# Capítol 5

# Funcions exponencials i logaritmes

## 5.1 Bla bla bla

Les funcions exponencials són funcions on la variable independent, $x$, apareix a l'exponent d'una potència; és a dir, són funcions del tipus

$$f(x) = a^x$$

on $a > 0$.
Les funcions exponencials presenten algunes peculiaritats i problemes interessants. Per exemple

- sabem avaluar la funció en nombre enters i racionals seguint les següents propietats. Si $n$ i $m$ són nombre naturals, aleshores sabem que

    1. $f(n) = a^n$
    2. $f(-n) = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
    3. $f\left(\dfrac{n}{m}\right) = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^m}$

  però i si $x$ és un nombre irracional? Com es calcula $a^x$? Doncs la funció s'estén per continuïtat.

- Per què es demana que $a > 0$? I si la base és negativa? Doncs en aquest tindríem molt problemes.

    1. Sabem calcular $f(n)$ sense problemes, tot i que la funció canvia de signe a cada nombre natural, perquè si $n$ és senar $f(n)$ serà negatiu, però si $n$ és parell la funció serà positiva.
    2. Si $x = \dfrac{n}{m}$ és un nombre irracional sabem que $f\left(\dfrac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{a^n}$. Però i si $m$ és parell i $n$ senar? Això no ho podrem calcular als reals perquè les arrels d'índex parell de nombres negatius són nombre complexos. Com a conseqüència, qualsevol nombre racional de la forma $\dfrac{n}{m}$ amb $m$ parell no és del domini. Per tant, la funció $f(x)$ està "plena de forats".

## 5.2 Algunes propietats importants

Evidentment, les funcions exponencials compleixen les propietats de les potències; en termes de funció es poden escriure de la següent manera

1. $a^0 = 1 \Longrightarrow f(0) = 1$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Longrightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \Longrightarrow f(x \cdot y) = f(x)^y = f(y)^x$

Una altra propietat interessant de les funcions exponencials té a veure amb la popular frase "créixer exponencial ment". Això el que ve a dir és que les funcions exponencials creixent molt ràpid; de fet, si $a > 1$, creixen més ràpid que qualsevol potència, per gran que sigui l'exponent. Dit d'una altra manera, no importa quant gran sigui $n$ ni quant proper sigui $a$ a 1, sempre es compleix que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$$

Per exemple, si escollim $a = 1.01$ i $n = 100$, existeix un valor d'$x$ a partir del qual es compleix que

$$1.01^x > x^{1000}$$

## 5.3 Funcions exponencials de base positiva

Assumint $a > 0$, una funció exponencial té comportaments marcadament diferents segons

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } a > 1 \begin{cases} \bullet \displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \end{cases} \\ \bullet \text{ Si } 0 < a < 1 \begin{cases} \bullet \displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = \infty \end{cases} \\ \bullet \text{ Si } a = 1 \Longrightarrow a^x = 1^x = 1, \ \forall x \end{cases}$$

### 5.3.1 La funció $e^x$

Una de les funcions més "especials" és la funció $e^x$, on la base és el nombre irracional $e$. Recordem que el nombre $e$ es defineix com el límit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ara bé, existeix una manera alternativa (i més convenient) de definir el nombre $e$, que és com la suma infinita (sèrie)

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Fent servir aquesta definició del nombre $e$, la funció $e^x$ es defineix com una *sèrie de potències*:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fixem-nos que, aquesta suma, per gran que sigui $x$, convergeix (es pot sumar fins l'infinit s'acaba "estancant") perquè el factorial és molt més gran que la potència i "*al final, el que sumem és prou petit per aturar la suma*".

### 5.3.2 Càlcul a la calculadora

Les calculadores científiques poden calcular una funció exponencial, i solen tenir una tecla destinada a fer-ho.

- $a^x$. Per calcular una potència de base qualsevol les calculadores solen tenir una tecla amb el símbol $\wedge$, que vol dir *elevar*. Normalment es dóna primera la base, després la tecla "elevar" seguit de l'exponent. Si volem calcular $3^5$ pitjarem el 3, després el símbol $\wedge$ seguit del 5. De vegades és al revés. La manera de saber-ho en la nostra calculadora és calcular per exemple $2^0$, que hauria de donar 1.

- $e^x$. Normalment les calculadores científiques tenen una tecla reservada a la funció $e^x$, que sovint requereix l'ús del "shift" (apareix en groc com a tecla secundària). Normalment donarem l'exponent seguit de la tecla $e^x$.

## 5.4 Logaritmes: la inversa d'una exponencial

Ens preguntem ara, quina és la funció inversa de l'exponencial? És a dir, com podem aïllar $x$ de l'equació

$$a^x = y \Longrightarrow x = ?$$

**Observació.** Podem tenir la temptació de fer servir la funció $\sqrt[x]{\ }$ a les dues bandes, però això aïllaria $a$ i no $x$:

$$\sqrt[x]{a^x} = \sqrt[x]{y} \Longrightarrow a = \sqrt[x]{y}$$

Necessitem una nova funció que pugui aïllar $x$ de l'equació anterior. Aquesta ha de respondre a la pregunta, "**a quin nombre hem d'elevar $a$ per obtenir $y$"?** Doncs aquest nombre s'anomena "**logaritme en base $a$ de $y$**", i s'escriu $\log_a y$:

$$\boxed{a^x = y \Longleftrightarrow x = \log_a y}$$

Fixem-nos que, en ser una funció la inversa de l'altra, es compleix el següent:

1. $a^{\log_a x} = x$, perquè *si elevem $a$ al nombre que hem d'elevar $a$ per obtenir $x$ obtindrem $x$.*
2. $\log_a (a^x) = x$, perquè *el nombre al que hem d'elevar $a$ per obtenir $a^x$ és $x$.*

És a dir, una desfà el que fa l'altra.

Existeixen dues bases especials $a = 10$ i $a = e$, per les quals el logaritme rep una nomenclatura especial:

- Si la base del logaritme tindrem molt problemes, perquè
- Si $a = 10$: $\boxed{\log_{10} x = \log x}$. És a dir, si no hi ha res a la base, és que aquesta és 10. Aquest logaritme s'anomena *logaritme decimal*.
- Si $a = e$: $\boxed{\log_e x = \ln x}$. S'anomena "*logaritme neperià*" o "*logaritme natural*".

### 5.4.1 Propietats dels logaritmes

Les propietats més típiques dels logaritmes són les que es deriven de les propietats de les potències.

1. $a^0 = 1 \Longrightarrow \boxed{\log_a(1) = 0}$
2. $a^1 = a \Longrightarrow \boxed{\log_a(a) = 1}$
3. $1^m = 1 \Longrightarrow \boxed{\log_1(n)\nexists}$ si $n \neq 1$
4. $\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$. Per veure-ho fem el següent. Suposem que sabem el valor de $\log_a x$ i de $\log_a y$, com podem calcular $\log_a(x \cdot y)$? Per trobar-ho ens preguntem a quin nombre hem d'elevar $a$ per obtenir $x \cdot y$:

   $$a^? = x \cdot y$$

   Si diem

   $$m = \log_a x$$
   $$n = \log_a y$$

i la qual cosa ens diu que

$$a^m = x$$
$$a^n = y$$

Si multipliquem ara $x \cdot y$ obtenim

$$x \cdot y = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Per tant, el nombre al que hem d'elevar $a$ per obtenir $x \cdot y$ és $m + n$:

$$\log_a (x \cdot y) = m + n$$

Si recordem que $m = \log_a x$ i $n = \log_a y$ obtindrem el que volíem:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

5. Argumentant de manera molt semblant a l'anterior, obtenim que $\boxed{\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y}$

6. I també $\boxed{\log_a (x^n) = n \log_a x}$

En certa manera, el logaritme intercanvia exponents per bases.

1. Transformen productes en sumes.
2. Transformen divisions en restes.
3. Transformen potències en funcions lineals (proporcions).

Una de les propietats més interessants dels logaritmes és la darrera. El fet que transformin potències en proporcions fa que siguin molt útils a l'hora de representar coses se separen exponencialment en coses se separen linealment. Observem les següent taula:

$$\begin{array}{rl} 10 = 10^1 & \log(10^1) = 1 \\ 100 = 10^2 & \log\left(10^2\right) = 2 \\ 1000 = 10^3 & \log\left(10^3\right) = 3 \\ 10000 = 10^4 & \log\left(10^4\right) = 4 \end{array}$$

Per tant, en representar coses en un eix logarítmic, passem d'una escala exponencial a una escala lineal, perquè els logaritmes transformen potències en proporcions. És a dir, tot allò que creix exponencialment, en representar-ho en una escala logarítmica passa a ser una recta.
Hi ha diverses magnituds físiques, químiques o en enginyeria que es comporten d'aquesta manera:

- El **PH** es defineix com $\log [OH^-]$ (el logaritme decimal de la concentració d'ions $OH^-$.)
- Els **decibels (dB)** es representen en escala logarítmica, ja que la relació entre la potència i l'amplitud de so és exponencial
- **L'escala de Richter** es representa en escala logarítmica, perquè la relació que hi ha entre l'amplitud de les vibracions i la distància a l'epicentre és exponencial
- **Línies del temps**. Sovint ens trobem que en mirar-nos la història (de l'univers, de la humanitat o del nostre planeta), les coses "interessants" triguen molt a passar i passen totes en moments propers al temps. Això fa que en representar-les sobre eixos lineals s'acumulin i no puguem veure-les bé, mentre que ens quedem amb espais de temps molt llargs on "no passa res". Els logaritmes ens donen la possibilitat de canviar l'escala dels eixos i "separar" els esdeveniments.

## 5.5 El logaritme com a funció

Considerem la funció

$$f(x) = \log_a(x)$$

amb $a > 0$ i $a \neq 1$. Fixem-nos que

- Si $a < 0$, el logaritme no estarà definit només per alguns valors. Per exemple, l'equació $(-2)^x = 4$ té solució, però l'equació $(-2)^x = 8$ no en té. Per tant, $\log_{-2} 4 = 2$ però $\log_{-2} 8$ no és real. Per evitar problemes, sempre considerarem $a > 0$.
- A més, necessitarem $a \neq 1$. En cas contrari, el logaritme no és una funció perquè l'equació $1^x = c$ no té solució si $c \neq 1$, però en canvi té infinites solucions si $c = 1$. Per tant, $\log_1(x)$ no és una funció

Fixem-nos que, independentment del valor de $a$, aquesta funció sempre compleix:

$$f(1) = 0$$

perquè es compleix que $a^0 = 1$.

### 5.5.1 Domini

Considerem $a > 0$ però $a \neq 1$.

- En avaluar $\log_a(x)$ per alguna $x$ ens estem preguntant a quin nombre hem d'elevar $a$ per obtenir $x$. Com $a$ és positiva, el valor de $x$ també haurà de ser positiu, perquè en elevar $a$ a qualsevol nombre només obtenim nombres positius. Per tant, $x$ ha de ser positiva.
- Ens preguntem ara si podem calcular $\log_a(0)$. És a dir, a quin nombre hem d'elevar $a$ per obtenir 0? Doncs no existeix, perquè $a$ elevat a qualsevol nombre mai serà 0.

Per tant:

$$D(f) = (0, +\infty)$$

### 5.5.2 Comportament a prop del 0

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} \bullet \text{ Si } a > 1\text{: } a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^\infty} = 0 \Longrightarrow -\infty \\ \bullet \text{ Si } 0 < a < 1\text{: } a^{\infty} = 0 \Longrightarrow +\infty \end{cases}$$

Per tant, en qualsevol cas, el logaritme d'una base positiva té sempre una asímptota vertical en $x = 0$. Fixem-nos que el límit per l'esquerra del 0 no es pot fer perquè els nombres negatius no són del domini.

### 5.5.3 Comportament a l'infinit

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} \bullet \text{ Si } a > 1\text{: } a^{+\infty} = +\infty \Longrightarrow +\infty \\ \bullet \text{ Si } 0 < a < 1\text{: } a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^\infty} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow -\infty \end{cases}$$

### 5.5.4 Propietats del logaritme com a funció

Les propietats que hem vist abans, en termes de funcions es poden escriure com:

1. $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ (el logaritme d'un producte és la suma de logaritmes)
2. $f(x^b) = b \cdot f(x)$ (el logaritme d'una potència és una proporció)
3. $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$ (el logaritme de la divisió és la diferència de logaritmes)