + \lambda \cdot (v_x, v_y),$$

on λ és un paràmetre (un nombre real) que pot prendre qualsevol valor. En variar el paràmetre λ anem allargant o escurçant el vector v. En sumar-ho al punt de pas s'obtenen els diferents punts de la recta.

L'expressió vectorial d'una recta no és única; és a dir, com a punt de pas es pot considerar qualsevol punt de la recta i, com a vector director, qualsevol múltiple de v. Així, les rectes

$$\begin{aligned} r:\ (x, y) &= (1, -1) + \lambda \cdot (1, 2) \\ l:\ (x, y) &= (2, 1) + \lambda \cdot (2, 4) \end{aligned}$$

són la mateixa, ja que el punt de pas de la segona és un punt de la primera

$$(2, 1) = (1, -1) + 1 \cdot (1, 2)$$

i el vector director de la segona és un múltiple del de la primera:

$$(2, 4) = 2 \cdot (1, 2)$$

En general, veure que un vector és múltiple d'un altre és fàcil i es pot fer sempre a vista. No obstant, per veure que un punt pertany a una recta requereix una mica de càlcul quan aquesta està en forma vectorial (vegeu l'exercici 1). En aquest cas hem tingut sort i hem vist que fent $\lambda = 1$ a la recta r s'obté el punt de pas de la segona. En general, caldrà plantejar un sistema i veure si té solució o no.

L'expressió vectorial d'una recta es pot entendre també com dues equacions (lineals) i tres incògnites, x, y i λ. Si igualem les components

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$$

Escrites d'aquesta manera, direm que les rectes estan en forma **paramètrica**. Es diu així perquè d'aquesta manera es veu explícitament com les coordenades x i y depenen d'un paràmetre λ que es pot variar lliurement. En poder-se variar lliurement, els paràmetres es poden "transformar"; és a dir, podem canviar de paràmetre si volem. Per exemple, en fer el canvi

$$\lambda \longrightarrow 1 + 2\lambda$$

a la recta r obtenim l'expressió de la recta l. Per fer-ho simplement escrivint $1 + 2\lambda$ allà on trobem λ:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \longrightarrow 1 + 1 + 2\lambda = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \longrightarrow -1 + 2(1 + 2\lambda) = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

i obtenim la recta l i, per tant, són la mateixa recta. Aquest "canvi" de paràmetre s'anomena **reparametrització**. Evidentment aquest canvi de paràmetre també es pot aplicar directament a l'expressió vectorial de la recta:

$$\begin{aligned}(1,-1)+\underbrace{(1+2\lambda)}_{\lambda\to 1+2\lambda}\cdot(1,2) &= (1,-1)+(1,2)+2\lambda(1,2) = \\ &= (2,1)+\lambda(2,4).\end{aligned}$$

L'equació vectorial d'una recta és molt còmode perquè ens dóna un punt de pas i un vector director sense que haguem de fer cap càlcul. Ara bé, és una equació (perquè hi ha el símbol =) entre vectors (d'aquí el nom) i, per tant... A l'hora de trobar la intersecció amb altres rectes o corbes Això es reflecteix en el fet que hi ha un grau de llibertat de més: de les tres "variables", x, y i λ en sobra una, ja que una recta només té un grau de llibertat (dimensió 1). Si aïllem el paràmetre λ

Exercici 1. *Donades les rectes*

$$\begin{aligned} r :&(x,y) = (1,3)+\lambda(-4,2)\\ s :&(x,y) = (1,3)+\lambda(-2,4)\\ l :&(x,y) = (3,2)+\lambda(2,1)\end{aligned}$$

Solució. Molt fàcil.

Exercici 2. *Un mòbil avança per la recta*

$$(x,y) = (1,-1)+t\cdot(1,2),$$

on t és el paràmetre "temps" en segons i la resta d'unitats estan en m. Indiqueu

1. *Quina és la seva posició inicial?*
2. *En quina posició es trobarà al cap de dos minuts?*
3. *Com el mòbil es mou sobre una recta, el moviment és rectilini. És a velocitat constant? En cas afirmatiu, quina és la seva velocitat? I el mòdul de la velocitat?*
4. *Quina distància ha recorregut durant els primers dos minuts?*
5. *Introduïm ara una acceleració constant al moviment de la següent manera:*

$$(x,y) = (1,-1)+t(1,2)+t^2a,$$

   on a és un vector. Quines de les següents acceleracions faran que el moviment segueixi sent rectilini?

   i) $a=(3,6)$
   ii) $a=(-1,-2)$
   iii) $a=(2,3)$

4.5.2 Distància d'un punt a una recta

Podeu seguir la obtenció de la fórmula mitjançant l'applet de Geogebra

https://www.geogebra.org/m/wd3ret7c

Capítol 5

Funcions exponencials i logaritmes

5.1 Bla bla bla

Les funcions exponencials són funcions on la variable independent, x, apareix a l'exponent d'una potència; és a dir, són funcions del tipus

$$f(x) = a^x$$

on $a > 0$.
Les funcions exponencials presenten algunes peculiaritats i problemes interessants. Per exemple

- sabem avaluar la funció en nombre enters i racionals seguint les següents propietats. Si n i m són nombre naturals, aleshores sabem que

  1. $f(n) = a^n$
  2. $f(-n) = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
  3. $f\left(\dfrac{n}{m}\right) = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^m}$

  però i si x és un nombre irracional? Com es calcula a^x? Doncs la funció s'estén per continuïtat.

- Per què es demana que $a > 0$? I si la base és negativa? Doncs en aquest tindríem molt problemes.

  1. Sabem calcular $f(n)$ sense problemes, tot i que la funció canvia de signe a cada nombre natural, perquè si n és senar $f(n)$ serà negatiu, però si n és parell la funció serà positiva.
  2. Si $x = \dfrac{n}{m}$ és un nombre irracional sabem que $f\left(\dfrac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{a^n}$. Però i si m és parell i n senar? Això no ho podrem calcular als reals perquè les arrels d'índex parell de nombres negatius són nombre complexos. Com a conseqüència, qualsevol nombre racional de la forma $\dfrac{n}{m}$ amb m parell no és del domini. Per tant, la funció $f(x)$ està "plena de forats".

5.2 Algunes propietats importants

Evidentment, les funcions exponencials compleixen les propietats de les potències; en termes de funció es poden escriure de la següent manera

1. $a^0 = 1 \Longrightarrow f(0) = 1$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Longrightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \Longrightarrow f(x \cdot y) = f(x)^y = f(y)^x$

Una altra propietat interessant de les funcions exponencials té a veure amb la popular frase "créixer exponencial ment". Això el que ve a dir és que les funcions exponencials creixent molt ràpid; de fet, si $a > 1$, creixen més ràpid que qualsevol potència, per gran que sigui l'exponent. Dit d'una altra manera, no importa quant gran sigui n ni quant proper sigui a a 1, sempre es compleix que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$$

Per exemple, si escollim $a = 1.01$ i $n = 100$, existeix un valor d'x a partir del qual es compleix que

$$1.01^x > x^{1000}$$

5.3 Funcions exponencials de base positiva

Assumint $a > 0$, una funció exponencial té comportaments marcadament diferents segons

$$\begin{cases} \bullet\ \text{Si } a > 1 \begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{a^x} = 0 \end{cases} \\ \bullet\ \text{Si } 0 < a < 1 \begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \\ \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{a^x} = \infty \end{cases} \\ \bullet\ \text{Si } a = 1 \Longrightarrow a^x = 1^x = 1,\ \forall x \end{cases}$$

5.3.1 La funció e^x

Una de les funcions més "especials" és la funció e^x, on la base és el nombre irracional e. Recordem que el nombre e es defineix com el límit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ara bé, existeix una manera alternativa (i més convenient) de definir el nombre e, que és com la suma infinita (sèrie)

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Fent servir aquesta definició del nombre e, la funció e^x es defineix com una *sèrie de potències*:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fixem-nos que, aquesta suma, per gran que sigui x, convergeix (es pot sumar fins l'infinit s'acaba "estancant") perquè el factorial és molt més gran que la potència i "*al final, el que sumem és prou petit per aturar la suma*".

5.3.2 Càlcul a la calculadora

Les calculadores científiques poden calcular una funció exponencial, i solen tenir una tecla destinada a fer-ho.

- a^x. Per calcular una potència de base qualsevol les calculadores solen tenir una tecla amb el símbol $\wedge$, que vol dir *elevar*. Normalment es dóna primera la base, després la tecla "elevar" seguit de l'exponent. Si volem calcular 3^5 pitjarem el 3, després el símbol $\wedge$ seguit del 5. De vegades és al revés. La manera de saber-ho en la nostra calculadora és calcular per exemple 2^0, que hauria de donar 1.

- e^x. Normalment les calculadores científiques tenen una tecla reservada a la funció e^x, que sovint requereix l'ús del "shift" (apareix en groc com a tecla secundària). Normalment donarem l'exponent seguit de la tecla e^x.

5.4 Logaritmes: la inversa d'una exponencial

Ens preguntem ara, quina és la funció inversa de l'exponencial? És a dir, com podem aïllar x de l'equació

$$a^x = y \Longrightarrow x = ?$$

Observació. Podem tenir la temptació de fer servir la funció $\sqrt[x]{\ }$ a les dues bandes, però això aïllaria a i no x:

$$\sqrt[x]{a^x} = \sqrt[x]{y} \Longrightarrow a = \sqrt[x]{y}$$

Necessitem una nova funció que pugui aïllar x de l'equació anterior. Aquesta ha de respondre a la pregunta, "**a quin nombre hem d'elevar** a **per obtenir** y**"?** Doncs aquest nombre s'anomena "**logaritme en base** a **de** y", i s'escriu $\log_a y$:

$$\boxed{a^x = y \Longleftrightarrow x = \log_a y}$$

Fixem-nos que, en ser una funció la inversa de l'altra, es compleix el següent:

1. $a^{\log_a x} = x$, perquè *si elevem* a *al nombre que hem d'elevar* a *per obtenir* x *obtindrem* x.
2. $\log_a (a^x) = x$, perquè *el nombre al que hem d'elevar* a *per obtenir* a^x *és* x.

És a dir, una desfà el que fa l'altra.

Existeixen dues bases especials $a = 10$ i $a = e$, per les quals el logaritme rep una nomenclatura especial:

- Si la base del logaritme tindrem molt problemes, perquè
- Si $a = 10$: $\boxed{\log_{10} x = \log x}$. És a dir, si no hi ha res a la base, és que aquesta és 10. Aquest logaritme s'anomena *logaritme decimal*.
- Si $a = e$: $\boxed{\log_e x = \ln x}$. S'anomena "*logaritme neperià*" o "*logaritme natural*".

5.4.1 Propietats dels logaritmes

Les propietats més típiques dels logaritmes són les que es deriven de les propietats de les potències.

1. $a^0 = 1 \Longrightarrow \boxed{\log_a(1) = 0}$
2. $a^1 = a \Longrightarrow \boxed{\log_a(a) = 1}$
3. $1^m = 1 \Longrightarrow \boxed{\log_1(n)\nexists}$ si $n \neq 1$
4. $\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$. Per veure-ho fem el següent. Suposem que sabem el valor de $\log_a x$ i de $\log_a y$, com podem calcular $\log_a(x \cdot y)$? Per trobar-ho ens preguntem a quin nombre hem d'elevar a per obtenir $x \cdot y$:

   $$a^? = x \cdot y$$

   Si diem

   $$m = \log_a x$$
   $$n = \log_a y$$

i la qual cosa ens diu que

$$a^m = x$$
$$a^n = y$$

Si multipliquem ara $x \cdot y$ obtenim

$$x \cdot y = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Per tant, el nombre al que hem d'elevar a per obtenir $x \cdot y$ és $m + n$:

$$\log_a (x \cdot y) = m + n$$

Si recordem que $m = \log_a x$ i $n = \log_a y$ obtindrem el que volíem:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

5. Argumentant de manera molt semblant a l'anterior, obtenim que $\boxed{\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y}$

6. I també $\boxed{\log_a(x^n) = n \log_a x}$

En certa manera, el logaritme intercanvia exponents per bases.

1. Transformen productes en sumes.
2. Transformen divisions en restes.
3. Transformen potències en funcions lineals (proporcions).

Una de les propietats més interessants dels logaritmes és la darrera. El fet que transformin potències en proporcions fa que siguin molt útils a l'hora de representar coses se separen exponencialment en coses se separen linealment. Observem les següent taula:

$$\begin{array}{rl} 10 = 10^1 & \log(10^1) = 1 \\ 100 = 10^2 & \log\left(10^2\right) = 2 \\ 1000 = 10^3 & \log\left(10^3\right) = 3 \\ 10000 = 10^4 & \log\left(10^4\right) = 4 \end{array}$$

Per tant, en representar coses en un eix logarítmic, passem d'una escala exponencial a una escala lineal, perquè els logaritmes transformen potències en proporcions. És a dir, tot allò que creix exponencialment, en representar-ho en una escala logarítmica passa a ser una recta.
Hi ha diverses magnituds físiques, químiques o en enginyeria que es comporten d'aquesta manera:

- El **PH** es defineix com $\log [OH^-]$ (el logaritme decimal de la concentració d'ions OH^-.)
- Els **decibels (dB)** es representen en escala logarítmica, ja que la relació entre la potència i l'amplitud de so és exponencial
- **L'escala de Richter** es representa en escala logarítmica, perquè la relació que hi ha entre l'amplitud de les vibracions i la distància a l'epicentre és exponencial
- **Línies del temps**. Sovint ens trobem que en mirar-nos la història (de l'univers, de la humanitat o del nostre planeta), les coses "interessants" triguen molt a passar i passen totes en moments propers al temps. Això fa que en representar-les sobre eixos lineals s'acumulin i no puguem veure-les bé, mentre que ens quedem amb espais de temps molt llargs on "no passa res". Els logaritmes ens donen la possibilitat de canviar l'escala dels eixos i "separar" els esdeveniments.

5.5 El logaritme com a funció

Considerem la funció

$$f(x) = \log_a(x)$$

amb $a > 0$ i $a \neq 1$. Fixem-nos que

- Si $a < 0$, el logaritme no estarà definit només per alguns valors. Per exemple, l'equació $(-2)^x = 4$ té solució, però l'equació $(-2)^x = 8$ no en té. Per tant, $\log_{-2} 4 = 2$ però $\log_{-2} 8$ no és real. Per evitar problemes, sempre considerarem $a > 0$.
- A més, necessitarem $a \neq 1$. En cas contrari, el logaritme no és una funció perquè l'equació $1^x = c$ no té solució si $c \neq 1$, però en canvi té infinites solucions si $c = 1$. Per tant, $\log_1(x)$ no és una funció

Fixem-nos que, independentment del valor de a, aquesta funció sempre compleix:

$$f(1) = 0$$

perquè es compleix que $a^0 = 1$.

5.5.1 Domini

Considerem $a > 0$ però $a \neq 1$.

- En avaluar $\log_a(x)$ per alguna x ens estem preguntant a quin nombre hem d'elevar a per obtenir x. Com a és positiva, el valor de x també haurà de ser positiu, perquè en elevar a a qualsevol nombre només obtenim nombres positius. Per tant, x ha de ser positiva.
- Ens preguntem ara si podem calcular $\log_a(0)$. És a dir, a quin nombre hem d'elevar a per obtenir 0? Doncs no existeix, perquè a elevat a qualsevol nombre mai serà 0.

Per tant:

$$D(f) = (0, +\infty)$$

5.5.2 Comportament a prop del 0

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} \bullet \text{ Si } a > 1\text{: } a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{\infty}} = 0 \Longrightarrow -\infty \\ \bullet \text{ Si } 0 < a < 1\text{: } a^{\infty} = 0 \Longrightarrow +\infty \end{cases}$$

Per tant, en qualsevol cas, el logaritme d'una base positiva té sempre una asímptota vertical en $x = 0$. Fixem-nos que el límit per l'esquerra del 0 no es pot fer perquè els nombres negatius no són del domini.

5.5.3 Comportament a l'infinit

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} \bullet \text{ Si } a > 1\text{: } a^{+\infty} = +\infty \Longrightarrow +\infty \\ \bullet \text{ Si } 0 < a < 1\text{: } a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{\infty}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow -\infty \end{cases}$$

5.5.4 Propietats del logaritme com a funció

Les propietats que hem vist abans, en termes de funcions es poden escriure com:

1. $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ (el logaritme d'un producte és la suma de logaritmes)
2. $f(x^b) = b \cdot f(x)$ (el logaritme d'una potència és una proporció)
3. $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$ (el logaritme de la divisió és la diferència de logaritmes)

Capítol 6

Resums

6.1 Geometria plana

6.1.1 Vectors i producte escalar

Vectors i producte escalar

- Vector que va d'A a B
  $\overrightarrow{AB} = B - A$
- Punt mig del segment AB:
  $\frac{A+B}{2}$
- Divisió d'un segment en n trossos:
  $A + i \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{n}$
  En variar i s'obtenen els diferents punts
- Producte escalar entre:
  $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ i $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$
  - Es defineix com
    $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2$
  - i és igual a:
    $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \|v\| \cdot \|u\| \cdot \cos(\theta)$
    on θ és l'angle que formen
  - Si és $= 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$
  - Si és < 0 formen un angle $> 90°$
  - Si és > 0 formen un angle $< 90°$

6.1.2 Rectes

Recta passant per
$P = (x_0, y_0)$
i vector director
$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$

- Vectorial:
  $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2)$
- Paramètrica (igualant les components):
  $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases}$$
- Contínua (aïllant λ i fent igualació):
  $$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{x - y_0}{v_2}$$
  No és possible si
  - $v_1 = 0 \Longrightarrow$ Recta vertical
  - $v_2 = 0 \Longrightarrow$ Recta horitzontal
- General (aïllant 0 a una banda):
  $Ax + By + C = 0$
  - $(A, B) \perp \overrightarrow{v}$
  - C regula el punt de pas

Recta passant per $P=(x_0,y_0)$ i pendent m
- Explícita (aïllant y): $y = mx + n$
- Punt pendent: $y - y_0 = m(x - x_0)$

No és possible si la recta **no és vertical**

Distàncies
- Entre dos punts $P=(p_1,p_2)$ i $Q=(q_1,q_2)$:
  $d(P,Q) = d(Q,P)) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$
- Entre un punt $P=(p_1,p_2)$ i una recta $r:\ Ax+By+C=0$:
  $d(P,r) = \dfrac{|Ap_1+Bp_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- Entre dues rectes r i s
  $d(r,s) = d(P,s)$ on $P \in r$ és un punt qualsevol

Angles
- Entre dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$:
  $\cos(\theta) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|}$
- Entre dues rectes:
  - Amb vectors directors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ (si està en contínua, vectorial o paramètrica)
    Angle entre $\vec{v}$ i $\vec{u}$
  - Amb vetors perpendiculars $\vec{v}$ i $\vec{u}$ (si està en general)
    Angle entre $\vec{v}$ i $\vec{u}$
  - Amb l'eix d'abscises
    - Angle amb la recta $y=0$
      Fent servir v.dir$=(1,0)$
      o v.ortogonal$=(0,1)$
    - Si es té el pendent:
      $\tan(\theta) = m$

Posició relativa entre dues rectes
$r:\ A_1x+B_1y+C_1=0$
$s:\ A_2x+B_2y+C_2=0$
- Diferents direccions
  $A_1\cdot B_2 \neq A_2\cdot B_1$
  Secants (es tallen, S.C.D.)
  - Perpendiculars
    $(A_1,B_1)\cdot(A_2,B_2)=0$
  - No perpendiculars
    $(A_1,B_1)\cdot(A_2,B_2)\neq 0$
- Mateixa direcció
  $A_1\cdot B_2 = A_2\cdot B_1$
  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$
  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}$
  vectors directors l.d.
  vectors perpendiculars l.d.
  mateix pendent
  - Si tenen algun punt en comú
    Són la mateixa (S.C.I)
    $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$
    $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
  - Si no tenen cap punt en comú
    Paral·leles (S.I.)
    $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{C_2}{C_1}$
    $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

6.1.3 Circumferències

Circumferència de centre $C=(a,b)$ i radi R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

- Posició relativa amb punt $P = (p_1, p_2)$
  - Punt interior
    - $(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 < R^2$
    - $d(P, C) < R$
  - Punt exterior
    - $(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 > R^2$
    - $d(P, C) > R$
  - Punt pertanyent
    - $(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 = R^2$
    - $d(P, C) = R$

- Posició relativa amb recta r
  - No es tallen
    - $d(r, C) > R$
    - El sistema no té solució
  - Secants
    - $d(r, C) < R$
    - El sistema té dues solucions
  - Tangents
    - $d(r, C) = R$
    - El sistema té una única solució

- Posició relativa entre dues circumferències
  - Tangents
    - Interiors
      - Sistema té una única solució i el centre de la petita és interior a la gran
      - $R_{\max} = d(C_1, C_2) + R_{\min}$
    - Exteriors
      - Sistema té una única solució i el centre d'una és exterior a l'altra
      - $d(C_1, C_2) = R_1 + R_2$
  - No es tallen
    - Interiors
      - Sistema no té solució i el centre de la petita és interior a la gran
      - $R_{\max} > d(C_1, C_2) + R_{\min}$
    - Exteriors
      - Sistema no té solució i el centre d'una és exterior a l'altra
      - $d(C_1, C_2) > R_1 + R_2$
  - Secants
    - Interiors
      - Sistema té dues solucions el centre de la petita és interior a la gran
      - $R_{\max} - R_{\min} < d(C_1, C_2) < R_{\max}$
    - Exteriors
      - Sistema té dues solucions el centre d'una és exterior a l'altra
      - $R_{\max} < d(C_1, C_2) < R_1 + R_2$
    - Ni interiors ni exteriors
      - Sistema té dues solucions el centre d'una pertany a l'altra
      - $R_{\max} = d(C_1, C_2) < R_1 + R_2$

6.2 Funcions

6.2.1 Continuïtat

- Es contínua $x = a$ si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- Discontinuïtat **evitable**: Els límits laterals existeixen i són iguals, però no coincideixen amb la imatge de la funció:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

- Discontinuïtat de **salt**: Els límits laterals existeixen però són diferents

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \pm\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \pm\infty$$

- Discontinuïtat **asimptòtica**: Alguns dels límits laterals és + o $-\infty$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o bé} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$