Capítol 3

Trigonometria

3.1 Sinus, cosinus i tangent d'angles aguts: a partir d'un triangle rectangle

3.1.1 Principals relacions entre les raons trigonomètriques

3.2 Sinus, cosinus i tangent de qualsevol angle

En aquesta secció us podeu ajudar de l'applet de Geogebra:

https://www.geogebra.org/m/sdkskczr

Per tal de definir el sinus, cosinus i tangent d'un angle qualsevol considerem la circumferència unitat, com a la Figura 3.1. El sinus i cosinus d'un angle qualsevol es defineixen com les coordenades x i y, respectivament,

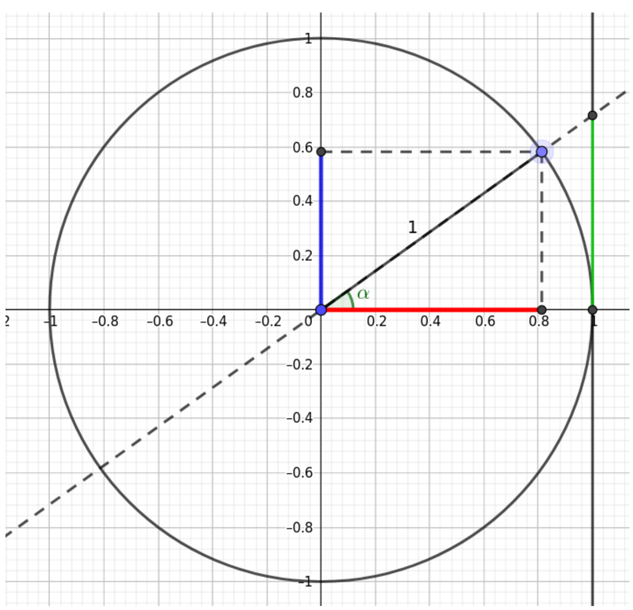


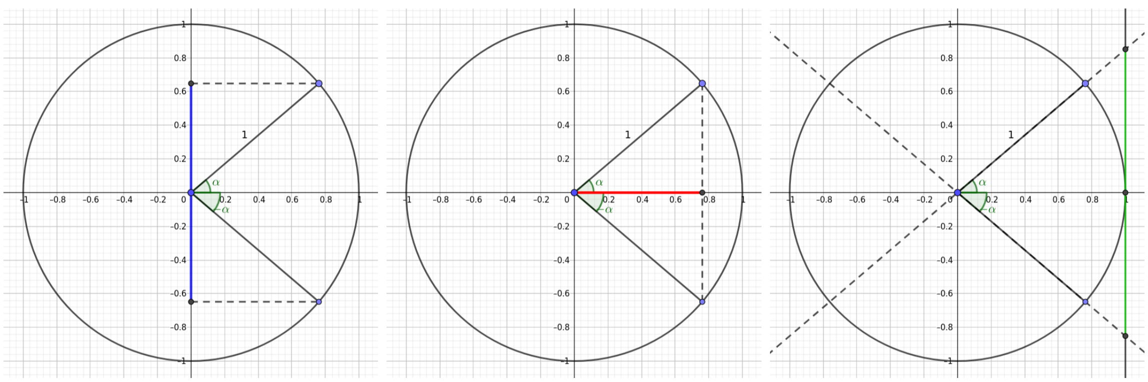
Figura 3.1: Sinus, cosinus i tangent d'un angle qualsevol.

del punt de la circumferència que defineix un sector circular d'aquell angle mesurat des de l'eix d'abscises en sentit anti-horari.

3.3 Identitats i relacions entre raons trigonomètriques de diferents angles

3.3.1 Angle oposat

L'angle oposat resulta de canviar el sentit de gir, d'anti-horari (positiu) a horari (negatiu), tal com es mostra a la Figura 3.2. De la Figura 3.2 clarament obtenim les següent identitats:



(a) Sinus de l'angle oposat (b) Cosinus de l'angle oposat (c) Tangent de l'angle oposat

Figura 3.2: Raons trigonomètriques de l'angle oposat

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha)\\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha)\end{aligned}$$

D'aquí es dedueix que el cosinus, com a funció, és una funció simètrica (o parella), mentre que el sinus i la tangent són funcions antisimètriques (o funcions senars).

3.3.2 Angles suplementaris

De la Figura 3.3 deduïm les següents igualtats:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \pi) &= -\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha \pm \pi) &= -\cos(\alpha)\end{aligned}$$

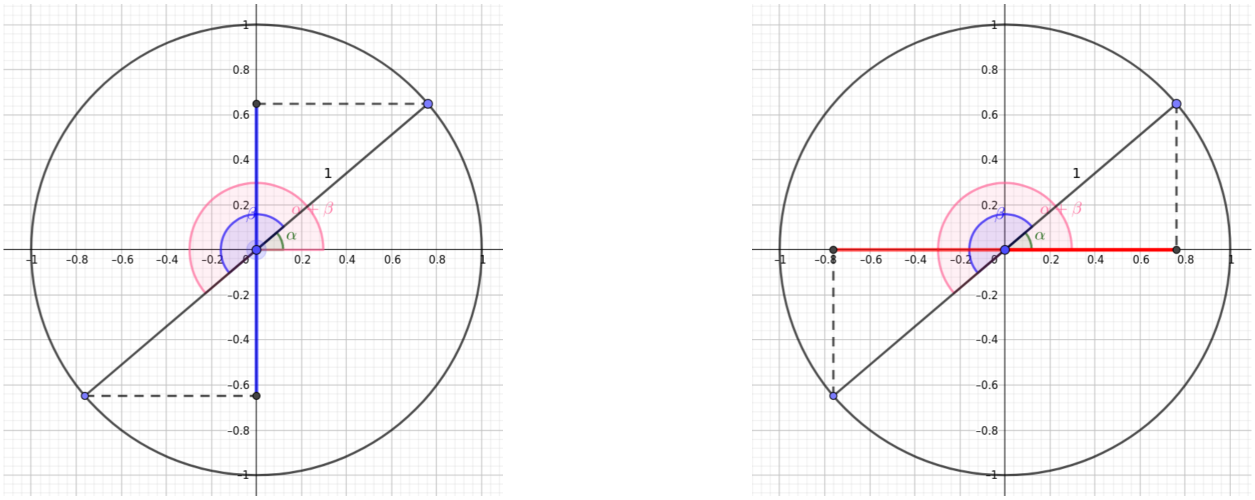
D'aquí traiem fàcilment que

$$\tan(\alpha \pm \pi) = \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

3.3.3 Angles complementaris

De la Figura 3.4 deduïm les següents igualtats:

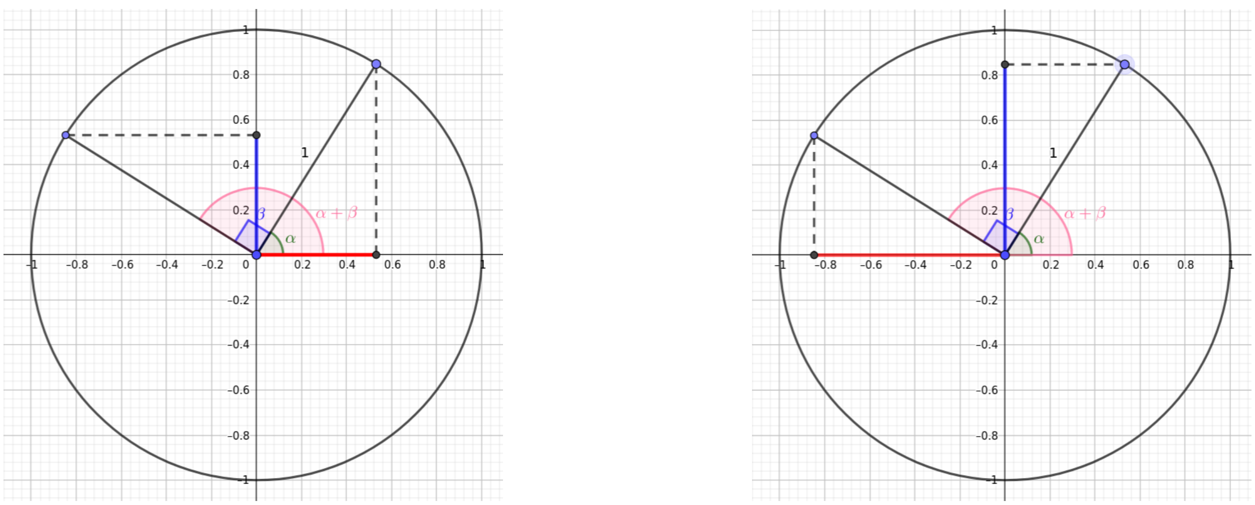
$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\alpha)\\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(\alpha)\end{aligned}$$



(a) Sinus de l'angle suplementari

(b) Cosinus de l'angle suplementari

Figura 3.3: Raons trigonomètriques de l'angle suplementari



(a) Sinus de l'angle $\alpha + \frac{pi}{2}$

(b) Cosinus de l'angle complementari

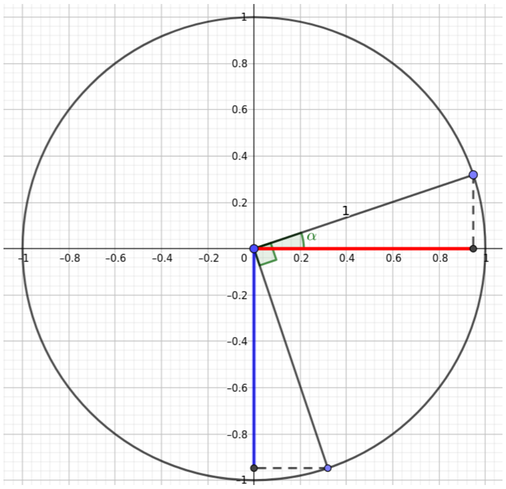
Figura 3.4: Raons trigonomètriques de l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Fàcilment podem deduir-ne la tangent:

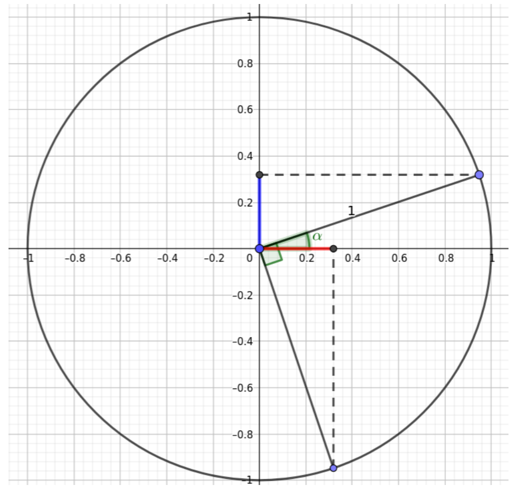
$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = \boxed{-\frac{1}{\tan(\alpha)}}$$

De la Figura 3.5 es dedueixen les següents identitats:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha)$$
$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha)$$



(a) Sinus de l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$



(b) Cosinus de l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Figura 3.5: Raons trigonomètriques de l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Altre cop, fàcilment en podem deduir la tangent:

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

3.4 Angle suma

Pel que segueix us podeu ajudar de l'applet de Geogebra

https://www.geogebra.org/m/ytp75rvt

De la Figura 3.6 tenim les següents identitats pel sinus i cosinus de l'angle suma:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Fixem-nos que fent servir aquestes fórmules podem deduir les igualtats de les seccions anteriors. Per exemple:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(\alpha)\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \cos(\alpha)\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} =$$
$$= -\cos(\alpha)$$

A partir d'aquestes fórmules es poden deduir totes les següents:

1. Angle resta:

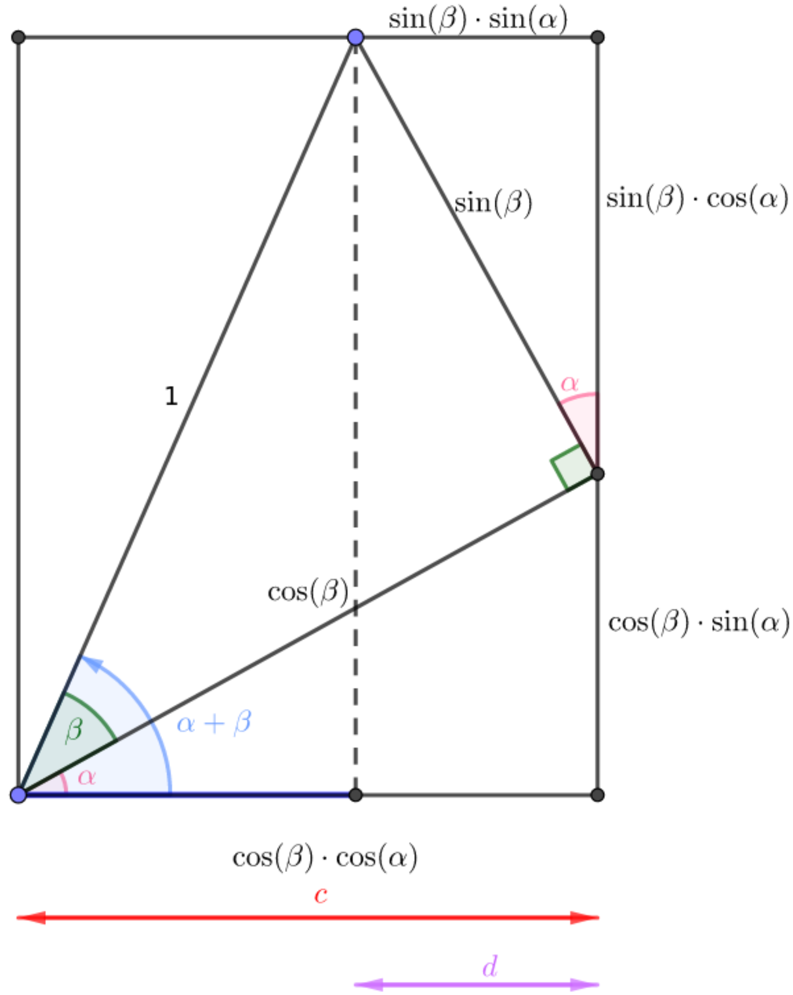


Figura 3.6: Sinus i cosinus de l'angle suma

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin(\alpha)\underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos(\beta)} + \cos(\alpha)\underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)} = \\
&= \boxed{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)} \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) = \\
&= \boxed{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}
\end{aligned}$$

2. Angle doble:

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \sin(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \\ &= \boxed{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)} \\ \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \\ &= \boxed{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

3. Angle meitat. Primer escrivim:

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Fent servir que $1 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (sumant membre a membre amb l'equació anterior) obtenim

$$1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Aillant obtenim

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

Substituïnt a $1 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ també obtenim

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$