

Exercicis resolts de matemàtiques de 1^r de
Batxillerat

Albert Granados

Juny 2021

Sobre l'autor

Albert Granados és llicenciat en matemàtiques i enginyer industrial per la Universitat Politècnica de Catalunya. És doctor en matemàtiques (UPC). Durant 10 anys s'ha dedicat a la recerca en diferents departaments de matemàtiques d'universitats i centres de recerca europeus: a la Universitat d'Stuttgart, a l'Inria (París) a la Universitat Tècnica Danesa (Copenhagen) i a la Universitat Politècnica de Catalunya. La seva recerca ha estat finançada amb beques pre i post-doctorals com: “La Caixa”, DAAD, Marie-Curie, Ørsted i Beatriu de Pinós. Actualment és professor de matemàtiques de secundària i batxillerat a l'institut Pere Vives i Vich d'Igualada.

Índex

1	Successions	11
1.1	Successions geomètriques	12
	<i>Exercici: 1</i> Successió geomètrica	12
	<i>Exercici: 2</i>	12
	<i>Exercici: 3</i> Successió aritmètica	13
1.2	Monotonia, màxim i mínims, successions fitades	13
	<i>Exercici: 4</i>	13
1.3	Càlcul de límits variis	15
	<i>Exercici: 5</i> Pg. 201 n° 16	15
	<i>Exercici: 6</i> Pg. 208 n° 5	16
	<i>Exercici: 7</i> Pg. 206 n° 6	17
	<i>Exercici: 8</i> Pg. 208 n° 7	17
	<i>Exercici: 9</i> Pg. 209 n° 2	20
	<i>Exercici: 10</i> Pg. 208 n° 6	21
	<i>Exercici: 11</i> Pg. 209 n° 4	21
	<i>Exercici: 12</i> Exercici proposat	22
	<i>Exercici: 13</i> Pg. 209 n° 5	23
	<i>Exercici: 14</i>	24
1.4	Indeterminació del tipus 1^∞	25
	<i>Exercici: 15</i> Pg. 208 n° 9	25
	<i>Exercici: 16</i> Proposat	27
2	Funcions	31
2.1	Domini i nucli de funcions	33
	<i>Exercici: 17</i> Pg. 181 n° 5	33
	<i>Exercici: 18</i> Exercici proposat	34
	<i>Exercici: 19</i> Domini i nucli de les funcions suma, producte i quocient	35
	<i>Exercici: 20</i> Exercici proposat	40

	<i>Exercici: 21</i>	43
2.2	Composició i inversa	44
	<i>Exercici: 22</i>	44
	<i>Exercici: 23</i> Pg. 187 n° 12	46
	<i>Exercici: 24</i> Domini de la composició	49
	<i>Exercici: 25</i> Domini de la composició	51
2.3	Límits laterals	52
	<i>Exercici: 26</i> Càlcul a partir de la gràfica	52
	<i>Exercici: 27</i>	54
	<i>Exercici: 28</i> Exercici proposat	55
	<i>Exercici: 29</i> Exercici proposat	57
	<i>Exercici: 30</i>	59
	<i>Exercici: 31</i> Domini i comportament local	60
	<i>Exercici: 32</i> Variant de Pg. 219 n° 6	62
	<i>Exercici: 33</i> Pg. 219 n° 7	64
	<i>Exercici: 34</i> Pg. 219 n°8	64
	<i>Exercici: 35</i>	66
	<i>Exercici: 36</i> Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$	67
	<i>Exercici: 37</i>	70
	<i>Exercici: 38</i>	73
2.4	Continuïtat	75
	<i>Exercici: 39</i>	75
	<i>Exercici: 40</i> Pg. 222 n° 11	77
	<i>Exercici: 41</i> Pg. 222 n°12	79
	<i>Exercici: 42</i> Pàgina 227 n° 14	80
	<i>Exercici: 43</i> Pàgina 228 n° 19	80
	<i>Exercici: 44</i> Bolzano	82
	<i>Exercici: 45</i>	83
	<i>Exercici: 46</i> Pg. 228 n° 18	84
	<i>Exercici: 47</i> Pg. 228 n°24	86
	<i>Exercici: 48</i>	88
	<i>Exercici: 49</i>	88
	<i>Exercici: 50</i>	88
	<i>Exercici: 51</i>	89
	<i>Exercici: 52</i>	89
2.5	Asíptotes	91
	<i>Exercici: 53</i>	91
2.6	Continuïtat amb paràmetres	93

	<i>Exercici: 54</i>	93
	<i>Exercici: 55</i>	96
2.7	Exponencials i logaritmes	97
	<i>Exercici: 56</i>	97
	<i>Exercici: 57</i>	97
	<i>Exercici: 58 Pg. 249 n° 4</i>	98
3	Trigonometria	99
	<i>Exercici: 59</i>	99
	<i>Exercici: 60 Pg. 71 n° 15</i>	100
	<i>Exercici: 61</i>	101
	<i>Exercici: 62</i>	102
	<i>Exercici: 63 Pg. 82 n° 12</i>	103
	<i>Exercici: 64</i>	104
	<i>Exercici: 65</i>	105
	<i>Exercici: 66 Exercici d'examen Curs 20-21</i>	106
	<i>Exercici: 67 Algunes identitats trigonomètriques</i>	106
	<i>Exercici: 68 Pg. 264 n°29</i>	107
4	Nombres complexos	109
	<i>Exercici: 69</i>	109
	<i>Exercici: 70</i>	110
	<i>Exercici: 71 Fórmula d'Euler</i>	111
	<i>Exercici: 72</i>	111
	<i>Exercici: 73 Pg. 99 n° 1</i>	112
	<i>Exercici: 74 Pg. 99 n°2</i>	112
	<i>Exercici: 75</i>	113
	<i>Exercici: 76</i>	114
	<i>Exercici: 77</i>	115
	<i>Exercici: 78</i>	116
	<i>Exercici: 79</i>	116
	<i>Exercici: 80</i>	117
5	Geometria plana	119
5.1	Vectors i producte escalar	121
	<i>Exercici: 81 Producte escalar i Teorema de Pitàgores</i>	121
	<i>Exercici: 82</i>	122
	<i>Exercici: 83 Pg. 118 n° 39</i>	123
	<i>Exercici: 84 Pg. 118 n° 41</i>	123

	<i>Exercici:</i> 85 Pg. 118 n° 42	124
	<i>Exercici:</i> 86	124
	<i>Exercici:</i> 87 Pg. 118 n° 44	124
	<i>Exercici:</i> 88 Pg. 120 n° 6	125
	<i>Exercici:</i> 89 Pg. 120 n° 10	126
	<i>Exercici:</i> 90 Pàgina 120 n° 11	126
	<i>Exercici:</i> 91 Exercici examen curs 20-21	126
	<i>Exercici:</i> 92	126
5.2	Rectes al pla	127
	<i>Exercici:</i> 93 Pg. 130 n° 13	127
	<i>Exercici:</i> 94 Pg. 130 n° 14	127
	<i>Exercici:</i> 95 Pg. 143 n° 5	128
	<i>Exercici:</i> 96 Pg. 137 n° 32	128
	<i>Exercici:</i> 97 Pg. 137 n°33	129
	<i>Exercici:</i> 98 Pg. 143 n° 8	130
	<i>Exercici:</i> 99 Pg. 143 n° 10	130
	<i>Exercici:</i> 100 Exercici proposat a classe, 23-1-2020	132
	<i>Exercici:</i> 101 Pg. 143 n° 12	133
	<i>Exercici:</i> 102 Pg. 143 n°3	136
	<i>Exercici:</i> 103 Pg. 144 n°17	136
	<i>Exercici:</i> 104 Pg. 144 n° 25	138
	<i>Exercici:</i> 105 Examen final curs 18-19	139
	<i>Exercici:</i> 106	141
	<i>Exercici:</i> 107	142
	<i>Exercici:</i> 108	142
	<i>Exercici:</i> 109	144
	<i>Exercici:</i> 110 Pg. 132 n° 20	144
	<i>Exercici:</i> 111 Pg. 132 n° 23	145
	<i>Exercici:</i> 112 Pg. 135 n° 25	146
	<i>Exercici:</i> 113	146
	<i>Exercici:</i> 114 Pg. 135 n° 30	147
	<i>Exercici:</i> 115 Posició del baricentre	148
	<i>Exercici:</i> 116 Pg. 144 n°30	150
	<i>Exercici:</i> 117	152
	<i>Exercici:</i> 118 Intersecció entre rectes	153
	<i>Exercici:</i> 119 Trobar el circumcentre	153
	<i>Exercici:</i> 120 Posició relativa de rectes	154
	<i>Exercici:</i> 121 Recta perpendicular	156

	<i>Exercici:</i> 122 Trobar el punt simètric	157
	<i>Exercici:</i> 123 Vectors formant un angle determinat	158
5.3	Rectes al pla i circumferències	160
	<i>Exercici:</i> 124 Pg. 168 n° 4	160
	<i>Exercici:</i> 125 Pg. 168 n° 5	161
	<i>Exercici:</i> 126 Pg. 168 n°9	161
	<i>Exercici:</i> 127 Pg. 169 n° 10	161
	<i>Exercici:</i> 128 Circumferència circumscrita, Pg. 169 n° 11	163
	<i>Exercici:</i> 129 Pg. 169 n°12	164
	<i>Exercici:</i> 130 Pg. 170 n° 20	164
	<i>Exercici:</i> 131	167
	<i>Exercici:</i> 132 Posició relativa recta-circumferència	167
	<i>Exercici:</i> 133 Circumferència circumscrita	168
	<i>Exercici:</i> 134 Circumferència tangent a una recta i centre en un altra	168
	<i>Exercici:</i> 135 Circumferències tangents	169
	<i>Exercici:</i> 136 Intersecció recta i circumferència	169

Capítol 1

Successions

Continguts

1.1 Successions geomètriques	12
<i>Exercici: 1 Successió geomètrica</i>	12
<i>Exercici: 2</i>	12
<i>Exercici: 3 Successió aritmètica</i>	13
1.2 Monotonia, màxim i mínims, successions fitades	13
<i>Exercici: 4</i>	13
1.3 Càlcul de límits variis	15
<i>Exercici: 5 Pg. 201 n° 16</i>	15
<i>Exercici: 6 Pg. 208 n° 5</i>	16
<i>Exercici: 7 Pg. 206 n° 6</i>	17
<i>Exercici: 8 Pg. 208 n° 7</i>	17
<i>Exercici: 9 Pg. 209 n° 2</i>	20
<i>Exercici: 10 Pg. 208 n° 6</i>	21
<i>Exercici: 11 Pg. 209 n° 4</i>	21
<i>Exercici: 12 Exercici proposat</i>	22
<i>Exercici: 13 Pg. 209 n° 5</i>	23
<i>Exercici: 14</i>	24
1.4 Indeterminació del tipus 1^∞	25
<i>Exercici: 15 Pg. 208 n° 9</i>	25

1.1 Successions geomètriques

Exercici 1: Successió geomètrica.

Els primers termes d'una successió són: 15, 3, 0.6, 0.12 i 0.024.

- a) Justifiqueu que es podria tractar d'una successió geomètrica, i trobeu-ne la raó
 Recordeu que la suma dels n primers termes d'una successió geomètrica ve donada per la fórmula

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

- b) Calculeu la suma dels seus primers 8 termes (amb fórmula).
 c) Calculeu la suma dels seus infinits termes (noteu que $|r| < 1$).

Exercici 2.

Digueu si les següents successions són geomètriques o no, tot trobant-ne la raó en cas afirmatiu.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------|
| a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ | d) $a_n = 5^{2n-3}$ |
| b) $a_n = 2^{n+3}$ | e) $a_n = 3^{-n+2}$ |
| c) $a_n = 3^{2n}$ | f) $a_n = 2^{n^2}$ |

Solució.

Només cal dividir els termes consecutius i comprovar si és constant o no.

- a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = 3^{-1}$. Geomètrica, $r = \frac{1}{3}$ i $a_1 = r$
- b) $a_n = 2^{n+3} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-(n+3)} = 2$. Geomètrica, de raó $r = 2$ i $a_1 = 2^4$.
- c) $a_n = 3^{2n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}} = 3^{2(n+1)-2n} = 3^2$. Geomètrica, de raó $r = 3^2$ i $a_1 = 3^2$

d) $a_n = 5^{2n-3} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{2(n+1)-3}}{5^{2n-3}} = 2^{2(n+1)-3-(2n-3)} = 5^2$. Geomètrica, de raó 5^2 i $a_1 = 5^{-1}$

e) $a_n = 3^{-n+2} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)+2}}{3^{-n+2}} = 3^{-(n+1)+2-(-n+2)} = 3^{-1}$. Geomètrica, de raó $r = \frac{1}{3}$ i $a_1 = 3$.

f) $a_n = 2^{n^2} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = 2^{(n+1)^2-n^2} = 2^{2n+1}$. No és geomètrica, ja que el quocient de termes consecutius no és constant (depèn de n).

Exercici 3: Successió aritmètica.

- a) El vintè terme d'una progressió aritmètica és 7, i la diferència, -0.25
- b) Trobeu l'expressió del terme general i calcula la suma dels 12 primers termes.
- c) Quant val la suma dels infinits termes de la successió?

1.2 Monotonia, màxim i mínims, successions fitades

Exercici 4.

Considereu la successió

$$a_n = \frac{6n-1}{3n+1}$$

- a) Demostreu si la successió és creixent o decreixent, digueu si està fitada i doneu-ne el límit.
- b) Digueu a partir de quin terme tots seran majors que 1.99

Solució.

- a) Per veure si és creixent només hem de comprovar si es compleix

$$a_{n+1} > a_n$$

o no.

Operant obtenim:

$$\overbrace{\frac{6(n+1)-1}{3(n+1)+1}}^{a_{n+1}} > \overbrace{\frac{6n-1}{3n+1}}^{a_n} \iff \frac{6n+5}{3n+4} > \frac{6n-1}{3n+1}$$

Per $n \geq 1$ els denominadors són positius tots dos; per tant, els podem passar a l'altra banda multiplicant i mantenir el sentit de la desigualtat:

$$\frac{6n+5}{3n+4} > \frac{6n-1}{3n+1} \iff (6n+5)(3n+1) > (6n-1)(3n+4)$$

Alerta, si algun dels denominadors hagués estat negatiu, hauríem d'haver canviat el sentit de la desigualtat!

Desfent els parèntesis o agrupant obtenim:

$$18n^2 + 21n + 5 > 18n^2 + 21n - 4$$

Si ara ho passem tot a l'esquerra:

$$18n^2 - 18n^2 + 21n - 21n + 5 + 4 > 0 \iff 9 > 0$$

cosa que és certa si $n \geq 1$. Per tant, efectivament, la successió és creixent, ja que es compleix

$$a_{n+1} > a_n \forall n \geq 1$$

. Pel que fa al límit, aquest serà 2, ja que els graus del numerador i denominador coincideixen obtenint el quocient dels coeficients:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n-1}{3n+1} = 2$$

és a dir, la successió s'apropa a 2 per l'esquerra (perquè és creixent).

b) Volem saber a partir de quina valor de n obtenim

$$a_n > 1.99$$

Com és creixent i el seu límit és 2, la pregunta té sentit. Per trobar aquest valor de n resollem l'equació:

$$a_n > 1.99 \implies \frac{6n-1}{3n+1} = 1.99 \implies 6n-1 > 1.99(3n+1) \dots n = 99.66$$

Per tant, a partir de $n = 100$ es compleix que $2 > a_n > 1.99$.

1.3 Càlcul de límits variis

Exercici 5: Pg. 201 n^o 16.

Calculeu els límits de les següents successions.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{n} + \frac{n}{n+1} & b_n &= \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} \\ c_n &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} & d_n &= 5 : \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Solució.

A la primera ens trobem la suma dues successions racionals (quocient de polinomis). Comparant els graus veiem que totes dues són convergents i, per tant, tindrem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 + 1 = 3.$$

En el segon cas ens trobem una indeterminació del tipus 0/0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 : 0 \longrightarrow \text{Indeterminació.}$$

Per resoldre-la, simplement operem per tal d'escriure la successió com a quocient de dos polinomis per comparar-ne els graus:

$$b_n = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

que tendeix a 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

La tercera, com és la diferència de dues successions convergents que tendeixen a 0, el límit serà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 - 0 = 0.$$

La quarta serà divergent, perquè tendim a dividir 5 entre 0 podríem escriure $5/0 \rightarrow \infty$. De fet, si la escrivim en forma de quocient de polinomis obtenim

$$d_n = 5 : \frac{1}{n} = 5n,$$

i per tant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty.$$

Exercici 6: Pg. 208 nº 5.

Calculeu els següents límits

$$\begin{aligned} a_n &= (3n - 5)(2 - 3n) & b_n &= \frac{n^2}{n+1} - \frac{n}{2} \\ c_n &= \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{2n+3} & d_n &= \frac{5}{n} - \sqrt{n} \\ e_n &= \frac{n - n^3 + 1}{n^2} & f_n &= \frac{3n + n^2}{1 - n^2} \end{aligned}$$

Solució.

Primer provem substituir n per ∞ . Si trobem una indeterminació haurem d'operar. Així obtenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \cdot (-\infty) = -\infty,$$

i la primera és divergent.

Mirem la segona,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

on ja hem fet servir que el grau del numerador de la primera fracció és més gran que el del denominador. Aquí obtenim una indeterminació del tipus $\infty - \infty$. Per resoldre-la operem per escriure la successió com una sola fracció:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n(n+1)}{(n+1)2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n+2} = \infty,$$

perquè el grau del numerador és més gran que el del denominador.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\infty}{\infty}.$$

Malauradament el numerador no és un polinomi. No obstant, com el terme de grau 2 mana, podem menysprear el del grau 1, obtenint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2}}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+3} = 1.$$

També podem raonar-ho d'una altra manera. En fer l'arrel quadrada d'un polinomi obtenim una mena de polinomi el grau més alt del qual seria 1, i el coeficient d'aquest seria $\sqrt{4} = 2$. Com iguala el del denominador, el límit serà $\frac{2}{2} = 1$. Tenim també una opció més rigorosa, dividim el numerador i el denominador entre n :

$$c_n = \frac{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}}{\frac{2n+3}{n}} = \frac{\sqrt{\frac{4n^2+n}{n^2}}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{4 + \frac{n}{n^2}}}{2 + \frac{3}{n}}$$

i per tant tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1.$$

La la quarta obtenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 - \infty = -\infty,$$

perquè $\sqrt{\infty} = \infty$.

La cinquena, simplement comparant els graus més alts, el del numerador és més gran i, per tant, la successió serà divergent. Ara bé, com els coeficients de grau més alt són -1 i 1 , el límit serà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = -\infty.$$

Finalment, a la sisena, els graus del numerador i denominador coincideixen. Per tant, el límit serà el quocient de coeficients:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{1}{-1} = -1.$$

Exercici 7: Pg. 206 n° 6.

Trobar el valor de k per tal que el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kn^2 + 3}{1 - n^2} = 2$$

Solució.

Com els graus del numerador i denominador coincideixen, necessitem que el quocient de coeficients valgui 2:

$$\frac{k}{-1} = 2 \implies k = -2.$$

Exercici 8: Pg. 208 n° 7.

Calculeu els següents límits

$$\begin{array}{ll} a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{5n} & b_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^5 - 2n} \\ c_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}} & d_n = \frac{\sqrt{5} \cdot n^3 + 3n^2}{\sqrt{n^3 + 5n + 1}} \\ e_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right)^{\frac{2n}{n+1}} & f_n = \frac{3n^2}{n+1} - \frac{3n^2 - 2}{n-1} \\ g_n = \sqrt{3n} - \sqrt{n} & h_n = 300^{-n} \\ i_n = \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^n & j_n = \left(\frac{5n^2 + 3}{n^2}\right)^{\frac{3}{n}} \end{array}$$

Solució.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

perquè la base és més petita que 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

perquè el grau del denominador és més petit que el del numerador.

Per la successió c_n no tenim quocient de polinomis; no obstant, en fer el límit podem fer les següents simplificacions:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}} = \infty.$$

també podem optar per dividir entre n tant el numerador com el denominador (el grau més alt) i obtenim

$$c_n = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty.$$

A la tercera, raonant de la mateixa manera, al numerador hi tenim grau 3, i al denominador “grau $\frac{3}{2}$ ”. Per tant, la successió divergirà. Per veure-ho tenim dues opcions. La primera (una mica llarga) és dividir numerador i denominador entre el grau més alt, 3:

$$d_n = \frac{\frac{\sqrt{5}n^3+3n^2}{n^3}}{\frac{\sqrt{n^3+5n+1}}{n^3}} = \frac{\sqrt{5} + \frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{n^3+5n+1}{n^6}}} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{0} \rightarrow \infty$$

L'altra opció és “menysprear” els termes de grau més baix:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{\sqrt{5} \cdot n^3 + \cancel{3n^2}}{\sqrt{n^3 + \cancel{5n} + \cancel{1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5} \cdot n^3}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5} \cdot n^3 \sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3} \cdot \sqrt{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5} \cdot \cancel{n^3} \sqrt{n^3}}{\cancel{n^3}} = \infty$$

Per la cinquena obtenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \infty^2 = \infty.$$

Per la sisena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty - \infty \text{ Ideterminació.}$$

Per resoldre la indeterminació, reescrivim la successió com una sola fracció:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{3n^2(n-1) - (3n^2-2)(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{3n^3 - 3n^2 - 3n^3 - 3n^2 + 2n + 2}{n^2 - 1} \\ &= \frac{-6n^2 + 2n + 2}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

i, com els graus del numerador i denominador coincideixen, el límit serà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -6$$

Substituint n per ∞ obtenim una indeterminació del tipus $\infty - \infty$. Com es tracta d'una resta d'arrels, per tal d'operar-ho i escriure-ho d'una altra manera, l'única cosa que podem fer és obtenir el mateix per tal de treure factor comú. Si escrivem $\sqrt{3n} = \sqrt{3}\sqrt{n}$ podrem restar:

$$g_n = \sqrt{3}\sqrt{n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{3} - 1).$$

Com que $\sqrt{3} - 1 > 0$, el límit serà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \infty.$$

A la següent successió podem fer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 300^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{300^n} = 0,$$

ja que el denominador tendeix a ∞ però el numerador no.

Substituint per $n = \infty$ a la penúltima successió ens surt una indeterminació del tipus 1^∞ . La solucióem primer escrivint la base en la forma $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$ de la següent manera

$$\begin{aligned} \frac{n+3}{n+5} &= 1 + \frac{n+3}{n+5} - 1 = 1 + \frac{n+3-(n+5)}{n+5} \\ &= 1 + \frac{-2}{n+5} = 1 + \frac{1}{\frac{n+5}{-2}} \end{aligned}$$

Calculem ara el límit del quocient entre l'exponent i el que ens ha quedat al denominador de la fracció:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{n+5}{-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+5} = -2$$

Per tant el límit serà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Finalment, per darrera successió obtenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} j_n = 5^0 = 1,$$

ja que a la base hi tenim el quocient de dos polinomis del mateix grau i a l'exponent una fracció que tendeix a 0.

Exercici 9: Pg. 209 n° 2.

Donades les successions $a_n = (2n + 1)^2$ i $b_n = (1 + n)(1 - n)$, calcular

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

Solució.

a) El límit surt ∞ i la successió és divergent

b) Si desfem el parèntesis tenim $b_n = -n^2 + 1$, que també és divergent ja que tendeix a $-\infty$

c) Fent servir els dos altres apartats, com hem de fer la diferència entre les dues successions, el límit sortirà $\infty + \infty = \infty$, i també és divergent

d) Si fem el quocient ens trobem que al numerador i denominador hi tenim dos polinomis del mateix grau, 2. El límit serà el quocient dels coeficients de grau més alt, i serà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^2}{-n^2 + 1} = \frac{4}{-1} = -4$$

Exercici 10: Pg. 208 n° 6.

Considereu la successió

$$a_n = \frac{3n^k - 5n + 7}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Discutiïu segons el valor de k quant val $\lim a_n$.

Solució.

Hem de comparar els graus del numerador i denominador. Al denominador hi tenim el polinomi $(4n^2 - 1) = 16n^4 - 8n^2 + 1$, que és de grau 4. Per tant tindrem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 4 \\ \frac{3}{16} & \text{si } k = 4 \\ 0 & \text{si } k < 4 \end{cases}$$

Exercici 11: Pg. 209 n° 4.

Donades les successions

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

trobeu

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$

Solució.

Com es tracta de successions exponencials i totes dues tenen la base més petita que 1 (i positives), tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

En fer el tercer límit, ens surt una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. La resoldrem operant:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n : \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (3)^n.$$

Ara, com totes dues potències tenen el mateix exponent, podem ajuntar les bases:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (3)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Per tant tindrem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Exercici 12: Exercici proposat.

Considereu les següent successions

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{2n}$$

Trobeu

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$

Solució.

Totes dues successions tenen límit 0, ja que la seva base és més petita que 1. Per calcular els altres dos límits haurem d'operar, ja ens queden indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$. En operar, l'objectiu que ens hem de proposar és ajuntar les dues potències, cosa que només podrem fer si tenim el mateix exponent. Com d'entrada els exponenets no són iguals, haurem de reescriure les potències perquè ho siguin fent servir les següent propietats:

$$x^{n+1} = x \cdot x^n$$

$$y^{2n} = (y^2)^n$$

Així, ens quedarà

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} : \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2n} \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)^n \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2\right)^n = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n.\end{aligned}$$

*Com la base és més gran que 1, el límit quedarà ∞ .
Fent servir això podrem trobar l'altre límit fent l'invers:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Exercici 13: Pg. 209 n° 5.

Calculeu els següents límits

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 1}{2n - 5}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 3}{2 - n}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{n^3 - 1}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 5}{n - 1} \right)^{n^2 + 1}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 1}{n + 3} \right)^{\frac{n^2 + 1}{2n^2 - 5}}$

Solució.

Els tres primers es resolen fàcilment comparant els graus del numerador i denominador (cal tenir en compte els signes!), i obtenim ∞ , -5 i 0 , respectivament.

La quarta ens surt una indeterminació del tipus $\infty - \infty$. Com no podem ajuntar les

arrels perquè al radicand no hi ha cap factor en comú, multipliquem pel conjugat per passar a una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1} \cdot \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n^2-1-n^2-1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} \rightarrow \frac{-2}{\infty+\infty} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

A la següent successió ens surt una indeterminació del tipus 1^∞ . Primer arreglem la base perquè esciure-la de la forma $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{n+5}{n-1} &= 1 + \frac{n+5}{n-1} - 1 = 1 + \frac{n+5-(n-1)}{(n-1)} \\ &= 1 + \frac{6}{n-1} = 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{6}}.\end{aligned}$$

Fem ara el límit del quocient de l'exponent i el que ens ha quedat sota l'1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{\frac{n-1}{6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+6}{n-1} = \infty$$

Per tant, el límit de la successió ens quedarà e^∞ i per tant és divergent.

Pel que fa l'últim, substituïnt primer per $n = \infty$ ens queda $2^{\frac{1}{2}}$, que no és cap indeterminació. Per tant ens quedarà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{n+3} \right)^{\frac{n^2+1}{2n^2-5}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Exercici 14.

Trobeu els límits de les següents successions

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^3-2n^2-n+2} \quad b_n = \sqrt{3n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$$

$$c_n = \left(\frac{2n+1}{2n+4} \right)^{\frac{n^2}{n+1}}$$

1.4 Indeterminació del tipus 1^∞

Normalment es resolen comparant-la amb el límit de la successió

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exercici 15: Pg. 208 n° 9.

Trobeu els límits

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n+5}\right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{n}\right)^{2n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - n^2}{n^3 + 1}\right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2n}{n+1}\right)^{n+1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+1}{n}\right)^{-2n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 1}\right)^{5n}$

Solució.

Tots aquest exercicis porten a una indeterminació del tipus 1^∞ . Es resolen de la mateixa manera, escrivint la base en la forma

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

i el límit serà

$$e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}},$$

on b_n és l'exponent que hi havia a la successió.

a) *Reescrivint la base obtenim*

$$1 + \frac{3}{n+5} = 1 + \frac{1}{\frac{n+5}{3}}$$

Calculem ara el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{n+5}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+5} = 3.$$

Per tant el límit serà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{3}} \right)^n = e^3.$$

b) *Procedim de la mateixa manera, primer arreglem la base*

$$1 - \frac{6}{n} = 1 - \frac{1}{\frac{n}{6}} = 1 + \frac{1}{-\frac{n}{6}}$$

Ara només caldrà fer el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{-\frac{n}{6}} = -12,$$

i el límit serà e^{-12} .

c) *Arreglem la base*

$$\begin{aligned} \frac{n^3 - n^2}{n^3 + 1} &= 1 + \frac{n^3 - n^2}{n^3 + 1} - 1 = 1 + \frac{n^3 - n^2}{n^3 + 1} - \frac{n^3 + 1}{n^3 + 1} \\ &= 1 + \frac{n^3 - n^2 - n^3 - 1}{n^3 + 1} = 1 + \frac{-n^2 - 1}{n^3 + 1} = 1 + \frac{1}{\frac{n^3 + 1}{-n^2 - 1}} \end{aligned}$$

Fem ara el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{n^3 + 1}{-n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-n^2 - 1)}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 - n}{n^3 + 1} = -1,$$

i per tant el límit serà e^{-1} .

d) Fem el mateix:

$$3 - \frac{2n}{n+1} = 1 + 2 - \frac{2n}{n+1} = 1 + \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2n}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} = 1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}$$

i calculant el límit entre l'exponent i el denominador tenim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\frac{n+1}{2}} = 2,$$

i per tant el límit és e^2 .

e) Arreglem primer la base

$$\begin{aligned} 2 - \frac{n+1}{n} &= 1 + 1 - \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{n - (n+1)}{n} \\ 1 + \frac{-1}{n} &= 1 + \frac{1}{\frac{-1}{-n}} = 1 + \frac{1}{-n} \end{aligned}$$

Fem ara el límit del quocient entre l'exponent i $-n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{-n} = 2,$$

i per tant el límit quedarà e^2 .

f) Fem el mateix, primer la base

$$\begin{aligned} \frac{n^2+5}{n^2+1} &= 1 + \frac{n^2+5}{n^2+1} - 1 = 1 + \frac{4}{n^2+1} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{n^2+1}{4}} \end{aligned}$$

Fem ara el límit entre l'exponent i el denominador

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{\frac{n^2+1}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n}{n^2+1} = 0.$$

Per tant el límit quedarà $e^0 = 1$.

Exercici 16: Proposat.

Trobeu els límits de les següents successions:

$$a) \ a_n = \left(\frac{n+2}{2n-1} \right)^{n^2}$$

$$b) \ b_n = \left(\frac{2n^2+2}{n^2+n} - 1 \right)^{3n}$$

$$c) \ c_n = \left(2 - \frac{n^2-3}{n^2+4} \right)^{n^3-1}$$

$$d) \ d_n = \left(1 - \frac{n+3}{n-1} \right)^{\frac{n^2-1}{n}}$$

Solució.

a) El límit surt $\left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0$, ja que la base és més petita que 1

b) Surt una indeterminació del tipus 1^∞ . Reescrivim la base:

$$\begin{aligned} \frac{2n^2+2}{n^2+n} - 1 &= 1 + \frac{2n^2+2}{n^2+n} - 2 = 1 + \frac{2n^2+2-2(n^2+n)}{n^2+n} \\ &= 1 + \frac{-2n-2}{n^2+n} = 1 + \frac{1}{\frac{n^2+n}{-2n-2}} \end{aligned}$$

Fem ara el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\frac{n^2+n}{-2n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(-2n-2)}{n^2+n} = -6.$$

Per tant el límit quedarà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

c) Torna a sortir una indeterminació del tipus 1^∞ . Per tant fem el mateix, arreglem la base

$$\begin{aligned} 2 - \frac{n^2-3}{n^2+4} &= 1 + 1 - \frac{n^2-3}{n^2+4} = 1 + \frac{n^2+4-(n^2-3)}{n^2+4} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{n^2+4}{7}}. \end{aligned}$$

Fem ara el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{\frac{n^2 + 4}{7}} = \infty,$$

i, per tant, el límit quedarà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e^\infty = \infty.$$

d) El límit surt 0^∞ , que és 0.

Capítol 2

Funcions

Continguts

2.1 Domini i nucli de funcions	33
<i>Exercici: 17</i> Pg. 181 n° 5	33
<i>Exercici: 18</i> Exercici proposat	34
<i>Exercici: 19</i> Domini i nucli de les funcions suma, producte i quocient	35
<i>Exercici: 20</i> Exercici proposat	40
<i>Exercici: 21</i>	43
2.2 Composició i inversa	44
<i>Exercici: 22</i>	44
<i>Exercici: 23</i> Pg. 187 n° 12	46
<i>Exercici: 24</i> Domini de la composició	49
<i>Exercici: 25</i> Domini de la composició	51
2.3 Límits laterals	52
<i>Exercici: 26</i> Càlcul a partir de la gràfica	52
<i>Exercici: 27</i>	54
<i>Exercici: 28</i> Exercici proposat	55
<i>Exercici: 29</i> Exercici proposat	57
<i>Exercici: 30</i>	59
<i>Exercici: 31</i> Domini i comportament local	60
<i>Exercici: 32</i> Variant de Pg. 219 n° 6	62

<i>Exercici:</i> 33 Pg. 219 n ^o 7	64
<i>Exercici:</i> 34 Pg. 219 n ^o 8	64
<i>Exercici:</i> 35	66
<i>Exercici:</i> 36 Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$	67
<i>Exercici:</i> 37	70
<i>Exercici:</i> 38	73
2.4 Continuïtat	75
<i>Exercici:</i> 39	75
<i>Exercici:</i> 40 Pg. 222 n ^o 11	77
<i>Exercici:</i> 41 Pg. 222 n ^o 12	79
<i>Exercici:</i> 42 Pàgina 227 n ^o 14	80
<i>Exercici:</i> 43 Pàgina 228 n ^o 19	80
<i>Exercici:</i> 44 Bolzano	82
<i>Exercici:</i> 45	83
<i>Exercici:</i> 46 Pg. 228 n ^o 18	84
<i>Exercici:</i> 47 Pg. 228 n ^o 24	86
<i>Exercici:</i> 48	88
<i>Exercici:</i> 49	88
<i>Exercici:</i> 50	88
<i>Exercici:</i> 51	89
<i>Exercici:</i> 52	89
2.5 Asímtotes	91
<i>Exercici:</i> 53	91
2.6 Continuïtat amb paràmetres	93
<i>Exercici:</i> 54	93
<i>Exercici:</i> 55	96
2.7 Exponencials i logaritmes	97
<i>Exercici:</i> 56	97
<i>Exercici:</i> 57	97
<i>Exercici:</i> 58 Pg. 249 n ^o 4	98

2.1 Domini i nucli de funcions

Exercici 17: Pg. 181 n° 5.

Calculeu el domini de les funcions

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x^2-6x+5}$$

$$e) p(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 5x + 2$$

$$b) g(x) = \sqrt{4+3x}$$

$$c) h(x) = \frac{7x+8}{x^2+5}$$

$$d) k(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}x+5}$$

$$f) t(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2x}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solució.

a) Només cal treure els punts on el denominador s'anul·la:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \longrightarrow x = 5 \text{ i } x = 1$$

Per tant

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$$

b) El radicand ha de ser positiu, per tant

$$4 + 3x > 0 \implies x > -\frac{4}{3}$$

El domini quedarà

$$D(g) = \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$$

c) Si busquem els zeros del denominador veurem que no en té (de reals). Per tant el domini d'h són tots els reals:

$$D(h) = \mathbb{R}$$

d) Com es tracta d'una arrel d'índex senar (cúbica) no hi ha cap problema si el radicand és negatiu. Per tant

$$D(k) = \mathbb{R}$$

e) La funció e és un polinomi, que tenen com a domini tots els reals

$$D(e) = \mathbb{R}$$

f) Es tracta d'una funció definida a trossos. Haurem d'estudiar el domini de cadascuna de les branques per separat i després mirar quins valors del domini compleixen la condició per entrar per aquella branca.

La primera branca té com a domini tots els nombres reals menys el 0, perquè és on s'anul·la el denominador. Com $0 \leq 2$ compleix la condició, l'haurem de treure. Per tant, per ara tenim que el domini de la funció és $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$.

La segona branca té per domini tots els nombres reals menys $x = 3$, que és on s'anul·la el denominador. Com $3 \geq 2$ compleix la condició, també l'haurem de treure. Per tant, el domini de la segona branca serà $(2, 3) \cup (3, \infty)$.

Si ajuntem tots dos dominis tindrem

$$D(t) = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty).$$

Altrament, com només hem de treure els valors $x = 0$ i $x = 3$, podríem escriure el domini com

$$D(t) = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\},$$

que són exactament iguals.

Exercici 18: Exercici proposat.

Trobeu el domini de la funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2-4} & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x^2-16} & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Solució.

Comencem estudiant la primera branca. El denominador s'anul·la quan $x^2 - 1 = 0$ d'on $x = 1$ o $x = -1$. Ara bé, com a la primera branca només hi entrem si $x \leq 0$, aleshores només caldrà treure el $x = -1$, ja que si $x = 1$ entrem per la segona.

Pel que fa a la segona branca, hem de treure tots aquells valor pels quals el radicand sigui negatiu. Busquem quan val 0: $x^2 - 4 = 0$ si $x = -2$ o $x = 2$. Com la

funció $x^2 - 4$ és una paràbola convexa (mira amunt) perquè el coeficient de grau 2 és positiu, haurem de treure l'interval central, és a dir, l'interval $(-2, 2)$. Ara bé, com a la segona branca hi entre només si $0 < x < 4$, és a dir, si $x \in (0, 4)$, fent la intersecció d'aquests interval tindrem els punts que haurem de treure, que són

$$(-2, 2) \cap (0, 4) = (0, 2).$$

Per tant, fins ara haurem de treure el valor $x = -1$ i l'interval $(0, 2)$.

Vegem ara la tercera branca. Mirem quan s'anul·la el denominador:

$$x^2 - 16 = 0 \implies x = -4 \text{ o } x = 4.$$

Com a la tercera branca hi entrem només si $4 \leq x$, només haurem de treure el 4, perquè -4 no està inclòs.

Resumint, hem de treure $x = -1$ de la primera, l'interval $(0, 2)$ de la segona i el punt $x = 4$ de la tercera. Per tant, el domini serà

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup [2, 4) \cup (4, \infty).$$

Exercici 19: Domini i nucli de les funcions suma, producte i quocient.

Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

- Trobeu $D(f)$, $D(g)$, $Nuc(f)$ i $Nuc(g)$. Recordeu que el nucli d'una funció són els valors pels quals aquesta val 0.
- Trobeu $D(1/g)$, $D(1/f)$, $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ calculant les expressions explícitament.
- Trobeu $D(1/g)$, $D(1/f)$, $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ fent servir només els resultats de l'apartat a).
- Quines diferències trobeu?

Solució.

- Com les dues funcions només tenen denominadors presentaran problemes quan aquests s'anul·lin, cosa que passa quan $x^2 - 1 = 0$ (per f) i $x + 1 = 0$ (per g). Per tant tenim

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Pel que fa al nucli de les funcions, només cal que miram quan valen 0:

$$f(x) = 0 \longrightarrow \frac{x+2}{x^2-1} = 0 \longrightarrow x+2=0 \longrightarrow x=-2$$

Fixem-nos que hem de comprovar que $x = -2$ sigui del domini, és a dir, que el denominador no s'anul·li per $x = -2$ cosa, que no passa. Dit d'una altra manera, el segon pas només el podem fer si $x^2 - 1$ no és zero, cosa que només passa quan $x = -2$. Per tant,

$$\text{Nuc}(f) = \{-2\}.$$

Pel que fa a g :

$$g(x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{x+1} = 0 \longrightarrow 1 = 0$$

i per tant la funció g mai val zero:

$$\text{Nuc}(g) = \emptyset$$

b) Trobem les expressions de les funcions que ens denamen:

$$(1/g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{1} : \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{1} = x+1$$

$$(1/f)(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x+2}$$

En principi, d'aquestes expressions deduiríem que $D(1/g) = \mathbb{R}$ i $D(1/f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, però, com veurem al proper apartat, això no és correcte!

Per tal de calcular $f + g$ haurem de buscar un denominador comú. Factoritzem els denominadors trobant-ne les arrels:

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm 1$$

i per tant tenim que

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$$

Com $x+1$ és irreductible, ja està factoritzat. Ara sumem $f + g$:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{x+2}{(x+1) \cdot (x-1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{(x+1) \cdot (x-1)} + \frac{1 \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} \\ &= \frac{x+2+x-1}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{2x+1}{(x+1) \cdot (x-1)} \end{aligned}$$

Per tant, d'aquesta expressió treuríem que

$$D(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Calculem ara el quocient de les funcions:

$$(f/g)(x) = \frac{\frac{x+2}{x^2-1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{(x+2) \cdot (x+1)}{(x^2-1) \cdot 1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1}$$
$$(g/f)(x) = \frac{1}{(f/g)(x)} = \frac{x^2-1}{(x+2)(x+1)}$$

Tal com estan escrites, els dominis són

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$
$$D(g/f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$$

Ara bé, què hagués passat si fem servir la factorització per simplificar aquestes expressions?

$$(f/g)(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1} = \frac{(x+2) \cdot \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)} \cdot (x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$
$$(g/f)(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

I per tant ara obtenim que

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$D(g/f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

i els dominis que han sortit són diferents dels d'abans. Quina és la versió correcta?
Doncs com veurem al proper apartat, cap de les dues!

- c) Calculem ara els mateixos dominis que abans però sense calcular les funcions. La funció $(1/g)(x)$ la podem escriure com

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$$

Per tant, la imatge de qualsevol valor per la funció $1/g$, per exemple en $x = a$ es troba fent:

$$(1/g)(a) = \frac{1}{g(a)}$$

Vist així, la funció $(1/g)$ presenta dos possibles problemes:

1 Hem de poder calcular $g(a)$

2 El valor de $g(a)$ no pot ser 0

- Per tant, el domini de la funció $(1/g)$ serà el resultat de treure al domini de g el seu nucli:

$$D(1/g) = D(g) \setminus \text{Nuc}(g)$$

Com el nucli de g és buit, tindrem

$$D(1/g) = D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Fixem-nos que això no coincideix amb el que havíem obtingut a l'apartat anterior calculant l'expressió exacta!

- Fem ara el mateix amb $(1/f)$:

$$D(1/f) = D(f) \setminus \text{Nuc}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, -2\}$$

que tampoc coincideix amb el resultat de l'apartat anterior!

- Vegem ara la suma $f + g$. Per avaluar la funció suma

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

necessitarem poder calcular tant $f(a)$ com $g(a)$ i, per tant, el domini serà el de f intersecat amb el de g :

$$D(f + g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

- Fem ara els quocients de les funcions. Raonant com abans ens trobem que per tal de calcular $(f/g)(a)$ hem de fer

$$(f/g)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Per tant ens trobem amb dos possibles problemes

- D'una banda hem de poder calcular $f(a)$ i $g(a)$
- de l'altra hem d'evitar que $g(a)$ valgui 0

Per tant, per trobar el domini de f/g haurem de treure tots els punts que

- No siguin del domini de f : els valors $\{-1, 1\}$
- No siguin del domini de g : $\{-1\}$
- Siguin del nucli de g (perquè g està al denominador): cap, perquè $\text{Nuc}(g) = \emptyset$

Per tant, ens quedarà

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \left(\begin{array}{c} \text{No són de } D(g) \\ \underbrace{\{-1, 1\}}_{\text{No són de } D(f)} \cup \underbrace{\{-1\}}_{\text{No són de } D(g)} \cup \underbrace{\emptyset}_{\text{Nuc}(g)} \end{array} \right) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Això també ho podem escriure de la següent manera:

$$\begin{aligned} D(f/g) &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \text{Punts que no són de } D(f) \text{ o de } D(g) \text{ o de } \text{Nuc}(g) \right\} \\ &= \underbrace{D(f) \cap D(g)}_{\text{Punts del domini de } f \text{ i de } g} \setminus \underbrace{\text{Nuc}(g)}_{\text{Traiem els punts on } g \text{ val } 0} \end{aligned}$$

- Fem el mateix amb g/f , la funció seria la següent:

$$(g/f)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

per tant hem de **treure** els punts que

- **no** siguin del domini de f : $\{-1, 1\}$
- **no** siguin del domini de g : $\{-1\}$
- siguin del nucli d' f : $\text{Nuc}(f) = \{-2\}$

Per tant ens quedarà:

$$D(g/f) = \mathbb{R} \setminus \left(\begin{array}{c} \text{No són de } D(g) \\ \underbrace{\{-1, 1\}}_{\text{No són de } D(f)} \cup \underbrace{\{-1\}}_{\text{No són de } D(g)} \cup \underbrace{\{-2\}}_{\text{Nuc}(f)} \end{array} \right) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, -2\}$$

Això també ho podríem escriure com

$$\begin{aligned} D(g/f) &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \text{Punts que no són de } D(f) \text{ o de } D(g) \text{ o de } \text{Nuc}(f) \right\} \\ &= \underbrace{D(f) \cap D(g)}_{\text{Punts del domini de } f \text{ i de } g} \setminus \underbrace{\text{Nuc}(f)}_{\text{Traiem els punts on } f \text{ val } 0} \end{aligned}$$

d) Com hem comentat, els dominis trobats d'una manera i de l'altra no coincideixen. El problema està que, en operar es fan simplificacions que no es poden fer sempre. per exemple, podem dir que

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x?$$

Doncs no sempre, perquè a l'expressió de l'esquerra x no pot ser 0, però a la de la dreta sí. De la mateixa manera, podríem afirmar que

$$\frac{x}{x} = 1?$$

Doncs tampoc, perquè a l'expressió de l'esquerra x tampoc pot ser 0 però en canvi a la dreta x ja no hi apareix.

Resumint, sempre que simplifiquem o canviem de lloc un denominador, ho podem fer sempre que aquest no sigui 0.

Exercici 20: Exercici proposat.

Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2} \quad g(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

Repetiu l'exercici 19 amb les funcions $f+g$, f/g i g/f . És a dir, calculeu $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ i compareu-lo amb els dominis que s'obtenen després d'operar i simplificar les expressions $f+g$, f/g i g/f .

Nota: aneu amb compte en calcular $\text{Nuc}(g)$.

Solució.

Calculem el domini de les funcions de dues maneres: primer de la manera incorrecte (operant i simplificant) i després de la manera correcta (fent servir els dominis de f i g i els seus nuclis).

- Trobem primer explícitament la funció suma $f+g$. Per tal de sumar les dues fraccions algebraiques haurem de factoritzar els denominadors i fer el mínim comú múltiple. Trobem les arrels dels denominadors:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2 \text{ i } x = -1$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow x = -2 \text{ i } x = 1$$

Per tant els denominadors factoritzats seran

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2) \cdot (x + 1)$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)$$

i el mínim comú múltiple serà $(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$.

Ara sumem les dues funcions

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= \frac{x - 1}{(x + 2) \cdot (x + 1)} + \frac{x + 2}{(x + 2) \cdot (x - 1)} \\&= \frac{(x - 1)(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} + \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x - 1)(x + 1)} \\&= \frac{(x - 1)(x - 1) + (x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}\end{aligned}$$

El denominador s'anul·la en $x = -2$, $x = -1$ i $x = 1$ (que són els mateixos valors on s'anul·laven els denominadors de f i g). Per tant, després d'haver operat, el domini ens sortirà

$$D(f + g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

Fixem-nos que podríem haver simplificat $x + 2$ a la funció g , però haguéssim hagut de tornar a incloure aquest factor per tal de fer el m.c.m dels denominadors.

- *Obtenim ara l'expressió explícita per la funció f/g :*

$$\begin{aligned}(f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-1}{(x+2)(x+1)}}{\frac{(x+2)}{(x+2)(x-1)}} \\&= \frac{(x - 1)(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)}\end{aligned}$$

Com el denominador s'anul·la en $x = -2$ i $x = -1$, el domini que ens hagués sortit per aquesta via seria

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

que NO és correcte.

- Per trobar el domini de la funció g/f calculant-la explícitament podem fer l'invers de l'expressió anterior:

$$(g/f)(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-1)}$$

Com el denominador s'anul·la en $x = 1$ (dues vegades!), el domini trobat per aquesta via seria

$$D(g/f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

la qual cosa TAMPOC és correcte!

Trobem ara els dominis de la forma correcte: sense operar ni simplificar, a partir de dels dominis de les funcions i dels seus nuclis. Trobem-los primer. D'una banda tenim

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

que és on s'anul·len els denominadors. Trobem ara els nuclis igualant els numeradors a 0:

$$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$$

$$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$$

Però alerta! Resulta que $x = 2$ NO és del domini de g ! Per tant, en $x = 2$ la funció no val 0 perquè simplement $g(2)$ no existeix! Per tant tenim,

$$\text{Nuc}(f) = \{1\}$$

$$\text{Nuc}(g) = \emptyset$$

Fixem-nos que de l'anterior reflexió podem deduir que sempre tindrem

$$\text{Nuc}(f) \subset D(f)$$

és a dir, el nucli està contingut en el domini.

Trobem ara els dominis que ens denamen.

- Per fer la funció suma necessitem avaluar les dues funcions. Per tant, un punt serà del domini de $(f + g)$ si és del domini de f i del domini de g . Per tant,

$$D(f + g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

- Trobem ara el domini de f/g . D'una banda necessitem avaluar les dues funcions, però de l'altra, haurem de treure els punts on g valgui 0. Però com $Nuc(g) = \emptyset$, tindrem

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus Nuc(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

Fixem-nos que el punt on ens havia sortir que el numerador de g s'anul·lava ($x = -2$) està tret igualment del domini perquè el denominador de g també s'anul·lava.

- Finalment, veiem ara g/f . Si fem el mateix tindrem:

$$D(g/f) = D(f) \cap D(g) \setminus Nuc(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

Resulta que el nucli de f ja estava tret perquè $x = 1$ no era del domini de g

Exercici 21.

Considereu les funcions:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - 3x}$$

Trobeu: $D(f)$, $D(g)$, $Nuc(f)$, $Nuc(g)$, $D(f \cdot g)$, $D(f+g)$, $D(f/g)$, $D(g/f)$ i $Nuc(f \cdot g)$.

Solució.

Troblem el domini de f i de g mirant per quins valors d' x s'anul·len els denominadors:

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

Per resoldre l'equació

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

traiem factor comú:

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

d'on les solucions seran

$$x = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = -1, x = 3$$

Per tant, els dominis seran:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$$

Mirem ara els nuclis. Per tal que $f(x) = 0$ necessitem que el seu numerador sigui 0:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \implies x = -1, x = -2$$

Però alerta!!! El valor $x = -1$ no és del domini de f i, per tant, no el podem posar! Així, el nucli serà:

$$\text{Nuc}(f) = \{-2\}$$

Pel que fa al nucli de g mirem quan el seu numerador val 0:

$$x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$$

En aquest cas tots dos valors són del domini de g i, per tant, formen el seu nucli. Resumint tindrem:

$$\text{Nuc}(f) = \{-2\}$$

$$\text{Nuc}(g) = \{-2, 2\}$$

Trobem ara tot el que ens demanen:

- $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$
- $D(f + g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$
- $D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \text{Nuc}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3, -2, 2\}$
- $D(g/f) = D(f) \cap D(g) \setminus \text{Nuc}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3, -2\}$
- $\text{Nuc}(f \cdot g) = \left(\text{Nuc}(f) \cap D(g) \right) \cup \left(\text{Nuc}(g) \cap D(f) \right) = \{-2, 2\}$

2.2 Composició i inversa

Exercici 22.

Trobeu la inversa de la funció

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 4}$$

i comproveu el resultat.

Solució.

La inversa la trobarem aïllant x de l'equació:

$$f(x) = y$$

$$\frac{2x+1}{x+4} = y \rightarrow 2x+1 = y(x+4) \rightarrow 2x+1 = yx+4y$$

$$2x - yx = 4y - 1 \rightarrow x(2 - y) = 4y - 1 \rightarrow x = \frac{4y - 1}{2 - y}$$

Així la inversa és la funció

$$f^{-1}(y) = \frac{4y - 1}{2 - y}$$

o si la volem escriure com a funció de x :

$$f^{-1}(x) = \frac{4x - 1}{2 - x}$$

Per comprovar el resultat hem de verificar que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = Id(x)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = Id(x)$$

Fem-ho:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = \frac{2f^{-1}(x) + 1}{f^{-1}(x) + 4} = \\&= \frac{2 \cdot \frac{4x-1}{2-x} + 1}{\frac{4x-1}{2-x} + 4} = \frac{\frac{2(4x-1)+(2-x)}{\cancel{2-x}}}{\frac{4x-1+4(2-x)}{\cancel{2-x}}} = \\&= \frac{8x-2+2-x}{4x-1+8-4x} = \frac{7x}{7} = x \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = \frac{4f(x) - 1}{2 - f(x)} = \\&= \frac{4 \frac{2x+1}{x+4} - 1}{2 - \frac{2x+1}{x+4}} = \frac{\frac{4(2x+1)-(x+4)}{\cancel{x+4}}}{\frac{2(x+4)-(2x+1)}{\cancel{x+4}}} = \\&= \frac{8x+4-x-4}{2x+8-2x-1} = \frac{7x}{7} = x \checkmark\end{aligned}$$

Exercici 23: Pg. 187 n° 12.

Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x+4}{x+2} \quad g(x) = \frac{3x}{x+1}$$

- a) Determineu l'expressió algebraica i el domini de $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1}
- b) Comproveu que les funcions f^{-1} i g^{-1} són les inverses de f i g respectivament.

Solució.

Fixem-nos primer que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

- a) Hem de tenir en compte que, en operar i trobar les expressions de les composicions en podem trobar que els dominis canviïn. Per tant, trobarem primer les expressions i després els dominis per separat, de la manera correcta com s'ha vist als exercicis 19 i 20.

- $g \circ f$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{x+4}{x+2}\right) = \frac{3\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} + 1} \\ &= \frac{3\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} + \frac{x+2}{x+2}} = \frac{3\frac{x+4}{x+2}}{\frac{2x+6}{x+2}} = \frac{3(x+4)}{2x+6} \end{aligned}$$

El domini $D(g \circ f)$ serà el domini $D(f)$ traient els valors que facin que

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\implies \frac{x+4}{x+2} = -1 \\ x+4 &= -(x+2) \implies \boxed{x = -3} \end{aligned}$$

Per tant

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$$

Fixem-nos que $x = -3$ és el valor que anul·la del denominador que havíem trobat, però en canvi el problema en $x = -2$ desapareix de l'expressió en simplificar.

- $f \circ g$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{3x}{x+1}\right) \\&= \frac{\frac{3x}{x+1} + 4}{\frac{3x}{x+1} + 2} = \frac{\frac{3x}{x+1} + \frac{4(x+1)}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x+1}} \\&= \frac{\frac{7x+4}{x+1}}{\frac{5x+2}{x+1}} = \frac{7x+4}{5x+2}\end{aligned}$$

Per veure el domini resollem

$$\begin{aligned}g(x) = -2 &\implies \frac{3x}{x+1} = -2 \\3x = -2(x+1) &\implies \boxed{x = -\frac{2}{5}}\end{aligned}$$

Per tant

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{2}{5}\right\}$$

Fixem-nos que $-\frac{2}{5}$ coincideix amb el valor on s'anul·la en denominador de l'expressió que hem trobat, però que en canvi $x = -1$ havia desaparegut en simplificar.

- $f \circ f$:

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f\left(\frac{x+4}{x+2}\right) \\&= \frac{\frac{x+4}{x+2} + 4}{\frac{x+4}{x+2} + 2} = \frac{\frac{x+4}{x+2} + \frac{4(x+2)}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} + \frac{2(x+2)}{x+2}} = \frac{\frac{5x+12}{x+2}}{\frac{3x+8}{x+2}} \\&= \frac{5x+12}{3x+8}\end{aligned}$$

Per trobar el domini haurem de resoldre

$$\begin{aligned}f(x) = -2 &\implies \frac{x+4}{x+2} = -2 \\x+4 = -2(x+2) &\implies \boxed{x = -\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

Per tant

$$D(f \circ f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{8}{3}\right\}$$

- $g \circ g$:

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g\left(\frac{3x}{x+1}\right) = \frac{3 \frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{9x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} + \frac{x+1}{x+1}} = \frac{\frac{9x}{x+1}}{\frac{4x+1}{x+1}} \\ &= \frac{9x}{4x+1}\end{aligned}$$

Per trobar el domini mirem per quin valor g val -1 :

$$\begin{aligned}g(x) = -1 &\implies \frac{3x}{x+1} = -1 \\ 3x &= -(x+1) \implies \boxed{x = -\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

i per tant

$$D(g \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}$$

Fixem-nos que, altre cop, $x = -\frac{1}{4}$ coincideix amb el valor que fa que el denominador de l'expressió que hem trobat s'anul·li, però en canvi $x = -1$ havia desaparegut en simplificar.

- Trobem ara l'expressió i el domini de $f^{-1}(y)$. Per fer-ho hem d'aïllar x de l'expressió

$$\begin{aligned}y = \frac{x+4}{x+2} &\implies y(x+2) - x - 4 = 0 \\ x(y-1) + 2y - 4 &= 0 \implies x = \frac{4-2y}{y-1}\end{aligned}$$

i per tant

$$f^{-1}(y) = \frac{4-2y}{y-1}$$

Mirant l'expressió que hem trobat, el domini de f^{-1} és

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Fixem-nos que això vol dir que el valor $y = 1$ no té antimatge. Ho podem comprovar preguntant-nos per quin valor de x la funció f val 1 , i no

n'hauríem de trobar cap:

$$f(x) = 1 \implies \frac{x+4}{x+2} = 1 \implies x+4 = x+2 \\ \iff 4 = 2??$$

i per tant no trobem solució.

- Fem el mateix amb g^{-1} , aïllem x de l'expressió

$$y = \frac{3x}{x+1} \implies y(x+1) - 3x = 0 \\ x(y-3) + y = 0 \implies x = -\frac{y}{y-3}$$

d'on

$$D(g^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Altres cop, si ens preguntem quina és l'antiimatge de $y = 3$ ens trobarem en què no hi ha cap valor.

- b) *Comprovem ara que les expressions que hem trobat de f^{-1} i g^{-1} són realment les inverses:*

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+4}{x+2}\right) = \frac{4 - 2\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} - 1} \\ = \frac{\frac{4(x+2)}{x+2} - 2\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} - \frac{x+2}{x+2}} = \frac{\frac{2x}{x+2}}{\frac{2}{x+2}} \\ = \frac{2x}{2} = x \\ g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\frac{3x}{x+1}\right) = -\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} - 3} \\ = -\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} - \frac{3(x+1)}{x+1}} = -\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{-3}{x+1}} = -\frac{3x}{-3} = x$$

Com en composar-les obtenim la identitat, les funcions són inverses una de l'altra.

Exercici 24: Domini de la composició.

Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 8} \quad g(x) = \frac{x^2 + 7x + 6}{x}$$

Trobeu $D(f \circ g)$ i $D(g \circ f)$.

Solució.

Estudiem primer el domini de cadascuna d'elles per separat. Com són funcions racionals, només caldrà mirar on s'anul·len els denominadors:

$$\begin{aligned}x^3 - 8 = 0 &\longrightarrow x^3 = 8 \longrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \\x &= 0\end{aligned}$$

Per tant tenim

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Això el que ens està dient és que a la funció f no li podem entrar el valor 2, ni a la g el valor 0.

Ens preguntem ara com calculem la imatge de la funció $(f \circ g)(x)$. Primer hem de fer g i després, el que ens doni, ho posem a f . Per tant, hem de vigilar dues coses:

1. Hem de poder avaluar la funció g . Per tant, $D(f \circ g) \subset D(g)$
2. El resultat d'avaluar g no pot ser un valor fora del domini de f

Com $f(x)$ té problemes en $x = 2$, mirem per quin valor de x la funció g ens dóna 2:

$$g(x) = 2 \longrightarrow \frac{x^2 + 7x + 6}{x} = 2 \longrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

d'on $x = -3$ i $x = -2$. Per tant, com $g(-3) = g(-2) = 2$, resulta que aquests dos valors no seran del domini de $f \circ g$. Fixem-nos que si intentem avaluar $f \circ g$ obtindrem

$$\begin{aligned}f(g(-3)) &= f(2) \nexists \\f(g(-2)) &= f(2) \nexists\end{aligned}$$

Per tant el domini serà

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0, -2, -3\}$$

Si fem el mateix amb $g \circ f$, haurem de veure per quins valors de x la funció $f(x)$ val 0, que és el valor que no podem entrar a la funció g :

$$f(x) = 0 \longrightarrow x = -2 \text{ i } x = 1$$

Per tant, si a més tenim en compte que el valor $x = 2$ no el podem entrar a la funció f , tindrem

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$$

Exercici 25: Domini de la composició.

Donades les funcions

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \quad g(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2}$$

trobeu

a) $D(f)$ i $D(g)$

b) $D(f \circ g)$ i $D(g \circ f)$

Solució.

a) *Resolent les equacions*

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\implies x^2 = 1 \implies x = \pm\sqrt{1} \implies x = \pm 1 \\ x^2 = 0 &\implies x = 0 \end{aligned}$$

trobem

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b)

- $D(f \circ g)$: *El domini de $f \circ g$ serà el domini de g excepte els valors de x que facin que $g(x) = 1$ o $g(x) = -1$, que són els dos únics valors que no són del domini de f . Per tant resollem les equacions*

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\rightarrow \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2} = 1 \\ &\rightarrow x^2 + 3x + 4 = x^2 \rightarrow 3x + 4 = 0 \\ &\rightarrow x = -\frac{4}{3} \\ g(x) = -1 &\rightarrow x^2 - 3x + 4 = -x^2 \rightarrow 2x^2 - 3x + 4 = 0 \\ &\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Per tant,

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{0, -\frac{4}{3}\right\}$$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, -2, 2\}$$

Mirem quan f val 0:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0 \implies x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$$

2.3 Límits laterals

Exercici 26: Càlcul a partir de la gràfica.

Considereu la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ -2x^2 + 4 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2x + 4 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

a) Feu-ne la gràfica

b) A partir de la gràfica trobeu els següents límits: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Solució.

a) Per fer-ne la gràfica bàsicament hem de fer les gràfiques de les tres funcions però quedar-nos només en el tros on estan definides a cada branca.

- La primera branca és una paràbola que és convexa (mira amunt), en calculem el vèrtex i els punts de tall ($x_v = -\frac{b}{2a}$):

$$x_v = -\frac{-2}{2} = 1 \implies y_v = 1 - 2 + 3 = 2$$

i el vèrtex serà el punt $(1, 2)$. Fixem-nos que aquest punt no apareixerà a la gràfica, perquè no compleix que $x_v < -1$.

El punt de tall amb l'eix Y serà $(0, 3)$, però tampoc apareixerà a la gràfica

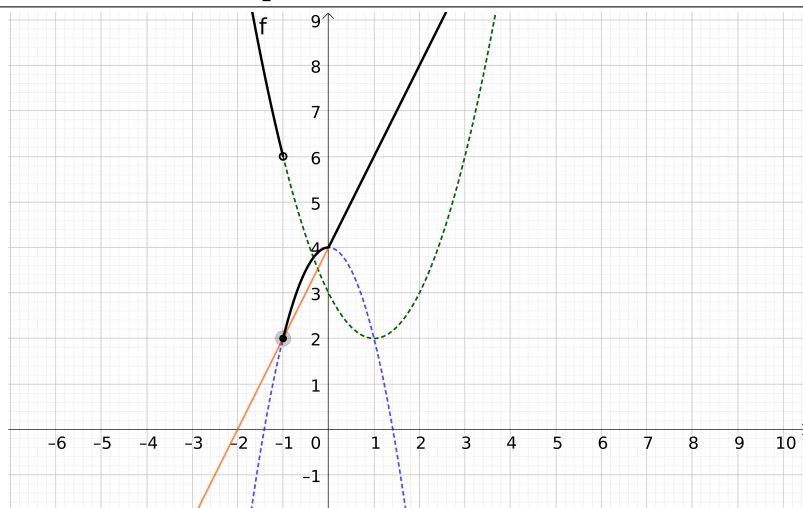


Figura 2.1: Funció a trossos

perquè no compleix que $0 < -1$.

Els punts de tall amb l'eix X els trobarem resolent l'equació

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

i per tant no tallarà l'eix X .

Ens serà útil saber quant val la funció $x^2 - 2x + 3$ allà on canviem de branca: $1 + 2 + 3 = 6$ i passarà pel punt $(-1, 6)$.

- Fem el mateix amb la segona. La funció $-2x^2 + 4$ és una paràbola còncaua, que és simètrica respecte l'eix Y (perquè $b = 0$). El seu vèrtex és el punt $(0, 4)$ (que també és el punt de tall amb l'eix Y), i els punts de tall amb l'eix X seran $(\sqrt{2}, 0)$ i $(-\sqrt{2}, 0)$.
- Finalment, la tercera funció és una recta, que té pendent positiu (2) i passa pel punt $(0, 4)$.

La gràfica de les tres funcions és la de la figura

b) Gràficament veiem que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 2x + 3 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -2x^2 + 4 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -2x^2 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 - 2x + 3 = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 - 2x + 3 = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 4 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 4 = 8$$

Exercici 27.

Calculeu els següents límits laterals

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 3}{(x - 2)^2}$$

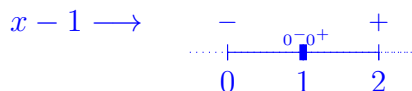
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 3}{(x - 2)^2}$$

Solució.

a) Si substituïm per $x = 1$ ens trobem amb

$$\frac{-1}{0}$$

Per tant, els límits laterals donaran $\pm\infty$, només caldrà mirar el signe del denominador segons si ens apropem a 1 per l'esquerra o per la dreta. Com el denominador val 0 només quan $x = 1$, mirem el seu signe valuant a esquerra i dreta de $x = 1$, i trobem:



Per tant tindrem

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2}{x - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2}{x - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

b) Fem el mateix. Substituïm primer per $x = 2$ per veure què passa, i obtenim

$$\frac{5}{0}$$

Per tant, els límits laterals seran $\pm\infty$, caldrà mirar el signe del denominador a prop de $x = 2$. Estudiem el signe del denominador avaluant a dreta i esquerra d'allà on val 0.

$$(x - 2)^2 \longrightarrow \begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad + \\ \cdots \cdots \cdots | \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad | \qquad \cdots \cdots \cdots \\ \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad 2 \qquad \qquad \qquad 3 \end{array}$$

Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Exercici 28: Exercici proposat.

De les funcions següents, calculeu-ne el domini i feu els límits laterals als punts on tinguin problemes

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 4} \qquad g(x) = \frac{x^2}{x + 3}$$

$$h(x) = \frac{3x}{x^2 + 2x - 8} \qquad k(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 2x + 1}$$

Solució.

Pel que fa als dominis tenim

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R} \setminus \{4\} & D(g) &= \mathbb{R} \setminus \{-3\} \\ D(h) &= \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\} & D(k) &= \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

Per mirar els límits laterals als llocs on els denominadors s'anul·len, mirem el signe d'aquests a cada banda

- *Pel denominador de $f(x)$:*

$$x - 4 \longrightarrow \begin{array}{c} -1 \qquad 0 \qquad 1 \\ \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \end{array}$$

Per tant

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \frac{6}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

- *Pel denominador de $g(x)$:*

$$x + 3 \longrightarrow \begin{array}{c} -1 \qquad 0 \qquad 1 \\ \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ \qquad -4 \qquad -3 \qquad -2 \end{array}$$

Per tant tenim

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) &= \frac{9}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) &= \frac{9}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

- *Pel denominador de $h(x) = \frac{3x}{x^2 + 2x - 8}$*

$$x^2 + 2x - 8 \longrightarrow \begin{array}{c} 7 \qquad 0 \qquad -8 \qquad 0 \qquad 7 \\ \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ \qquad -5 \qquad -4 \qquad -3 \qquad -2 \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} h(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} h(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

- Pel denominador de $k(x) = \frac{2x-5}{x^2-2x+1}$

$$x^2 - 2x + 1 \longrightarrow \begin{array}{c} 1 \qquad 0 \qquad 1 \\ \cdots \cdots | \cdots \cdots \\ 0 \qquad 1 \qquad 2 \end{array}$$

Per tant ens queda

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Exercici 29: Exercici proposat.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-2} & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{x^2-1} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

a) Trobeu-ne el domini

b) Calculeu els límits laterals en $x = -2$, $x = -1$ i $x = 1$

Solució.

a) Aquesta funció té tres possible problemes:

- Que s'anul·li el numerador de la primera branca.
El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = 2$, però aquest valor correspon a la segona branca i tindrem $f(2) = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$ i per tant la funció no té cap problema en $x = 2$.
- Que s'anul·li el numerador de la segona branca.
El denominador de la segona branca s'anul·la en $x = -1$ i en $x = 1$. Tots dos valors es troben a la segona branca, per tant els haurem de treure.
- Que tinguem problemes allà on s'enganxen les dues branques.
Quan $x = -2$ no podem entrar per cap de les dues branques, per tant també l'haurem de treure aquest valor.

Així tindrem

$$f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

b) Calculem ara els límits laterals en aquest valors.

- En $x = -2$ haurem de tenir en compte que per l'esquerra entrarem per la primera branca, i per la dreta per la segona. Per tant

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x}{x-2} = \frac{-4}{-4} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Tots dos límits laterals existeixen, però com no coincideixen podem dir que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \nexists$$

- Per veure els límits laterals en $x = \pm 1$ mirem el signe del denominador a cada banda:

$$x^2 - 1 \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & 3 & 0^- & -1 & 0^- & 3 & \\ \cdots & | & | & | & | & | & \cdots \\ & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \end{array}$$

Per tant tindrem

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Exercici 30.

Calculeu el domini de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

i feu-ne un estudi local (calculant els límits laterals) als punts que no pertanyin al domini.

Solució.

Resolent l'equació

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

trobem que el denominador s'anul·la en $x = 1$ i $x = 3$. Per tant,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$$

Mirem ara com es comporta la funció que x s'apropa a aquests valors. Si fem el límit

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Ens trobem una indeterminació. És a dir, no sabem quin dels dos es fa petit més ràpid, si el numerador o el denominador. Per solucionar aquest tipus d'indeterminacions factoritzem tant numerador com denominador trobant-ne les arrels:

$$x^2 + x - 2 = 0 \implies x = -2 \text{ i } x = 1$$

per tant la funció la podem escriure com

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 3)(x - 1)}$$

Fixem-nos que tenen un factor en comú que podem simplificar sempre i quant $x \neq 1$. Com estem fent el límit i no avaluant la funció en $x = 1$, podem simplificar, i obtenim

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{(x-3)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Fixem-nos que no cal fer els límits laterals perquè tots dos donarien el mateix en existir el límit quan $x \rightarrow 1$. Per tant podem dir que quan x s'apropa a 1 la funció s'apropa a $-\frac{3}{2}$, però que en canvi quan x val exactament 1 la funció no existeix.

Veiem ara el comportament a prop de $x = 3$. En aquest cas només s'anul·la el denominador, per tant caldrà fer els límits laterals per estudiar el signe i veure si se'n va + o - infinit. Com en apropar-nos a $x = 3$ estem lluny de $x = 1$ podem fer servir la versió simplificada de la funció cosa que ens facilitarà els càlculs:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0^+} = +\infty\end{aligned}$$

perquè el denominador $x - 3$ passa de ser negatiu a positiu en $x = 3$. En aquest cas, la funció no està fitada i el límit no existeix, ja que per totes dues bandes la funció se'n va a infinit.

Exercici 31: Domini i comportament local.

Estudieu el comportament de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

prop dels punts que no són del domini.

Solució.

Troblem primer els punts que no seran del domini resolent

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \implies x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

En poder treure factor comú x ja sabem que $x = 0$ és una solució. Les altres les trobarem de resoldre l'equació

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \implies x = 2$$

Ens trobem que $x = 2$ és una arrel doble del polinomi!

El domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

i per tant haurem d'estudiar els límits

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Fixem-nos que $x = 0$ és arrel del denominador, però no del numerador, però en canvi $x = 2$ ho és dels dos, ja que si substituïm $x = 2$ el numerador també s'anul·la:

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

Aixó d'una banda ens diu que quan fem el límit $x \rightarrow 2$ tindrem una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, però de l'altra ens diu que la funció la podem simplificar, perquè numerador i denominador tenen una arrel en comú. Per tant, factoritzem el numerador per tal de simplificar i facilitar-nos els càlculs.

Si trobem les arrels del numerador tenim

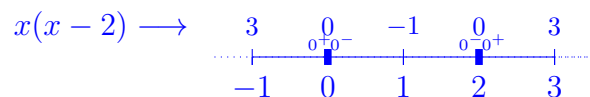
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2 \text{ i } x = 3$$

Per tant, quan $x \neq 2$, la funció la podem escriure com

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)^2} = \frac{x-3}{x(x-2)} \text{ si } x \neq 2$$

Aquesta darrera expressió és la que farem servir per calcular els límits, cosa que ens simplificarà els càlculs.

Com hem simplificat tot el que es podem simplificar, ara el numerador i denominador no s'anul·laran alhora. Per tant, allà on s'anul·li el denominador tindrem límits del tipus $\pm\infty$. Mirem els canvis de signe del denominador:



Un cop tenim clars els canvis de signe del denominador, podem fer els límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Per tant la funció no està fitada ni a prop de $x = 0$ ni de $x = 2$ (té dues asymptòtes verticals).

Exercici 32: Variant de Pg. 219 nº 6.

Donada la funció

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$$

- a) calculeu-ne els límits quan x tendeix a -3^- , -3^+ , -2^- , -2^+ , 1^- i 1^+ .
- b) fent servir només els resultats anteriors (sense fer cap altre càlcul), discutiu si els límits

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

existeixen o no, i digueu quant valen en cas d'existir.

- c) Representeu la funció f amb Geogebra o Wolframalpha (o el que vulgueu) i comenteu els resultats.

Solució.

- a) Intentem calcular primer les imatges dels valors que ens proposen per veure si la funció hi té algun problema o no:

- En $x = -3$ s'anul·la el denominador només: $\Rightarrow$ ens donrà ∞ i caldrà fer límits laterals per veure el signe
- En $x = -2$ s'anul·len tots dos: $\Rightarrow$ caldrà factoritzar i simplificar
- En $x = 1$ s'anul·la només el numerador: $\Rightarrow$ el límit serà 0, ja sigui per l'esquerra o per la dreta

Com haurem de factoritzar per resoldre la indeterminació quan $x \rightarrow -2$, factoritzem d'entrada per simplificar els càlculs. Trobem les arrels del numerador i

denominador:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ i } x = 1$$

$$x^5 + 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2}$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ i } x = -2$$

Per tant tindrem que, si $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$$

Fem servir aquesta expressió per calcular els límits.

- *Fixem-nos que el denominador passa de ser negatiu a positiu quan $x = -3$:*

$$x + 3 \longrightarrow \begin{array}{c} - \qquad \qquad \qquad + \\ \cdots \cdots \cdots | \quad 0^- \quad 0^+ \quad | \quad \cdots \cdots \cdots \\ -4 \quad -3 \quad -2 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

- *En $x = -2$, com en simplificar la funció els factors $(x+2)$ marxen, els límits laterals coincidiran perquè la funció no hi presenta cap problema ara:*

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-3}{1} = -3$$

- Finalment, com el numerador s'anul·la en $x = 1$ però el denominador no, obtenim

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$

b)

- Com els límits laterals en $x = 3$ no existeixen (el límit dona infinit), el límit en $x = 3$ tampoc existeix. Fixeu-vos que, a més, no podem dir ni tan sols que el límit sigui ni $+\infty$ ni $-\infty$.
- Com els límits laterals en $x = -2$ existeixen i coincideixen podem afirmar que el límit quan $x \rightarrow -2$ existeix i val

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$$

- Com els límits laterals en $x = 1$ existeixen i coincideixen, podem afirmar que el límit quan $x \rightarrow 1$ existeix i val

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

- c) En fer la gràfica ens trobem que, aparentment, la funció no presenta cap problema en $x = 1$ ni $x = -2$, tot i que aquests dos valors no són del domini. En canvi, en $x = -3$ ens trobem que la funció fa un salt infinit, és a dir, té una asímptota vertical en $x = -3$

Exercici 33: Pg. 219 n° 7.

Donada la funció

$$f(x) = \sqrt{x-4}$$

trobeu-ne el domini i calculeu els límits quan x tendeix a 4^- , 4^+ i 4 .

Exercici 34: Pg. 219 n°8.

Trobeu el domini de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 2x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{2x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

i estudieu els límits quan x tendeix a 0, 1, i 3 (trobant, si cal, els límits laterals).

Solució.

Estudiem primer el domini tenint en compte els possibles problemes:

- *Cal assegurar-nos que la funció estigui ben definida als punts on s'enganxen les branques*
- *Caldrà vigilar amb els punts on s'anul·lin els denominadors i treure aquests valors en cas que es trobin a la branca corresponent*

En $x = 1$ entrem per la primera branca. Per tant, en principi, la funció no té cap problema.

Mirem on s'anul·len els denominadors:

$$2x^2 + 2x = 0 \implies x = 0 \text{ i } x = -1$$

$$2x - 2 = 0 \implies x = 1$$

Els primers dos valors els haurem de treure, perquè estan inclosos a la primera branca. En canvi, $x = 1$ no caldrà treure'l perquè, per aquest valor, s'entra per la primera branca. No obstant, caldrà fer el límit quan $x \rightarrow 1^+$, per saber quin és el comportament de la funció a prop de $x = 1$ (de fet, ens ho demana l'enunciat).

Resumint, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

Fem els límits:

- *En apropar-nos a $x = 0$, tant per l'esquerra com per la dreta, entrem per la primera branca. Per aquest valor obtenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$ i per tant caldrà factoritzar i simplificar. Traient factor comú obtenim:*

$$\frac{x^2 - x}{2x^2 + 2x} = \frac{x(x-1)}{x(2x+2)} = \frac{x-1}{2x+2} \text{ si } x \neq 0$$

Com en la versió simplificada de la primera branca no presenta cap problema en $x = 0$ no caldrà fer límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x+2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

- *Fem ara el límit quan $x \rightarrow 1$. En aquest cas, com es canvi de branca precisament en $x = 1$, caldrà fer límits laterals, sí o sí:*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2x+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{2x-2} = \frac{0}{0}$$

Com el límit per la dreta ens surt una indeterminació, haurem de factoritzar també la segona branca i simplificar:

$$\frac{x^2 - 1}{2x - 2} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{2} \text{ si } x \neq 1$$

Per tant tindrem

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

- Finalment, estudiem el límit quan $x \rightarrow 3$. Per aquest valor entrem per la segona branca, i la funció no presenta cap problema:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Fixem-nos que no cal fer límits laterals.

Exercici 35.

Calculeu els límits $x \rightarrow -3$, $x \rightarrow -2$ i $x \rightarrow 2$ de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^3 + x^2 - 6x}$$

Solució.

Com

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{0}{0}$$

caldrà factoritzar. Trobant les arrels del numerador i denominador obtenim

$$f(x) = \frac{(x+2)\cancel{(x+3)}}{x(x-2)\cancel{(x+3)}}$$

Per tant obtenim

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{-1}{15},$$

i no depen de si ens apropem per la dreta o per l'esquerra al -3 .

D'altra banda tenim

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{0}{8} = 0,$$

i tampoc depen dels límits laterals al -2 .

Finalment tenim

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{0}.$$

No és una indeterminació, però haurem de mirar els límits laterals per saber si el límit és ∞ o $-\infty$ o cap de les dues. En qualsevol cas, d'entrada ja sabem que el límit no existirà. Si mirem els signes de $x(x-2)$ a l'esquerra i dreta de 2 obtenim que són negatiu i positiu, respectivament. Per tant tenim

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

Per tant, el límit quan $x \rightarrow 2$ no existeix perquè els laterals no coincideixen i, a més, aquests tampoc existeixen (perquè són $\pm\infty$).

Exercici 36: Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$.

Calculeu els següent límits. Si és necessari, feu també els límits laterals.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

Solució.

a) Fem una primera inspecció substituint x per 1, i obtenim

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació factoritzem tant numerador com denominador per simplificar. Per factoritzar trobem les arrels dels dos:

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = 1 \text{ i } x = 2$$

Per tant, obtenim

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-2)\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{x-2}$$

Amb l'expressió simplificada podem tornar a fer el límit substituïnt de nou x per 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

Fixem-nos que no cal fer els límits laterals perquè tots dos donaran el mateix.

b) Fem el mateix:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

Factoritzem per resoldre la indeterminació. Fixem-nos que podem treure factor comú:

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 - 2x^2 &= x^2 (x^2 + 3x - 2) \\ x^2 - x &= x (x - 1) \end{aligned}$$

Fixem-nos que no cal seguir factoritzant, perquè en simplificar x ja resoldrem la indeterminació:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 + 3x - 2)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Altres cop tampoc caldrà fer els límits laterals perquè donaran el mateix, 0.

c) Si substituïm x per -1 tornem a tenir una indeterminació, per tant factoritzem. Haurem de resoldre les següents equacions per trobar-ne les arrels:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &= 0 \implies x = -3 \text{ i } x = -1 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \implies x = -1 \text{ arrel doble} \end{aligned}$$

Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)\cancel{(x+1)}}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{0}$$

Ara la indeterminació l'hem resolt, però ens queda un 0 al denominador, per tant el límit serà $+\infty$ o bé $-\infty$, cosa que dependrà dels límits laterals. Com el

denominador, $x + 1$, és una recta de pendent positiu, el canvi de signe en $x = -1$ serà de negatiu a positiu. Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

d) Altre cop tenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. Factoritzem per resoldre-la:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \implies x = -2 \text{ (arrel doble)}$$

perquè

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -2 \text{ i } -2$$

Per tant, el denominador factoritzat serà:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x + 2)^2$$

i el límit serà:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x(x + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x(x + 2)} = \frac{1}{0}$$

Altre cop hem resolt la indeterminació, però caldrà fer els límits laterals perquè el denominador segurament canviarà de signe en $x = -2$. El denominador és una paràbola convexa (mira amunt), i talla en $x = 0$ i $x = -2$. Per tant, el canvi de signe en $x = -2$ serà de positiu a negatiu:

$$x(x + 2) \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & + & & - & & + \\ & & \text{0}^+ \text{0}^- & & \text{0}^- \text{0}^+ & & \\ \cdots & & -2 & & 0 & & \cdots \end{array}$$

Per tant els límits laterals quedaran:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Exercici 37.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Trobeu-ne el domini

b) Trobeu-ne el nucli

c) Calculeu els límits

$$\begin{array}{cc} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{array}$$

Solució.

a) Per trobar el domini mirem

(a) Punts de canvi de branca. En $x = 1$ la funció canvia de branca, i aquest valor està inclòs a la segona. Per tant, per ara, 1 és del domini.

(b) Punts on s'anul·len els denominadors.

El denominador de la primera branca s'anul·la quan

$$x + 1 = 0 \implies x = -1$$

Com $x = -1$ està inclòs al rang de la primera branca ($-1 < 1$), el valor $x = -1$ l'haurem de treure del domini. Per tant, per ara tenim $-1 \notin D(f)$.

El denominador de la segona branca s'anul·la quan

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 1 \text{ i } x = 3$$

Com tots dos valor estan inclosos al rang de la segona branca tots dos també els haurem de treure del domini.

Així el domini quedarà:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$$

O alternativament

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)$$

b) Per trobar el nucli ens preguntem què val la funció 0. Això ens dóna dues opcions, una per a cada branca.

- Mirem la primera:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = 0 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = 2 \text{ i } x = -1$$

Però cap dels dos valors els haurem de descartar perquè

- $-1 \notin D(f)$
- El valor $x = 2$ no està inclòs al rang de la primera branca, l'haurem de descartar.

Per tant, per ara, el nucli és buit.

- Mirem la segona branca:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

Ara bé, altre cop tots dos valors els haurem de descartar perquè

- $1 \notin D(f)$
- -1 no està inclòs al rang de la segona branca perquè no compleix que $-1 \geq 1$

Per tant, el nucli és buit:

$$\boxed{\text{Nuc}(f) = \emptyset}$$

c) Ens demana fer els límits justament en els punts que no són del domini per saber-ne el comportament a prop d'aquests punts (comportament local).

- En $x = -1$ entrem per la primera branca, tant per la dreta com per l'esquerra. Per tant, fem una primera inspecció substituïnt $x = -1$ i tenim

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació haurem de factoritzar trobant les arrels del numerador (el denominador no es pot reduir):

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x = 2 \text{ i } x = -1$$

Per tant ens quedarà:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 2 = -3$$

- En $x = 1$ hi tenim un canvi de branca. Per tant, haurem de distingir entre esquerra i dreta fent els límits laterals.

Per l'esquerra entrem per la primera branca:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

I per la dreta entrem per la segona branca:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

En aquest cas tenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, que haurem de resoldre factoritzant. Trobem les arrels del numerador i denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 1 \text{ i } x = 3$$

Així quedarà

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

- Finalment, en $x = 3$ entrem per la segona branca, tant per la dreta com per la segona. Fixem-nos que podem fer servir la versió simplificada de la funció, cosa que ens facilitarà els càlculs:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{0}$$

Caldrà fer els límits laterals per estudiar el canvi de signe del denominador. El denominador, $x-3$, és una recta amb pendent positiu i, per tant, el canvi

de signe en $x = 3$ es produeix passant de ser negatiu a positiu. Per tant tenim:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Exercici 38.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne el domini
- b) Trobeu-ne el nucli
- c) Calculeu els límits

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

Solució.

a)

- Primer mirem que $x = 2$ esitigui inclòs en algun dels rangs on estan definides les dues branques. Ok perquè

$$f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

- Mirem allà on les branques tinguin problemes:
 - El denominador de la primera branca s'anul·la quan $x = -1$. Com -1 compleix que $-1 \leq 2$, aquest valor l'haurem de treure del domini de f .

- El denominador de la segona branca s'anul·la quan $x = -2$ o bé $x = 2$. Cap dels dos valor compleix la condició $x > 2$, per tant, cap dels dos els haurem de treure. De fet, tindrem:

$$f(-2) = \frac{-2}{-2+1} = 2$$

$$f(2) = \frac{2}{3}$$

Així, el domini quedarà:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

- b) Per trobar el nucli igualem les dues branques a 0, i després comprovem que els valors trobats esituïn dins el rang.

- La primera branca:

$$\frac{x}{x+1} = 0 \implies x = 0$$

Com $0 < 2$, $0 \in \text{Nuc}(f)$.

- De la segona branca traiem

$$\frac{x-2}{x^2-4} = 0 \implies x = 2$$

Per com que $2 \not< 2$ aleshores $x = 2$ no serà del nucli: $2 \notin \text{Nuc}(f)$.

Així,

$$\text{Nuc}(f) = \{0\}$$

- c) Fem ara els límits:

- En $x = -1$ entrem per la primera branca, i per tant tenim

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0}$$

Caldrà doncs fer els límits laterals i estudiar el canvi de signe del denominador. Com $x+1$ és una recta de pendent positiu, passa de ser negatiu a l'esquerra de $x = -1$ a positiu a la dreta. Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

- En $x = 2$ caldrà fer els límits laterals, perquè canviem de branca. Així:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Per la dreta tenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$; caldrà doncs factoritzar i simplificar. Com ja hem trobat les arrels del denominador abans, obtenim:

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Torne a fer el límit fent servir la versió simplificada:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

- Finalment fem el límit en $x \rightarrow -2$. En aquest cas entrem per la primer branca i obtenim:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

i ja està, no cal fer els laterals.

2.4 Continuitat

Exercici 39.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- Trobeu el domini de f
- Feu un llistat dels punts on la funció pugui presentar alguna discontinuïtat

c) Estudieu la continuïtat de la funció en aquests punts tot indicant els tipus de discontinuïtats

Solució.

a) Els possibles problemes són: denominadors que s'anul·len i que la funció estigui ben definida al canvi de branca.

- De la primera branca tenim:

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1,$$

però cap dels dos valors està inclòs allà on la branca està definida. Per tant, per ara, aquests valors no s'han de treure.

- De la segona branca tenim

$$x^2 + x - 6 = 0 \implies x = -3 \text{ i } x = 2$$

El primer valor no està inclòs allà on està definida la branca, però el segon sí. Per tant aquest l'haurem de treure.

- Pel que fa al canvi de branca en $x = 1$, s'entra per la segona branca, i aquesta no hi té cap problema, per tant aquest valor no caldrà treure'l.

Resumint, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b) Els possibles problemes que pot presentar la funció són, d'entrada, els punts que no són del domini, on la funció serà discontinua segur. Però a més a més haurem de veure què fa la funció en $x = -1$ ja que es canvia de branca i la funció podria fer un salt.

c)

- Fent el límit en $x = 2$ obtenim

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{0}{0},$$

i obtenim una indeterminació. Com tenim les arrels del denominador, factoritzem i simplifiquem:

$$\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

Si fem ara el límit tindrem

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

No caldrà fer límits laterals ja el límit no depen de si ens apropem a 2 per una banda o per l'altra. Per tant, com $x = 2$ no és del domini però els límits laterals existeixen i coincideixen tindrem una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

- En $x = -1$ tenim un canvi de branca, per tant caldrà fer límits laterals perquè la funció es comporta de maneres diferents segons si ens hi apropem per una banda o per l'altra:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Factoritzant obtenim

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)^2}{(\cancel{x+1})(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0 \end{aligned}$$

Per fer el límit per la dreta podem fer servir la versió simplificada per facilitar els càlculs:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Com els límits laterals existeixen però són diferents, tindrem una discontinuïtat de salt en $x = -1$.

Exercici 40: Pg. 222 n° 11.

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4}$$

Solució.

Clarament, el domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\},$$

ja que $1 - x^4 = 0 \iff x = \pm 1$. Per tant la funció no serà continua ni en $x = -1$ ni en $x = 1$. Vegem quin tipus de discontinuïtats seran. Haurem d'estudiar els límits

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Pel primer tenim

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-12}{0},$$

caldrà veure els límits laterals, perquè el denominador podria ser 0^+ o 0^- . Com el denominador s'anul·la només en $x = 1$ i $x = -1$, donant valor trobem:

$$1 - x^4 < 0 \text{ si } x < -1$$

$$1 - x^4 > 0 \text{ si } -1 < x < 1$$

$$1 - x^4 < 0 \text{ si } x > 1$$

Per tant els límits laterals quedaran

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty,$$

i la discontinuïtat serà del tipus asimptòtic.

Pel que fa a $x = 1$, tenim

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0},$$

i caldrà factoritzar per veure què dóna aquest límit. Si trobem les arrels del denominador tindrem $-2x^2 + 6x - 4 = -2(x^2 - 3x + 2) = -2(x - 1)(x - 2)$. I si factoritzem el denominador tindrem

$$1 - x^4 = -(x^4 - 1) = -(x^2 + 1)(x^2 - 1) = -(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Per tant el límit quedarà

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-2\cancel{(x-1)}(x-2)}{-(x^2+1)\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-2)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Per tant, com el límit existeix (els laterals són iguals!) però $f(1)$ no existeix, la discontinuïtat serà del tipus evitable.

Nota: Fixem-nos que, per tal de factoritzar correctament, és convenient escriure primer el polinomi de manera que el coeficient de grau més alt sigui 1, ja sigui canviant el signe al polinomi, traient factor comú o les dues coses si cal.

Exercici 41: Pg. 222 n°12.

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+3}{2x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solució.

El domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Ja sabem per tant que la funció no serà contínua en $x = 0$ ni en $x = 2$. D'una banda caldrà estudiar els límits en aquests punts per saber de quin tipus de discontinuïtat es tracta. De l'altra, caldrà veure també si la funció “enganxa bé” allà la funció canvia de branca. Comencem per $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \frac{3}{0^\pm} = \pm\infty,$$

i la discontinuïtat serà del tipus asimptòtica.

Per l'altre límit tenim

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) = \frac{2}{0^\pm} = \pm\infty,$$

i la discontinuïtat també és asimptòtica.

Finalment mirem els punts on la funció canvia de branca:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2 + 1 = -1 \text{ (entrem per la primera branca)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ (entrem per la segona branca)}.$$

Com els límits laterals coincideixen (tots dos valen -1) i coincideixen amb $f(-1) = -1$, la funció és contínua en $x = -1$.

Vegem ara què passa a $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ (entrem per la segona branca)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{1-2} = -1 \text{ (entrem per la tercera branca).}$$

Ara els límits laterals no coincideixen però tots dos existeixen. Per tant $f(x)$ tindrà una discontinuïtat del tipus salt en $x = 1$.

Exercici 42: Pàgina 227 n° 14.

Justificar que la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x+3}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

té una discontinuïtat evitable en $x = 1$. Com es pot evitar la discontinuïtat?

Solució.

Si calculem els límits laterals tenim

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Els límits laterals existeixen i coincideixen. No obstant, $f(1)$ no existeix perquè no hi està definida ($x = 1$ no està inclòs al domini de cap de les branques). Per tant, la discontinuïtat és evitable (la funció té un “forat” en $x = 1$). Per tal d’evitar-la, només cal incloure $x = 1$ en algun dels dominis. Com tots dos límits laterals coincideixen, aquest punt es pot incloure tant a la primera branca com a la segona.

Exercici 43: Pàgina 228 n° 19.

Trobar el domini i estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x + 1}{2 - x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudieu també les asímptotes horitzontals i oblíquies.

Solució.

La primera branca té un problema en $x = -2$ (s'anul·la el denominador), i està inclòs allà on la branca està definida. La segona branca té un denominador que s'anul·la en $x = 1$, però aquest no està inclòs allà on la branca està definida, per tant el podem ignorar (per ara!). A la tercera branca el denominador s'anul·la a $x = 2$, que altre cop també està inclòs allà on la branca està definida. Per tant, el domini de la funció serà:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Pel que fa a la continuïtat, no només haurem d'estudiar els límits laterals en aquests punts sinó allà on les branques s'enganxen: $x = -1$ i $x = 1$. Comencem pels punts que no són del domini:

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \frac{-1}{0^\pm} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x + 1}{2 - x} = \frac{3}{0^\mp} = \mp\infty.$$

Per tant, la funció és discontinua en $x = -2$ i $x = 2$, no hi té dues asímptotes verticals.

Mirem ara els punts on les branques s'enganxen.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{-2} = 0$$

Com els límits laterals existeixen però són diferents, la funció té una discontinuïtat de tipus salt en $x = -1$. Mirem l'altre punt:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0},$$

que és una indeterminació. Factoritzant trobem

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(\cancel{x - 1})}{\cancel{x - 1}} = x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 2.$$

Per la dreta trobem:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{2 - x} = 2.$$

Com els límits laterals existeixen i són iguals a $f(2) = 2$, la funció també és contínua en $x = 2$.

Pel que fa a les asímptotes horitzontal i oblíquies, veiem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2-x} = -1,$$

i per tant la funció té una asímptota horitzontal per la dreta: $y = -1$. Per tant d'oblíquies per la dreta no en té. Veiem per l'esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = -\infty.$$

Podria ser que tingúes una asímptota oblíqua $y = mx + n$ per l'esquerra. De fet és molt probable, perquè el numerador té un grau més que el denominador. Calculem m :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x} = 1.$$

Trobem ara n :

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - x = \infty - \infty.$$

Com és una indeterminació del tipus $\infty - \infty$, només cal que fem la resta:

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - x = \frac{x^2 + 3x + 1 - x(x + 2)}{x + 2} = \frac{x + 1}{x + 2} \xrightarrow{-\infty} 1 = n.$$

Per tant, la funció té una asímptota oblíqua per l'esquerra: $y = x + 1$.

Exercici 44: Bolzano.

D'una funció sabem que

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 5$$

a) Raoneu què hauria de complir la funció f per tal de garantir que l'equació

$$f(x) = 3$$

té alguna solució entre $x = 1$ i $x = 2$.

b) Doneu un exemple de funció que compleixi les condicions de l'enunciat però que en canvi no valgui mai 3.

Exercici 45.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{9-x^2} & \text{si } x < 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Solució.

1. Primer comprovem si la funció està definida en els canvis de branca. Ok

2. Trobem els punts on s'anul·len els denominadors de les branques:

- 1a branca: $9 - x^2 = 0 \implies x = \pm 3$. Només haurem de descartar -3 del domini, perquè $x = 3$ no compleix la condició $x < 3$.
- 2a branca: $x - 3 = 0 \implies x = 3$. L'haurem de descartar, perquè sí que compleix la condició $x \geq 3$.

Per tant:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

3. Fem l'estudi local als punts que no són del domini:

- En $x = -3$. Fem el límit:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{0}$$

Tindrem una discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$. Cal fer els límits laterals per veure el comportament a prop de l'asíptota. Estudiem doncs el canvi de signe del denominador en $x = -3$:

$$9 - x^2 \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} - & & & & + & & \\ \cdots & & 0^- & 0^+ & & 0^+ & 0^- \\ & & \text{■} & & & \text{■} & \\ & & -3 & & & 3 & \end{array}$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

- En $x = 3$. En aquest cas haurem de distingir entre dreta i esquerra, perquè a més a més tenim un canvi de branca en $x = 3$. Per tant

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{9 - x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Com un dels dos límits laterals ha sortir ∞ , ja podem dir que tenim una discontinuïtat asimptòtica.

No obstant, per completar l'estudi, cal resoldre la indeterminació del límit per la dreta, factoritzant i simplificant:

$$x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 3 \implies x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Per tant tindrem:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(\cancel{x - 3})}{\cancel{x - 3}} = x + 3 \text{ si } x \neq 3$$

i el límit quedarà:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x + 3 = 6$$

Exercici 46: Pg. 228 n° 18.

Trobar el domini i estudiar la continuïtat de les funcions:

$$a) f(x) = \frac{x + 3}{-x}$$

$$b) f(x) = \frac{3x - 15}{x^2 - 5x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3 + x^2}{-x^2}$$

Solució.

a) Clarament tenim:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Per estudiar la continuïtat fem el límit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{0}$$

La discontinuïtat serà asimptòtica, però per acabar l'estudi cal fer els límits laterals. Estudiem el canvi de signe del denominador. Com és una recta de pendent negatiu, el denominador passarà de ser negatiu a positiu:



Per tant quedarà:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

b) El domini de la funció és

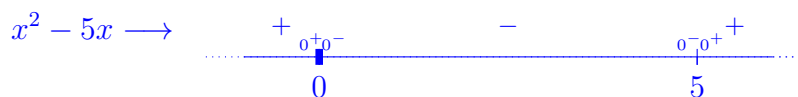
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$$

Estudiem el comportament local de la funció als dos punts que no són del domini:

- En $x = 0$. Fent el límit

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-15}{0}$$

La funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$. Per acabar-ne l'estudi caldrà fer els límits laterals estudiant el canvi de signe del denominador:



Per tant els límits laterals quedaran:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-15}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-15}{0^-} = +\infty$$

- En $x = 5$. Comencem fent el límit:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació, factoritzem numerador i denominador per tal de simplificar:

$$\begin{aligned} 3x - 15 &= 3(x - 5) \\ x^2 - 5x &= x(x - 5) \end{aligned}$$

Per tant, la funció es podrà simplificar:

$$\frac{3x - 15}{x^2 - 5x} = \frac{3\cancel{(x - 5)}}{x\cancel{(x - 5)}} = \frac{3}{x} \text{ si } x \neq 5$$

Per tant, fent servir la versió simplificada, el límit quedarà:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x} = \frac{3}{5}$$

Per tant, la funció tindrà una discontinuïtat evitable en $x = 5$.

c) *A simple vista ja es veu que la funció es pot simplificar. No obstant, tal com està escrita, el seu domini és*

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Per tant, la funció no serà contínua en $x = 0$.

Si la simplifiquem, traient factor comú, la funció quedarà:

$$\frac{x^3 + x^2}{-x^2} = \frac{\cancel{x^2}(x + 1)}{-\cancel{x^2}} = \frac{x + 1}{-1} = -x - 1 \text{ si } x \neq 0$$

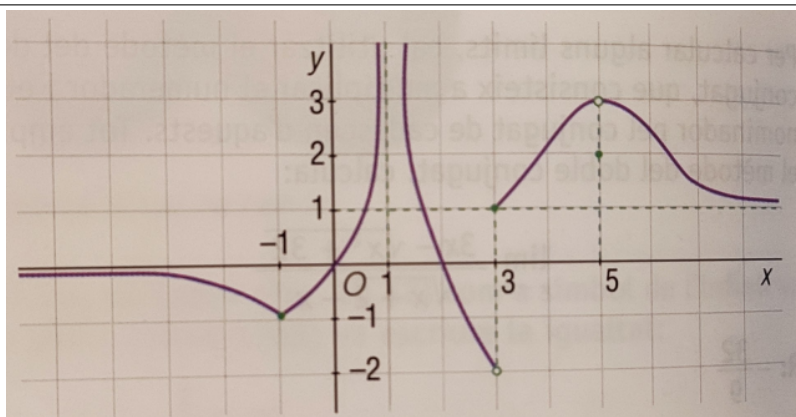
Així, estudiant el comportament local en $x = 0$, tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x - 1 = -1$$

Com el límit existeix (els laterals coincideixen), la discontinuïtat serà evitable.

Exercici 47: Pg. 228 n°24.

Considereu la funció de la figura



- a) Trobeu-ne el domini
- b) Trobeu els límits quan x tendeix a $-\infty$, $+\infty$, ∞ , -1^- , -1^+ , -1 , 1^+ , 1^- , 1 , 3^+ , 3^- , 5^- , 5^+ i 5 .
- c) Descriviu-ne les discontinuïtats, justificant la resposta.

Solució.

- a) L'únic valor pel qual la funció no retorna cap valor és $x = 1$. Per tant:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- b) Els límits quedaran:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \nexists \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 & \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2 & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \nexists \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3 & \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3 & \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3 \end{array}$$

- c) En vista dels resultats anteriors, podem concloure:

- Com $f(-1^-) = f(-1^+) = f(-1) = -1$ la funció serà contínua en $x = -1$
- Com $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, la funció té una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$.

- Com $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ i tots dos existeixen (cap d'ells és ∞), la funció tindrà una discontinuïtat de salt en $x = 3$.
- Com $f(5^-) = f(5^+) = 3 \neq f(5)$, la funció té una discontinuïtat evitable en $x = 5$.

Exercici 48.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercici 49.

Escriviu en les vostres pròpies paraules el significat dels següents concepte. Digueu si alguns d'ells coincideixen sempre, quins coincideixen sota algunes condicions i què es pot dir de la funció f en $x = 1$ en aquestes condicions:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ |
| b) $f(1)$ | e) $f(1^-)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ | f) $f(1^+)$ |

Exercici 50.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \leq 4 \\ \frac{6}{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Solució.

Pel que fa a la continuïtat, la primera branca no té cap problema (malgrat el seu domini no inclogui els nombres negatius), i la segona falla quan $x = 0$, que està fora del seu domini de definició, ja que $0 < 4$. Per tant, només cal mirar els límits laterals allà on s'enganxen les dues branques:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Com els límits no coincideixen la funció no és contínua en $x = 4$. La discontinuïtat serà del tipus salt, ja que tots dos límits laterals existeixen, però són diferents.

Exercici 51.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \leq 4 \\ \frac{6}{x} + b & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

en funció del paràmetre b .

Solució.

La funció no té cap problema fora del $x = 4$, que és on s'enganxen les branques. Fent els límits laterals trobem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \frac{6}{4} + b = \frac{3}{2} + b. \end{aligned}$$

Per tal que la funció sigui contínua, aquests dos límits han de coincidir:

$$2 = \frac{3}{2} + b,$$

d'on $b = \frac{1}{2}$. Fixem-nos que també tenim que els límits coincideixen amb la imatge de la funció en aquell punt, que ve donada per la primera branca $f(4) = 2$.

Exercici 52.

Estudieu la continuïtat de les següents funcions en els punts de canvi de branca

a)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}x - 4 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 7 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Solució.

En tots els casos cal fer límits laterals i veure si coincideixen o no.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

Discontinuitat de salt perquè els límits existeixen però són diferents.

b) Aquí cal fer servir que la funció “valor absolut” canvia el signe si $x < 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

I és una discontinuïtat de salt. Fixeu-vos que tant per la dreta com per l'esquerra del $x = 0$ s'entra per la primera branca. A més, fixeu-vos que que la funció estigui definida a part en el 0 és irrellevant.

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -2 \end{aligned}$$

Tots dos límits laterals coincideixen, però la funció és discontinua perquè el seu valor no coincideix amb el valor de la funció en $x = 1$, $f(1) = 3$. Per tant, té una discontinuïtat **evitable** en $x = 1$.

d)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$$

La funció té una discontinuïtat de salt en $x = -1$.

e)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

La funció té una discontinuïtat de salt en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^2 - 7 = 2$$

La funció té una discontinuïtat de salt en $x = 3$.

2.5 Asímptotes

Exercici 53.

Considereu les funcions següents

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} \quad g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

- a) *Estudieu (fent els límits laterals, si cal) el comportament local de la funció als punts que no són del domini de les funcions*
- b) *Feu els límits quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.*
- c) *Digueu quines són les asímptotes de les funcions, tant verticals com horitzontals (si en tenen)*

Solució.

a) Els dominis són

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

- El denominador de f passa de ser negatiu a positiu en $x = -3$, per tant

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

La funció f presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$.

- Com el numerador de g també s'anul·la en $x = 2$, factoritzem i simplifiquem abans de fer els límits

$$g(x) = \frac{x(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x(x-1)}{x-3}$$

Fixem-nos que la versió simplificada no presenta cap problema en $x = 2$, i el denominador passar de ser negatiu a positiu en $x = 3$. Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{2(2-1)}{2-3} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

La funció g tindrà una discontinuïtat evitable en $x = 2$, perquè

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2$$

però en canvi $g(2)$ no existeix perquè $2 \notin D(g)$.

La funció g presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = 3$.

- b) En fer el límits a l'infinit hem de mirar els graus. De la funció f són iguals, per tant els límits seran el quocient de coeficients. En canvi a la funció g el grau del numerador és més alt que el denominador, i per tant sortirà ∞ . Però alerta en fer $x \rightarrow \infty$ perquè el numerador serà negatiu (grau senar) i el denominador positiu (grau parell).

Resumint, tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

c) Pel que fa a les asímptotes:

- *Verticals. Són de la forma $x = a$ i es produeixen ens discontinuïtats del tipus asimptòtic, que un denominador s'anul·la i el numerador no. Això ens passa en*

$$f : \rightarrow x = -3$$

$$g : \rightarrow x = 3$$

- *Pel que fa a les horitzontals, són de la forma $y = a$. Venen donades pel comportament a l'infinit i, per tant, poden ser per l'esquerra o per la dreta. La funció g no en té, perquè en fer $x \rightarrow \pm\infty$ la funció no està fitada. Però en canvi la funció f sí que en té:*

$$f : \rightarrow y = 1 \text{ (per l'esquerra i per la dreta)}$$

$$g : \rightarrow \text{no en té}$$

2.6 Continuitat amb paràmetres

Exercici 54.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + kx + 3}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x + 3}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

on $k \in \mathbb{R}$ és paràmetre. Trobeu

- a) El domini de f
- b) Els valors de k pels quals la funció té una discontinuïtat de salt
- c) Els valors de k pels quals la funció té una discontinuïtat de asimptòtica
- d) Existeix algun valor pel qual la funció sigui contínua?
- e) Trobeu, si n'hi ha, totes les asímptotes, tant verticals com horitzontals.

Solució.

a)

- El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = 1$ i $x = 2$, però tots dos valors entre per la segona branca.
- El denominador de la segona branca s'anul·la en $x = 0$, però per aquest valor s'entra per la primera branca.
- El canvi de branca, $x = 1$, està ben definit, ja que s'entra per la segona branca i allà no hi té cap problema.

Per tant, el domini queda

$$D(f) = \mathbb{R}$$

- b) Com el domini de la funció són tots el reals, l'única opció per tal de tenir una discontinuïtat és que aquesta es produeixi allà on es canvia de branca. Fem els límits laterals:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + kx + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1 + k + 3}{0^+} = \frac{k + 4}{0^+} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3}{x} = 5\end{aligned}$$

Per tal que la funció tingui una discontinuïtat de salt, necessitem que el numerador del límit per l'esquerra s'anul·li en fer el límit, perquè en cas contrari el límit serà $+\infty$ o $-\infty$. Per tant, necessitem

$$k + 4 = 0 \implies k = -4$$

Escollint $k = -4$, el límit per l'esquerra dona una indeterminació, caldrà factoritzar i simplificar. Buscant les arrels del numerador obtenim:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$$

Per tant, en fer el límit per l'esquerra obtenim

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Per tant, recapitulant, si $k = -4$ ens queda

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5$$

Per tant, si $k = -4$, la funció té una discontinuïtat de salt en $x = 1$.

- c) En cas que $k \neq -4$, en fer el límit $x \rightarrow 1^-$, el numerador no s'anul·la i, per tant, la funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica. Fixem-nos que segons si $k < -4$ o $k > -4$ el numerador tindrà diferent signe en $x = -1$. Per tant, els límits laterals donaran $+$ o $-\infty$ segons si $k < -4$ o $k > -4$.
- d) La funció no és mai contínua, perquè l'única opció que tenim perquè no hi hagi una asímptota és que $k = -4$, però en aquest cas els límits laterals no coincideixen.
- e)

- Si $k \neq -4$, hi ha asímptota vertical en $x = 1$.
- Pel que fa a les horitzontals, fem:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + kx + 3}{x^2 - 3x + 2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x} = 2\end{aligned}$$

Per tant tenim dues asímptotes horitzontals:

$$\begin{array}{ll}y = 1 & \text{per l'esquerra} \\ y = 2 & \text{per la dreta}\end{array}$$

Exercici 55.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+k}{x} & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- Trobeu-ne el domini
- Trobeu, si existeix, el valor de k pel qual la funció és contínua en $x = -1$.
- Pels valors de k pels quals la funció no és contínua en $x = -1$, digueu de quin tipus de discontinuïtat es tracta.
- Feu els límits laterals en $x = 0$. Digueu si és contínua o no en $x = 0$, indicant de quin tipus de discontinuïtat es tracta en cas que no ho sigui.
- Trobeu les asímptotes verticals i horitzontals, si és que n'hi ha.

Solució.

a)

- El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = 0$, però aquest valor entra per la segona branca.
- Al canvi de branca, $x = -1$, s'entra per la segona branca, i no hi té cap problema.

Per tant:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

- Fixem-nos que el fet que el domini siguin tots els nombres reals no implica que la funció sigui contínua, ja que aquesta podria fer un salt en $x = -1$ si les dues branques “no enganxen bé”. Per tal que enganxin bé necessitem que els límits laterals valguin el mateix:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+k}{x} = 1 - k \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x^2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

Per tant, f serà contínua si

$$1 - k = -1 \implies k = 2$$

c) En $x = 0$ la funció no presenta cap problema, ja s'entra per la segona branca, i obtenim

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 - 3 = -3$$

Com $x = 0$ és del domini i els límits laterals existeixen i donen el mateix que $f(0)$, la funció serà contínua en $x = 0$.

d) La funció no té asímptotes verticals. Pel que fa a les horitzontals tenim

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + k}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 3 = +\infty\end{aligned}$$

Per tant, la funció tindrà una asímptota horitzontal per l'esquerra que serà la recta $y = 1$

2.7 Exponencials i logaritmes

Exercici 56.

Calculeu:

a) $\log_2 4 =$

e) $\log_7 (\sqrt{7}) =$

b) $\log_3 9 =$

f) $\log_3 \sqrt[3]{81} =$

c) $\log_2 32 =$

g) $\log_3 (\log_5 125) =$

d) $\log 1000 =$

Exercici 57.

Resoleu les equacions

a) $\log x + \log 20 = 3$

b) $\log(x + 1) = \log(x - 1) + 3$

c) $2 \log x - \log(x + 6) = 0$

d) $\log(x + 1) - \log x = 1$

e) $2 \log x - \log(x - 6) = 0$

Solució.

$$a) 3 = \log x + \log 20 = \log(20x) \implies 10^3 = 20x \text{ Per tant } x = \frac{1000}{20} = 50$$

$$b) \log(x+1) = \log(x-1) + 3 \implies \log(x+1) - \log(x-1) = 3 \implies \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3$$

$$3 \implies \frac{x+1}{x-1} = 10^3 \implies x+1 = 10^3(x-1) \implies x+1 = 10^3x - 10^3 \implies 1001 = 999x$$

$$\implies x = \frac{1001}{999}$$

Exercici 58: Pg. 249 n° 4.

La datació de restes arqueològiques es pot fer a partir de la quantitat de carboni 14 que contenen. La quantitat residual de Carboni 14 que trobem al fòssil segueix la llei exponencial

$$f(t) = q(t)q_0 2^{-\frac{t}{5700}}$$

on q_0 és la quantitat inicial de Carboni que contenia el fòssil quan era viu, q és la quantitat de que trobem al fòssil i t el temps en anys.

- a) Escriuiu la funció que es fa servir per datar restes arqueològiques.
- b) Quina és l'edat d'una mòmia si la quantitat de carboni que presenta és la meitat de la que tindria si la persona fos viva?

Solució.

Només cal aïllar t :

$$\frac{q}{q_0} = 2^{-\frac{t}{5700}} \implies \log_2\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{5700}$$

$$\implies t = -5700 \log_2\left(\frac{q}{q_0}\right) \implies t = \log_2\left(\frac{q}{q_0}\right)^{-5700}$$

$$\implies t = \log_2\left(\frac{q_0}{q}\right)^{5700}$$

Per tal que la quantitat de carboni sigui la meitat que quan la persona era viva necessitem:

$$q = 0.5q_0 \implies \frac{q_0}{q} = 2$$

Per tant, l'edat de la mòmia serà:

$$t = \log_2(2)^{5700} = 5700 \text{ anys}$$

Capítol 3

Trigonometria

Continguts

<i>Exercici: 59</i>	99
<i>Exercici: 60 Pg. 71 n° 15</i>	100
<i>Exercici: 61</i>	101
<i>Exercici: 62</i>	102
<i>Exercici: 63 Pg. 82 n° 12</i>	103
<i>Exercici: 64</i>	104
<i>Exercici: 65</i>	105
<i>Exercici: 66 Exercici d'examen Curs 20-21</i>	106
<i>Exercici: 67 Algunes identitats trigonomètriques</i>	106
<i>Exercici: 68 Pg. 264 n°29</i>	107

Exercici 59.

- a) Si $\tan(\alpha) = -\frac{1}{4}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calculeu, sense trobar el valor d' α , el valor exacte de $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ i $\cos(180^\circ - \alpha)$
- b) Trobeu una fórmula per $\tan(\alpha + \beta)$, i feu-la servir per trobar $\tan(75^\circ)$ sense fer servir la calculadora (és a dir, només fent servir 30° , 45° i 60°). Doneu el resultat com a decimal i en forma exacta (amb arrels).

Solució.

a) Com l'angle es troba al segon quadrant tindrem $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha < 0$. Per tal de trobar els valors hem de resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{4} \\ \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \end{array} \right\}$$

Elevant al quadrat la primera equació i aïllant $\sin^2(\alpha)$ de la segona trobem i substituint trobem

$$\frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{16}$$

Aïllant $\cos^2(\alpha)$ trobem

$$\cos^2(\alpha) = \frac{16}{17} \implies \cos(\alpha) = \pm \frac{4}{\sqrt{17}} = \pm \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

Recordant que l'angle es troba al segon quadrant, la solució correcta serà

$$\cos(\alpha) = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

De la segona equació trobem el sinus:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{4^2 \cdot 17}{17^2} = \frac{17^2 - 4 \cdot 17^2}{17^2} \\ &= \frac{(17 - 16)17}{17^2} = \frac{1}{17} \\ \sin(\alpha) &= \pm \sqrt{\frac{1}{17}} = \pm \frac{\sqrt{17}}{17} \end{aligned}$$

Recordant que l'angle es troba al segon quadrant, la solució correcta serà la positiva:

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

Exercici 60: Pg. 71 n° 15.

Sabent que $\cos(\alpha) = 0.8$ amb $0 < \alpha < 90$ i que $\sin(\beta) = 0.6$ amb $90 < \beta < 180$, calculeu:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $\sin(\alpha + \beta)$ | d) $\cos(\beta - \alpha)$ |
| b) $\cos(\alpha + \beta)$ | e) $\sin(2\alpha)$ |
| c) $\sin(\beta - \alpha)$ | f) $\cos(2\beta)$ |

Solució.

Comencem calculant la resta de raons trigonomètriques dels dos angles:

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) + (0.8)^2 &= 1 \implies \sin(\alpha) = \pm 0.6 \\ (0.6)^2 + \cos^2(\beta) &= 1 \implies \cos(\beta) = \pm 0.8\end{aligned}$$

Com α i β són al primer i al segon quadrant, respectivament, trobem:

$$\sin(\alpha) = 0.6$$

$$\cos(\beta) = -0.8$$

Les igualtats que ens demanen les podem treure de les fórmules de l'angle suma:

- a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = 0.6 \cdot (-0.8) + 0.8 \cdot 0.6 = 0$
- b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) = 0.8 \cdot (-0.8) - 0.6 \cdot 0.6 = -1$
- c) $\sin(\beta - \alpha) = \sin(\beta) \cos(-\alpha) + \cos(\beta) \sin(-\alpha) = 0.6 \cdot 0.8 + (-0.8) \cdot (-0.6) = 0.96$
- d) $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta) \cos(-\alpha) - \sin(\beta) \sin(-\alpha) = (-0.8) \cdot 0.8 - 0.6 \cdot (-0.6) = -0.28$
- e) $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.96$
- f) $\cos(2\beta) = \cos(\beta + \beta) = \cos(\beta) \cos(\beta) - \sin(\beta) \sin(\beta) = (-0.8)^2 - 0.6^2 = 0.28$

Exercici 61.

Calculeu, sense trobar l'angle,

- a) $\cos(2 \cdot \arcsin(0.3))$
- b) $\sin(\arcsin(0.4) + \arccos(0.5))$

Solució.

- a) Notem que $\arcsin(0.3)$ es tracta d'un angle, α , que compleix que $\sin(\alpha) = 0.3$.
Fent servir que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ trobem que

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - 0.3^2} = \pm\sqrt{0.91}$$

Per tant,

$$\cos(2 \arcsin(0.3)) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 0.91 - 0.09 = 0.81$$

- b) Tenim ara dos angles, dels quals sabem:

$$\sin(\alpha) = 0.4 \implies \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - 0.4^2} = \pm 0.916$$

$$\cos(\beta) = 0.5 \implies \sin(\beta) = \pm\sqrt{1 - 0.5^2} = \pm 0.866$$

Per tant tindrem:

$$\sin(\arcsin(0.4) + \arccos(0.5)) = 0.4 \cdot 0.5 + (\pm 0.916) \cdot (\pm 0.866)$$

d'on traiem dues possibles opcions:

$$0.2 + 0.916 \cdot 0.866 = \boxed{0.993}$$

$$0.2 - 0.916 \cdot 0.866 = \boxed{-0.593}$$

Exercici 62.

Sabent que $\tan(\alpha) = 1.3$ i que $180 < \alpha < 270$, sense trobar l'angle, calculeu:

a) $\sin(\alpha)$

b) $\cos(\alpha)$

c) $\cos(2\alpha)$

d) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Solució.

Per calcular tot el que ens demanen necessitem calcular $\sin(\alpha)$ i $\cos(\alpha)$. Per fer-ho plantegem el següent sistema d'equacions:

$$\left. \begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

De la primera equació aïllem $\sin(\alpha) = \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 1.3 \cos(\alpha)$ i ho substituïm a la segona per obtenir:

$$(1.3 \cos(\alpha))^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \implies 2.69 \cos^2(\alpha) = 1 \implies \cos(\alpha) = \pm 0.609$$

I trobem $\sin(\alpha)$ fent:

$$\sin(\alpha) = 1.3 \cdot \cos(\alpha) = \pm 0.792$$

Tenint en compte que l'angle és al 3r quadrant, obtenim:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \boxed{-0.792} \\ \cos(\alpha) &= \boxed{-0.609} \end{aligned}$$

Amb això ja podem trobar la resta de coses que ens demanen:

c) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = -0.256$

d) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) = 0.609$

e) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha) = 0.792$

Exercici 63: Pg. 82 n° 12.

Un pal...

Solució.

La situació es resumeix a la figura 3.1 Si sapiguéssim el costat a , trobaríem h fent:

$$h = a \sin(60)$$

Per tal de trobar a , apliquem el teorema del sinus, ja que coneixem més angles que costats. Com només coneixem el costat 20 caldrà trobar l'angle α fent:

$$\alpha = 180 - 75 - 60 = 45^\circ$$

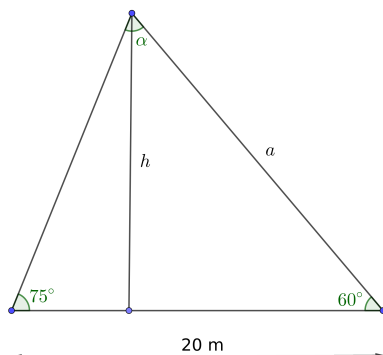


Figura 3.1: Exercici 63

Per tant, pel teorema del sinus tenim:

$$\frac{a}{\sin(75)} = \frac{20}{\sin(45)} \implies a = 14.64 \text{ m}$$

Per tant,

$$h = 12.67 \text{ m}$$

Exercici 64.

A partir de l'angle suma, trobeu una fórmula per calcular

a) $\cos(2\alpha + \beta)$

b) $\sin(2\alpha - \beta)$

Solució.

a)

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha + \beta) &= \cos(2\alpha) \cos(\beta) - \sin(2\alpha) \sin(\beta) = \\ &= \cos(\alpha + \alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha + \alpha) \sin(\beta) = \\ &= (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \cos(\beta) - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha - \beta) &= \sin(2\alpha + (-\beta)) = \sin(2\alpha) \cos(-\beta) + \cos(2\alpha) \sin(-\beta) = \\ &= \sin(2\alpha) \cos(\beta) - \cos(2\alpha) \sin(\beta) = \\ &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cos(\beta) - (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta)) \sin(\beta)\end{aligned}$$

Exercici 65.

Un vaixell navega paral·lelament a la línia que uneix dos fars F_1 i F_2 , situats a una distància de 10km un de l'altre. En un moment donat, la visual dirigida al vaixell des del far F_1 forma un angle de 60° amb F_1F_2 , i la visual des de F_2 forma un angle de 50° amb aquesta mateixa recta. Al cap de 10 minuts, la visual des de F_1 forma un angle de 45° amb F_1F_2 . A quina velocitat navega el vaixell?

Solució.

La situació es resumeix a la Figura A la figura hi ha representat el punt P_1 on es troba

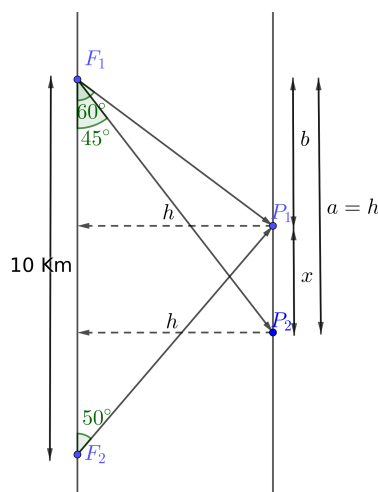


Figura 3.2: Exercici 65

el vaixell en el moment de la primera a mesura, i P_2 en el moment de la segona. Per tal de saber a quina velocitat es mou el vaixell només cal saber la distància $x = P_1P_2$ recorreguda en 10 min. Per tal de conèixer la distància x fixem-nos que

$$x = a - b$$

Per tal de trobar b només caldrà trobar la distància F_1P_1 i fer

$$b = F_1P_1 \cos(60)$$

Podem trobar la distància F_1P_1 aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{F_1P_1}{\sin(50)} = \frac{10}{\sin(180 - 60 - 50)}$$

d'on

$$F_1P_1 = 8.152 \text{ Km}$$

i

$$b = 8.152 \cos(60) = 4.076 \text{ Km}$$

Ara, per trobar a , fixem-nos que en ser l'angle corresponent de 45° , tindrem que

$$a = h$$

Per tant, només cal trobar h fent servir

$$h = F_1P_1 \sin(60) = 7.06 \text{ Km}$$

Per tant:

$$x = a - b = 2.983 \text{ Km}$$

i la velocitat serà:

$$\frac{x}{10 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \boxed{17.9 \text{ Km/h}}$$

Exercici 66: Exercici d'examen Curs 20-21.

Una persona observa un objecte que té davant i a la seva esquerra. L'ull esquerra apunta amb un angle de 7° respecte la frontal (perpendicular sortint del front), mentre que el dret ho fa amb un angle de 10° . Sabent que la distància entre els ulls és de 63mm , a quina distància es troba l'objecte de l'ull més proper?

Exercici 67: Algunes identitats trigonomètriques.

Comproveu que les següents identitats trigonomètriques són certes

$$a) \ 1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$b) \ \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$c) \ \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{2}{\sin(\alpha)}$$

$$d) \ \tan(\alpha) + \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{1}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}$$

Exercici 68: Pg. 264 n°29.

Resoleu les següents equacions trigonomètriques

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

b) $2 \cos(x) + 1 = 0$

c) $2 \sin^2(x) - \sin(x) = 1$

d) $2 \sin(x) = \tan(x)$

e) $2 \cos^2(x) = \cos(2x) + 1$

f) $\cos(x) + \sin(2x) = (\sin(x) + \cos(x))^2$

Capítol 4

Nombres complexos

Continguts

<i>Exercici: 69</i>	109
<i>Exercici: 70</i>	110
<i>Exercici: 71</i> Fórmula d'Euler	111
<i>Exercici: 72</i>	111
<i>Exercici: 73</i> Pg. 99 n° 1	112
<i>Exercici: 74</i> Pg. 99 n°2	112
<i>Exercici: 75</i>	113
<i>Exercici: 76</i>	114
<i>Exercici: 77</i>	115
<i>Exercici: 78</i>	116
<i>Exercici: 79</i>	116
<i>Exercici: 80</i>	117

Exercici 69.

Calculeu

$$\frac{2-i}{3+i} =$$

Solució.

Opció 1 Divisió en binòmica

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{3+i} &= \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-5i+i^2}{3^2-i^2} = \frac{6-5i-1}{9-(-1)} \\ &= \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Opció 2 Passar a polar.

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5} \\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{-1}{2}\right) = -26.56^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10} \\ \theta_2 &= \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{3+i} &= \frac{\rho_1 \theta_1}{\rho_2 \theta_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\theta_1 - \theta_2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)_{-26.56^\circ - 18.43^\circ} = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}\right)_{-45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}_{-45^\circ}\end{aligned}$$

Si ara el passem a binòmica:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}_{-45^\circ} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(-45^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(-45^\circ)i \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Exercici 70.

Calcular

$$(3 + 4i)^{-1}$$

Solució.

Opció 1 Ho passem a polar:

$$\rho = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \arctan \frac{4}{3} = 53.13^\circ$$

Aleshores

$$(5_{53.13^\circ})^{-1} = \frac{1}{5_{-53.13^\circ}}$$

Opció 2 Racionalitzant:

$$(3 + 4i)^{-1} = \frac{1}{3 + 4i} = \frac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4i}{9 + 16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Exercici 71: Fórmula d'Euler.

a) Considereu θ un angle en radians. Doneu un valor a θ i comproveu que

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \\ \cos(\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\end{aligned}$$

Per fer-ho, d'una banda calculeu $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ per un valor qualsevol de θ (petit i en radians), i de l'altra feu les sumes pel mateix valor de θ fins a ordre 6 o 7.

b) Fent servir les igualtats anteriors i que

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

demostru la fórmula d'Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Exercici 72.

Passeu de binòmica a polar o de polar a binòmica els següents nombres complexos:

a) $-1 + 3i$

c) 2_{30°

b) $2 - 2i$

d) 2_{200°

Exercici 73: Pg. 99 n° 1.*Resoleu les següents equacions*

a) $x^2 + 25 = 0$

b) $9x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

d) $x^2 - 4x + 5 = 0$

Solució.

a) $x^2 = -25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25 \cdot (-1)} = \pm 5\sqrt{-1} = \pm 5i$

b) $x^2 = -\frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}i$

c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

Exercici 74: Pg. 99 n°2.*Donats $z_1 = 1 - 2i$ i $z_2 = -4 + 6i$ calculeu:*

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $\frac{z_1}{z_2}$

Solució.

a) $z_1 + z_2 = -3 + 4i$

b) $z_1 - z_2 = 5 - 8i$

c) $z_1 \cdot z_2 = -4 - 12i^2 + 6i + 8i = -4 + 12 + 14i = 8 + 14i$

d) $\frac{1-2i}{-4+6i} = \frac{1-2i}{-4+6i} \cdot \frac{-4-6i}{-4-6i} = \frac{-4-12-6i+8i}{16+36} = \frac{-16+2i}{52} = -\frac{4}{13} + \frac{1}{26}i$

Exercici 75.

Pg. 47 n° 3 Expressen els nombres $z_1 = -1 + i$ i $z_2 = 4 - \sqrt{3}i$ en forma polar, i calculeu

$$\frac{z_1^4}{z_2}$$

Solució.

Per passar-ho a polar caldrà calcular el mòdul i l'angle:

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$

$$|z_2| = \sqrt{16 + 3} = \sqrt{19}$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right) = -23.41^\circ$$

Fixem-nos que si calculem l'argument de z_1 fent servir l'arctangent li haurem de sumar 180° perquè z_1 pertany al 2n quadrant mentre que -45° és un angle del quart quadrant. En canvi, en calcular l'angle de z_2 el resultat que retorna la calculadora en fer l'arctangent ja és el correcte perquè z_2 pertany al quart quadrant.

Ara, per calcular el que ens demanen més val fer servir la forma polar, perquè en multiplicar multiplicarem mòduls i sumarem angles, mentre que en dividir dividirem mòduls i restarem angles:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^4}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{2})^4_{4 \cdot 135^\circ}}{\sqrt{19}_{-23.41^\circ}} \\ &= \frac{4_{540^\circ}}{\sqrt{19}_{-23.41^\circ}} = \frac{4_{180^\circ}}{\sqrt{19}_{-23.41^\circ}} = \frac{4}{\sqrt{19}} \angle 180 + 23.41 \\ &= \boxed{\frac{4}{\sqrt{19}} \angle 203.41^\circ} \end{aligned}$$

Fixem-nos que l'angle de 540 el podem reduir a $180^\circ = 540^\circ - 360^\circ$ perquè és més d'una volta.

Exercici 76.

Considereu un z_1 :

- Si r és el mòdul de z_1 i α és el seu angle, escriviu-lo en forma trigonomètrica.
- Escriviu el complex $z_2 = e^{i\beta}$ en forma trigonomètrica (passant-lo a binòmica).
- Fent servir les dues expressions obtingudes en els apartats anteriors, demostreu que el producte $z_1 \cdot z_2$ consisteix en girar un angle β en sentit antihorari el complex z_1 .
- Feu servir la fórmula obtinguda a l'apartat anterior per girar el vector $(1, 3)$ un angle de 30° en sentit antihorari.

Solució.

- Simplement, recordant la forma trigonomètrica obtenim:

$$z_1 = r (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$$

- El mòdul de $e^{i\beta}$ és 1, i el seu argument β . Per tant, si l'escrivim en forma trigonomètrica ens quedarà:

$$z_2 = \cos(\beta) + i \sin(\beta)$$

- Fem ara el producte $z_1 \cdot z_2$ en forma binòmica:

$$\begin{aligned} r \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \sin(\beta)) &= \\ &= r (\cos(\alpha) \cos(\beta) + i \cos(\alpha) \sin(\beta) + i \sin(\alpha) \cos(\beta) + \overbrace{i^2}^{-1} \sin(\alpha) \sin(\beta)) = \\ &= r \left(\underbrace{\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i \underbrace{(\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))}_{\sin(\alpha+\beta)} \right) = \\ &= r (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

Veiem que el complex resultant és un complex de mòdul r i angle $\alpha + \beta$. Per tant, el complex z_1 ha mantingut el mòdul però ha girat un angle β en sentit antihorari.

d) Per girar el vector $(1, 3)$ un angle de 30° en sentit antihorari calculem primer el seu mòdul i angle:

$$\|(1, 3)\| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{1}\right) = 71.56^\circ$$

Per tant, el vector, representat com a complex, girat 30 graus serà:

$$\sqrt{10}(\cos(71.56 + 30) + i \sin(71.56 + 30)) \simeq -0.634 + 3.09i$$

Per tant, el vector demanat serà, aproximadament,

$$\boxed{(-0.634, 3.09)}$$

Exercici 77.

Siguin

$$z_1 = -1 + 2i \quad z_2 = -3 - 4i$$

Calculeu:

a) z_1^6

b) $z_1^3 \cdot z_2$

c) $\frac{z_1}{z_2^4}$

d) $\frac{z_2^4}{z_1}$

Solució.

Clarament, el més còmode per fer aquestes operacions és tenir els complexos expressats en forma polar o exponencial. Pel que fa a z_1 fixem-nos que pertany al 2n quadrant, i per tant cladrà sumar 180° a l'angle perquè, en ser la seva tangent negativa, la calculador retornarà un angle del 4rt quadrant:

$$|z_1| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + 180^\circ = -63.3^\circ + 180 = 116.6^\circ$$

El mateix passa amb z_2 , també caldrà sumar-li 180° al seu argument perquè pertanyi al 3r quadrant i la calculadora ens retornarà un angle del primer quadrant:

$$|z_2| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) + 180^\circ = 233.1^\circ$$

Ara podem fer les operacions que ens demanen:

$$a) z_1^6 = \left(\sqrt{5}\right)^6 \angle 6 \cdot 116.6 = 125_{339.6^\circ}$$

$$b) z_1^3 \cdot z_2 = 5\sqrt{5}_{3 \cdot 116.5} \cdot 5_{233.1} = 25\sqrt{5}_{582.6^\circ} = 25\sqrt{5}_{222.6^\circ}$$

$$c) \frac{z_1}{z_2^4} = \frac{\sqrt{5}_{116.6^\circ}}{5^4_{4 \cdot 233.1^\circ}} = \frac{\sqrt{5}}{625} \angle -95.9^\circ$$

d) Fixem-nos que ens demanen l'invers de l'anterior. Per tant tindrem l'angle canviat de signe i el mòdul invertit:

$$\frac{z_1^4}{z_2} = \frac{625}{\sqrt{5}} \angle 95.9 = 125\sqrt{5}_{95.9^\circ}$$

Exercici 78.

Quina relació hi ha entre un complex z i el seu invers $\frac{1}{z}$?

Solució.

Si considerem $z = re^{i\theta}$ i fem la divisió:

$$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{i0}}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

El seu mòdul s'inverteix, i el seu angle es canvia de signe.

Exercici 79.

Factoritzeu el polinomi $x^3 + 9x$

Solució.

Per factoritzar-lo hem de buscar les seves arrels, és a dir, resoldre l'equació

$$x^3 + 9x = 0 \implies x(x^2 + 9) = 0$$

D'aquí traiem dues opcions:

$$x = 0$$

$$x^2 + 9 = 0 \implies x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$$

Per tant, la factorització quedarà:

$$x^3 + 9x^2 = x(x - 3i)(x + 3i)$$

Exercici 80.

Considereu un complex z i el seu conjugat, $\bar{z}$.

- a) Què passa si els sumem: $z + \bar{z}$?*
- b) Què passa si els restem: $z - \bar{z}$?*
- c) Què passa si els multipliquem: $z \cdot \bar{z}$?*
- d) Què passa si els dividim: $\frac{z}{\bar{z}}$?*

Capítol 5

Geometria plana

Continguts

5.1 Vectors i producte escalar	121
<i>Exercici: 81</i> Producte escalar i Teorema de Pitàgores	121
<i>Exercici: 82</i>	122
<i>Exercici: 83</i> Pg. 118 n° 39	123
<i>Exercici: 84</i> Pg. 118 n° 41	123
<i>Exercici: 85</i> Pg. 118 n° 42	124
<i>Exercici: 86</i>	124
<i>Exercici: 87</i> Pg. 118 n° 44	124
<i>Exercici: 88</i> Pg. 120 n° 6	125
<i>Exercici: 89</i> Pg. 120 n° 10	126
<i>Exercici: 90</i> Pàgina 120 n° 11	126
<i>Exercici: 91</i> Exercici examen curs 20-21	126
<i>Exercici: 92</i>	126
5.2 Rectes al pla	127
<i>Exercici: 93</i> Pg. 130 n° 13	127
<i>Exercici: 94</i> Pg. 130 n° 14	127
<i>Exercici: 95</i> Pg. 143 n° 5	128
<i>Exercici: 96</i> Pg. 137 n° 32	128
<i>Exercici: 97</i> Pg. 137 n° 33	129

<i>Exercici:</i> 98 Pg. 143 n ^o 8	130
<i>Exercici:</i> 99 Pg. 143 n ^o 10	130
<i>Exercici:</i> 100 Exercici proposat a classe, 23-1-2020	132
<i>Exercici:</i> 101 Pg. 143 n ^o 12	133
<i>Exercici:</i> 102 Pg. 143 n ^o 3	136
<i>Exercici:</i> 103 Pg. 144 n ^o 17	136
<i>Exercici:</i> 104 Pg. 144 n ^o 25	138
<i>Exercici:</i> 105 Examen final curs 18-19	139
<i>Exercici:</i> 106	141
<i>Exercici:</i> 107	142
<i>Exercici:</i> 108	142
<i>Exercici:</i> 109	144
<i>Exercici:</i> 110 Pg. 132 n ^o 20	144
<i>Exercici:</i> 111 Pg. 132 n ^o 23	145
<i>Exercici:</i> 112 Pg. 135 n ^o 25	146
<i>Exercici:</i> 113	146
<i>Exercici:</i> 114 Pg. 135 n ^o 30	147
<i>Exercici:</i> 115 Posició del baricentre	148
<i>Exercici:</i> 116 Pg. 144 n ^o 30	150
<i>Exercici:</i> 117	152
<i>Exercici:</i> 118 Intersecció entre rectes	153
<i>Exercici:</i> 119 Trobar el circumcentre	153
<i>Exercici:</i> 120 Posició relativa de rectes	154
<i>Exercici:</i> 121 Recta perpendicular	156
<i>Exercici:</i> 122 Trobar el punt simètric	157
<i>Exercici:</i> 123 Vectors formant un angle determinat	158
5.3 Rectes al pla i circumferències	160
<i>Exercici:</i> 124 Pg. 168 n ^o 4	160
<i>Exercici:</i> 125 Pg. 168 n ^o 5	161
<i>Exercici:</i> 126 Pg. 168 n ^o 9	161
<i>Exercici:</i> 127 Pg. 169 n ^o 10	161

<i>Exercici: 128</i> Circumferència circumscrita, Pg. 169 n° 11	163
<i>Exercici: 129</i> Pg. 169 n°12	164
<i>Exercici: 130</i> Pg. 170 n° 20	164
<i>Exercici: 131</i>	167
<i>Exercici: 132</i> Posició relativa recta-circumferència	167
<i>Exercici: 133</i> Circumferència circumscrita	168
<i>Exercici: 134</i> Circumferència tangent a una recta i centre en un altra	168
<i>Exercici: 135</i> Circumferències tangents	169
<i>Exercici: 136</i> Intersecció recta i circumferència	169

5.1 Vectors i producte escalar

Exercici 81: Producte escalar i Teorema de Pitàgores.

Demostreu que si $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ aleshores

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Interpreteu-ho també gràficament.

Solució.

Recordem la següent propietat del producte escalar:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{w}\|^2.$$

Aplicant aquesta propietat al vector $\vec{u} + \vec{v}$ obtenim

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{u})$$

Com el producte escalar compleix la propietat distributiva, podem desenvolupar la part dreta de la igualtat obtenint

$$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{=\|\vec{v}\|^2} + 2 \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{=0} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=\|\vec{u}\|^2} = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2$$

Pel que fa a la interpretació gràfica, fixem-nos que la condició $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ implica que els vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ són perpendiculars (assumint que cap d'ells és el vector nul). D'altra banda, el vector suma $\vec{v} + \vec{u}$ no és més que la hipotenusa del triangle rectangle format pels vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$. Per tant, la propietat que hem demostrat és equivalent al teorema de Pitàgores.

Exercici 82.

Considereu el paral·lelogram amb vèrtexs consecutius $A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ i $C = (5, -2)$

- Comproveu que no estan alineats
- Trobeu el quart vèrtex i el perímetre
- Calculeu l'angle que formen les diagonals. Amb la informació anterior digueu de quin tipus de paral·lelogram es tracta (quadrat, rectangle, rombe o cap d'ells).

Solució.

- No estan alineats perquè els vectors $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3)$ i $\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -6)$ són l.i.
- Com els vèrtexs són consecutius, el quart vèrtex, D , el trobarem posant a C el vector $\overrightarrow{BA}$, o bé posant a A el vector $\overrightarrow{BC}$:

$$D = C + \overrightarrow{BA} = C + A - B = (3, 3)$$

$$D = A + \overrightarrow{BC} = A + C - B = (3, 3)$$

El perímetre serà:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \|\overrightarrow{AB}\| + 2 \cdot \|\overrightarrow{BC}\| &= 2\sqrt{2^2 + 3^2} + 2\sqrt{2^2 + 6^2} \\ &= 2\sqrt{13} + 2\sqrt{40} = 2\sqrt{13} + 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

- Les diagonals són $\overrightarrow{BD} = D - B = (0, -1)$ i $\overrightarrow{AC} = C - A = (4, -3)$. L'angle que formen el calcularem fent servir el producte escalar:

$$\cos(\theta) = \frac{(0, -1) \cdot (4, -3)}{\sqrt{0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + 9}} = \frac{3}{5}$$

Ara trobem l'angle fent

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53.13^\circ$$

Com els costats AB i BC són diferents, ja sabem que no és un quadrat ni un rombe. Com a més a més, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$, tampoc podrà ser un rectangle perquè els costats no són perpendiculars. Per tant, serà un paral·lelogram.

Exercici 83: Pg. 118 n° 39.

Demostreu que el triangle amb els vèrtexs $A = (1, 2)$, $B = (6, 5)$ i $C = (3, 10)$ és rectangle en B .

Solució.

Opció 1 Només cal veure que els vectors $\vec{BA}$ i $\vec{BC}$ són perpendiculars, cosa que es complirà si el seu producte escalar és zero:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (A - B) \cdot (C - B) = (-5, -3) \cdot (-3, 5) = 15 - 15 = 0$$

Opció 2 Si és rectangle haurà de complir el teorema de Pitàgores. Com el costat AC és la hipotenusa, això serà:

$$\begin{aligned} |\vec{AC}|^2 &\stackrel{?}{=} |\vec{BA}|^2 + |\vec{BC}|^2 \\ \left(\sqrt{2^2 + 8^2}\right)^2 &\stackrel{?}{=} \left(\sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-3)^2 + 5^2}\right)^2 \\ 4 + 64 &\stackrel{?}{=} 25 + 9 + 9 + 25 \\ 68 &\stackrel{\checkmark}{=} 68 \end{aligned}$$

Per tant, com es compleix el teorema de Pitàgores, el triangle serà rectangle en B .

Exercici 84: Pg. 118 n° 41.

Els punts $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$ i $C = (7, 4)$ són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Determineu les coordenades del quart vèrtex i les del punt d'intersecció de les diagonals.

Solució.

a) El quart vèrtex el podem obtenir de varies maneres equivalents:

a1 Posem sortint de C el vector $\vec{BA}$: $D = C + \vec{BA} = C + A - B = (5, 1)$

a2 Imposem que els vectors $\vec{CD}$ i $\vec{BA}$ siguin iguals:

$$\vec{CD} = \vec{BA} \iff D - C = A - B \iff D = C + A - B = (5, 1)$$

a3 Posem sortint de A el vector $\vec{BC}$:

$$D = A + \vec{BC} \implies D = A + C - B = (5, 1)$$

b) El punt on es tallen les diagonals serà el punt mig:

$$M = \frac{B + D}{2} = (4, 3)$$

Exercici 85: Pg. 118 n° 42.

Els punts $P = (3, -7)$ i $Q = (5, 13)$ pertanyen a una circumferència i són diametralment oposats. Calculeu el centre de la circumferència i el seu radi.

Solució.

Com són diametralment oposats, el centre serà el punt mig del segment PQ :

$$C = \frac{P + Q}{2} = \frac{(8, 6)}{2} = (4, 3)$$

El radi el trobarem calculant la distància entre els punt C i Q , o C i P o dividint la distància entre P i Q entre 2. Recordant que la distància entre dos punts és el mòdul del vector que els separa tindrem:

$$R = |\vec{CP}| = |\vec{CQ}| = \frac{|\vec{PQ}|}{2} = \sqrt{101}$$

Exercici 86.

Justifiqueu si són certes o no les següents afirmacions

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{t} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{t})$

b) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exercici 87: Pg. 118 n° 44.

Trobar el valor de p per tal que els punts $A = (2, 5)$, $B = (3, -2)$ i $C = (-1, p)$ estiguin alineats.

Solució.

Per tal que estiguin alineats necessitem que dos vectors qualsevols unint els tres punts tinguin la mateixa direcció. Per exemple:

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \lambda \vec{AC} \implies A - B = \lambda (C - A) \\ (-1, 7) &= \lambda (-3, p - 5) \end{aligned}$$

Es tracta d'una equació vectorial, amb dues incògnites i dues equacions, que són:

$$\left. \begin{array}{l} -1 = -3\lambda \\ 7 = \lambda(p - 5) \end{array} \right\}$$

De la primera traiem que $\lambda = \frac{1}{3}$, i substituint-t'ho a la segona tindrem:

$$7 = \frac{1}{3}(p - 5) \iff p = 26$$

Exercici 88: Pg. 120 n° 6.

Calcular el vector $\vec{u}$ que verifica:

a) *És unitari (té mòdul 1)*

b) *Té la mateixa direcció que $\vec{v} = (-6, 8)$ però sentit contrari.*

Solució.

Opció 1 Ens preguntem per quant hem de multiplicar el vector $\vec{v}$ per tal que es compleixi:

$$\begin{aligned} |\lambda \vec{v}| = 1 &\implies |(-6\lambda, 8\lambda)| = 1 \iff \sqrt{(-6\lambda)^2 + (8\lambda)^2} = 1 \\ &= \sqrt{36\lambda^2 + 64\lambda^2} = 1 \iff \sqrt{100\lambda^2} = 1 \\ \left(\sqrt{100\lambda^2}\right)^2 &= 1^2 \iff 100\lambda^2 = 1 \iff \pm\sqrt{\frac{1}{100}} \iff \lambda = \pm\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Per tant, com volem que tingui sentit contrari, el vector $\vec{u}$ serà:

$$\vec{u} = -\frac{1}{10}\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Opció 2 Alternativament, sabem que si dividim un vector entre el seu propi mòdul tindrem un vector amb la mateixa direcció i sentit però de mòdul 1. Si volem que tingui sentit contrari no és caldrà dividir-lo entre el seu propi mòdul i canviar-li el signe. Per tant:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{36 + 64} = 10 \\ \vec{u} &= -\frac{\vec{v}}{10} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

Exercici 89: Pg. 120 n° 10.

Donat el segment d'extrems $P = (3, -5)$ i $Q = (6, -8)$ determineu les coordenades del punt R d'aquest segment que verifica $PR = \frac{3}{10} \cdot PQ$.

Solució.

El punt el trobarem posant a P el vector $\vec{PQ}$ dividit entre 10 i multiplicat per 3:

$$\begin{aligned} R &= P + \frac{3 \cdot \vec{PQ}}{10} = P + \frac{3(Q - P)}{10} = \frac{10P + 3Q - 3P}{10} = \frac{7P + 3Q}{10} = \\ &= \frac{(21, 35) + (18, -24)}{10} = \left(\frac{39}{10}, \frac{11}{10} \right) \end{aligned}$$

Exercici 90: Pàgina 120 n° 11.

El baricentre d'un triangle se situa en el punt $G = (-2, 0)$ i dos dels seus vèrtexs als punts $A = (3, 4)$ i $B = (-6, 5)$. Trobeu les coordenades del vèrtex que falta.

Solució.

Diguem M al punt mig del segment AB :

$$M = \frac{A + B}{2} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

Sabem que el punt G es troba a un terç del camí anant de M a l'altre vèrtex, C . Per tant ha de complir l'equació:

$$G = M + \frac{\vec{MC}}{3} = M + \frac{C - M}{3} = \frac{2M + C}{3}$$

Si ara aïllem C ens quedarà:

$$C = 3G - 2M = (-6, 0) - (-3, 9) = \boxed{(-3, -9)}$$

Alternativament, podem trobar C situant en vector $3\vec{MG}$ sortint de M :

$$C = M + 3\vec{MG} = M + 3(G - M) = -2M + 3G = (-3, -9)$$

Exercici 91: Exercici examen curs 20-21.

Considereu tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{t}$. Raoneu per què l'expressió

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{t}$$

NO és correcta.

Exercici 92.

Els punts $(1, 1)$ i $(-1, 3)$ divideixen el segment AB en tres parts iguals. Trobeu els punts A i B .

5.2 Rectes al pla

Exercici 93: Pg. 130 n° 13.

Comprovar que els punts $A = (2, 3)$, $B = (-2, 1)$ i $C = (5, -1)$ no estan alineats, i trobar les rectes que determinen el triangle A , B i C .

Solució.

Només cal veure que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ no són múltiples, és a dir, són linealment independents. Obtenim $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -2)$ i $\overrightarrow{BC} = C - B = (7, -2)$. Clarament són l.i. Si ens fixem en la segona coordenada, són la mateixa però la primera no. Per tant, no podrem obtenir mai un vector a partir de l'altre multiplicant per algun escalar.

Com no ens demana la forma en què han d'estar les rectes, el més fàcil és donar-ho en vectorial. Obtindrem:

$$(x, y) = A + \lambda \overrightarrow{AB},$$

$$(x, y) = B + \nu \overrightarrow{BC},$$

$$(x, y) = C + \mu \overrightarrow{CA},$$

on $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ ja els havíem calculat abans i $\overrightarrow{CA} = (-3, 4)$.

Exercici 94: Pg. 130 n° 14.

Obtenir l'equació explícita de la recta que passa pels punts $P = (0, 2)$ i $Q = (5, -1)$.

Solució.

El més fàcil és obtenir el pendent a partir del vector director $\overrightarrow{PQ}$:

$$m = \frac{-1 - 2}{5 - 0} = -\frac{3}{5}.$$

Per trobar n imposarem que passi per P , per exemple. Ho podem fer en la forma punt pendent:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

on m és el pendent (que ja hem trobat) i (x_0, y_0) són les coordenades d'un punt de pas. Substituint obtenim

$$y - 2 = -\frac{3}{5}(x - 0),$$

i aïllant y obtenim la forma explícita de la recta:

$$y = -\frac{3}{5}x + 2.$$

Una altra opció és trobar n directament resolent una equació imposant que el punt P compleixi l'equació $y = -\frac{3}{5}x + n$:

$$2 = -\frac{3}{5} \cdot 0 + n \implies n = 2.$$

Exercici 95: Pg. 143 n° 5.

Trobar A i B per tal que les rectes

$$2x + 3y - 5 = 0 \quad Ax + By - 4 = 0$$

siguin perpendiculars i la segona passi pel punt $(2, 1)$.

Solució.

Haurem de resoldre un sistema de dues equacions. La primera la trobem imposant la perpendicularitat. Com les equacions les tenim en forma general, els vectors $(2, 3)$ i (A, B) són vectors perpendiculars (vectors normals) a les respectives rectes. Per tant, si les rectes han de ser perpendiculars entre elles, els vectors normals també ho hauran de ser. Imposem que el producte escalar sigui 0:

$$(2, 3) \cdot (A, B) = 2A + 3B = 0.$$

Una segona equació la trobem imposant que la segona recta passi pel punt $(2, 1)$. Perquè el punt aquest pertanyi a la recta haurà de complir la seva equació:

$$2A + B - 4 = 0$$

Així només hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 2A + 3B = 0 \\ 2A + B - 4 = 0 \end{cases}$$

Restant la primera equació menys la segona obtenim

$$2B + 4 = 0 \implies B = -2.$$

Substituint-ho a la segona equació tenim

$$2A - 2 - 4 = 0 \implies A = 3.$$

Exercici 96: Pg. 137 n° 32.

Considereu la recta $r : x - y + 4 = 0$ i el punt $P = (2, -\frac{1}{2})$. Trobeu l'equació de les rectes que passen per P i formen un angle de 60° amb r

Solució.

Noteu que la recta és paral·lela a la bisectriu ja que té pendent 1, i per tant forma un angle de 45° amb l'eix horitzontal ($\arctan 1 = 45^\circ$). Hi ha dues rectes que formen 60° amb r , girant r en sentit negatiu o bé en sentit positiu. Fàcilment podem trobar els pendents d'aquestes rectes. La primera formarà un angle de $45 - 60 = -15^\circ$ amb l'eix horitzontals, i per tant tindrà un pendent de $\tan(-15^\circ) \sim -0.26$. La segona formarà un angle de $45 + 60 = 105^\circ$ amb l'eix d'abscisses, i per tant tindrà un pendent de $\tan(105) \sim -3.73$. Ara només ens quedarà imposar que passi per P :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= -0.26 \cdot 2 + n \implies n_1 \simeq 0.04 \\ -\frac{1}{2} &= -3.73 \cdot 2 + n \implies n_2 \simeq 6.96 \end{aligned}$$

Per tant, les rectes seran

$$\begin{aligned} y &= -0.26x + 0.04 \\ y &= -3.73x + 6.96 \end{aligned}$$

Exercici 97: Pg. 137 n°33.

Trobar els angles del triangle que té per vèrtexs els punts $A = (2, 4)$, $B = (-3, -1)$ i $C = (-1, 6)$

Solució.

Només cal trobar els angles que formen els vectors que formen els costats. Per calcular l'angle $\hat{A}$ primer trobem els vectors $\overrightarrow{AB} = (-5, -5)$ i $\overrightarrow{AC} = (-3, 2)$. Fixem-nos que els agafem tots dos sortint d' A per tal de mesurar l'angle correcte. En cas contrari estaríem mesurant el suplementari! Fent servir el producte escalar obtenim:

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{15 - 10}{\sqrt{50}\sqrt{13}} \implies \hat{A} = 78.69^\circ$$

Per trobar $\hat{B}$ fem servir els vectors $\overrightarrow{BA} = (5, 5)$ i $\overrightarrow{BC} = (2, 7)$, i obtenim

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{10 + 35}{\sqrt{50}\sqrt{53}} \implies \hat{B} = 29.05^\circ$$

Finalment, l'angle $\hat{C}$ l'obtenim completant fins a 180° :

$$\hat{C} = 180 - 78.69 - 29.05 = 72.26^\circ$$

Exercici 98: Pg. 143 n° 8.

Donada l'equació de la recta $r : 3x - 2y + 7 = 0$ i el punt $P = (2, 0)$, determineu

- a) L'equació de la recta que passa pel punt i és perpendicular a r
- b) La intersecció entre les dues rectes
- c) El punt simètric de P respecte r

Solució.

Raonant com a l'exercici 95, escrita en forma general la recta que ens demanen tindrà la forma $2x + 3y + A = 0$, perquè els vectors $(3, -2)$ i $(2, -3)$ són perpendiculars. Trobem A imposant que el punt P pertanyi a la recta:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + A = 0 \implies A = -4.$$

La recta és per tant $2x + 3y - 4 = 0$.

Per trobar la intersecció de les rectes, com són perpendiculars es tallen i simplement hem de trobar l'únic punt (x, y) que compleix les dues equacions alhora. És a dir, hem de resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 7 = 0 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

Multiplicant la primera per 2 i la segona per 3 i restant les dues equacions obtenim

$$9y - 12 + 4y - 14 = 0; 13y - 26 = 0 \implies y = 2.$$

Substituint a la segona equació obtenim $2x + 6 - 4 = 0$ i per tant $x = -1$.

Si anomenem Q a la intersecció que acabem de trobar, $Q = (-1, 2)$, el punt P respecte r el trobem simplement fent

$$P + 2\overrightarrow{PQ} = P + 2(Q - P) = 2Q - P = (-2, 4) - (2, 0) = (-4, 4).$$

Exercici 99: Pg. 143 n° 10.

Trobeu els valors de k que fan que les rectes $kx + (k-1)y - 2 = 0$ i $3kx - (3k+1)y + 5 = 0$ siguin paral·leles i perpendiculars.

Solució.

Per tal que sigui paral·leles els seus vectors directors han de ser múltiples (linealment dependents), o, equivalentment, els vectors normals a les rectes també han de ser

múltiples. Com les tenim en forma general, agafem directament aquests darrers. Per tal que siguin múltiples imposem

$$(k, k-1) = \lambda(3k, -(3k+1)).$$

Igalant component a component obtenim un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} k = \lambda 3k \\ k-1 = -\lambda(3k+1). \end{cases}$$

Si aïllem λ a cada equació i fem igualació obtenim

$$\frac{k}{3k} = -\frac{k-1}{3k+1}$$

Si $k \neq 0$ podem simplificar k a la part esquerra. Alerta, caldrà comprovar a part si $k = 0$ és solució! Simplificant k a la part esquerra obtenim

$$\frac{1}{3} = -\frac{k-1}{3k+1}; 3k+1 = 3(1-k),$$

d'on $k = \frac{1}{3}$. Comprovem ara si $k = 0$ també és solució. Doncs sí, substituint $k = 0$ al sistema original tenim que es compleixen les equacions:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = -1. \end{cases}$$

Per tant, per $k = 0$ i $k = 1/3$ les dues rectes són paral·leles.

Ja que són paral·leles, podríem també trobar la distància entre elles. Per $k = 0$ les rectes queden

$$-y - 2 = 0 \quad -y + 5 = 0.$$

Fixem-nos que les dues rectes són horitzontals! Una és la recta $y = 2$ i l'altra $y = -5$. Per tant la distància entre elles és $2 - (-5) = 7$. En canvi per $k = 1/3$ no és tant trivial. En aquest cas les rectes queden:

$$\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - 2 = 0 \quad x - 2y + 5 = 0.$$

Prenem dos punts de pas, un de cada recta. Per fer-ho el més fàcil és fer $x = 0$ o $y = 0$ i trobar el valor de l'altra variable. Per exemple agafem $(0, -3)$ i $(-5, 0)$. Ara ens cal un vector normal unitari. És a dir, un vector normal de mòdul 1. Per

exemple n'agafem un de la segona recta: $n = \frac{(1, -2)}{\sqrt{3}}$. Així la distància entre les rectes quedarà:

$$d(r, r') = [(0, -3) - (-5, 0)] \cdot \frac{(1, -2)}{\sqrt{3}} = \frac{5 + 6}{\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3}.$$

Vegem ara per quins valors de k , si n'hi ha, les dues rectes són perpendiculars. Per tal que ho siguin imposen que els dos vectors normals siguin perpendiculars entre si, és a dir, que el seu producte escalar sigui 0:

$$0 = (k, k - 1) \cdot (3k, -(3k + 1)) = 3k^2 - (k - 1)(3k + 1) = 3k^2 - 3k^2 + 2k + 1 = 0,$$

d'on $k = -\frac{1}{2}$. Per tant, per $k = -1/2$ les dues rectes són perpendiculars.

Exercici 100: Exercici proposat a classe, 23-1-2020.

Donades les rectes

$$\begin{aligned} kx + 2y - 6 &= 0 \\ x + (k + 1)y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

- Trobeu els valors de k per tal que les rectes siguin perpendiculars
- Trobeu els valors de k per tal que les rectes siguin paral·leles
- Trobeu els valors de k per tal que les rectes siguin secants

Solució.

Per tal que les rectes siguin perpendiculars, necessitem que els seus vectors directors també ho siguin. De manera equivalent, podem imposar també que els vectors perpendiculars a les rectes siguin perpendiculars entre ells. Com les rectes estan en forma general, aquesta darrera condició és fàcil d'imposar:

$$(k, 2) \cdot (1, k + 1) = 0,$$

d'on

$$k + 2(k + 1) = 3k + 2 = 0 \implies k = -\frac{2}{3}.$$

Per tant, si $k = -\frac{2}{3}$ aleshores les rectes seran perpendiculars.

Per tal que siguin paral·leles necessitem que els vectors directores o els vectors perpendiculars siguin proporcionals, o bé que tinguin el mateix "pendent":

$$\frac{2}{k} = \frac{k + 1}{1} \implies 2 = k^2 + k,$$

d'on $k = -2$ o $k = 1$. Ara bé, aquest condició no és suficient, perquè podria ser que les rectes fossin la mateixa enlloc de paral·leles. Per tant, hem d'estudiar-les amb més detall per aquests dos valors.

Si $k = -2$, les rectes queden

$$\begin{aligned}-2x + 2y - 6 &= 0 \\ x - y + 3 &= 0.\end{aligned}$$

Fixem-nos que, de fet, són la mateixa recta, perquè la primera és la segona multiplicada per -2 . No obstant, podem comprovar-ho agafant qualsevol punt d'una de les rectes i comprovar si pertany a l'altra o no. Agafem el punt $(0, 3)$ de la segona i mirem si és de la primera: $-2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Com aquest punt compleix l'equació de la primera recta, pertany a les dues i, per tant, les rectes són la mateixa i no pas paral·leles.

Mirem ara què passa quan $k = 1$. En aquest cas les rectes queden:

$$\begin{aligned}x + 2y - 6 &= 0 \\ x + 2y + 3 &= 0.\end{aligned}$$

Clarament les rectes no són iguals, perquè la part de les x i les y 's és la mateixa, però el terme independent no. Per tant, una equació no és múltiple de l'altra. També podem agafar el punt $(6, 0)$ de la primera i veure que no pertany a la segona: $6 + 2 \cdot 0 + 3 \neq 0$. Així, si $k = 1$, efectivament les rectes seran paral·leles.

Finalment, estudiem quan les rectes seran secants, és a dir, quan es tallaran. Recordem que dues rectes (al pla) es tallen sempre i quan no siguin paral·leles ni la mateixa. Seran paral·leles només si $k = 1$, i seran la mateixa si $k = -2$. Per tant, es tallaran sempre que $k \neq 1$ i $k \neq -2$. És a dir, es tallaran per

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}.$$

Exercici 101: Pg. 143 n° 12.

Trobar el baricentre, circumcentre i ortocentre del triangle definit pels punts $(0, 0)$, $(4, 2)$ i $(2, 6)$.

- Comprovar que estan alineats
- Veure que la distància de l'ortocentre al baricentre és el doble que la distància entre el baricentre i el circumcentre.

c) La distància del circumcentre a cada vèrtex és la mateixa.

Solució.

Bàsicament la dificultat és trobar els tres punts, un cop els tens només cal calcular distàncies, que és avorrit però és fàcil.

Recordem les definicions. El baricentre és el punt on es tallen les mitjanes d'un triangle (uneixen cada vèrtex amb el punt mitjà de cada costat), l'ortocentre és el punt on es tallen les altures, i el circumcentre és el punt on es tallen les mediatris (que són perpendiculars a cada costat passant pel punt mig).

Troblem primer les equacions de les mitjanes, de fet amb dues ja fem. Com un dels vèrtexs és a l'origen, això facilita les coses si escollim els dels costats que el contenen. Així, els punts mitjos de cada costat són directament $(2, 1)$ i $(1, 3)$. Volem les dues rectes que passen per $(2, 1)$ i $(2, 6)$ i per $(1, 3)$ i $(4, 2)$. Dos vectors directors seran $(2, 6) - (2, 1) = (0, 5)$ i $(4, 2) - (1, 3) = (3, -1)$. Agafant els vectors perpendiculars a aquests i imposant que passin per algun dels dos punts trobem que les rectes són

$$5x - 10 = 0, \quad x + 3y - 10 = 0.$$

De fet la primera recta es pot simplificar dividint-t'ho tot entre 5, i queda $x - 2 = 0$. Per trobar la intersecció entre elles, només cal resoldre el sistema

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 3y - 10 = 0, \end{cases}$$

que és $x = 2$ i $y = 8/3$. Per tant el baricentre és $(2, 8/2)$.

Troblem ara les mediatris. Altre cop, amb dues ja fem i escollim les mediatris dels dos costats anteriors perquè contenen l'origen que facilita les coses. Hauran de passar pels punts mitjos $(2, 1)$ i $(1, 3)$ i tenir com a vectors directors els perpendiculars als costats. Ara bé, en escriure-ho en forma general, els vectors normals a les rectes seran els mateixos vectors que uneixen els vèrtexs: $(4, 2)$ i $(2, 6)$. Per tant, les equacions tindran la forma

$$\begin{aligned} 4x + 2y + A &= 0 \\ 2x + 6y + B &= 0 \end{aligned}$$

Ara només cal trobar A i B imposant que passin pels punts mitjos anteriors, obtenint

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + A &= 0 \implies A = -10 \\ 2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + B &= 0 \implies B = -20 \end{aligned}$$

Així les mediatrises seran

$$\begin{aligned}4x + 2y - 10 &= 0 \\2x + 6y - 20 &= 0,\end{aligned}$$

que simplificant (dividint tot entre 2) queden

$$\begin{aligned}2x + y - 5 &= 0 \\x + 3y - 10 &= 0.\end{aligned}$$

Per trobar el circumcentre només caldrà resoldre el sistema anterior. Per reducció (la segona multiplicada per 2 menys la primera) tenim $6y - 20 - y + 5 = 0 \rightarrow y = 3$. Substituint trobem $x = 1$. Així el circumcentre és el punt $(1, 3)$.

Ara només queda l'ortocentre. Cal trobar almenys dues altures. Com han de ser perpendiculars als costats seran paral·lels a les medianes:

$$\begin{aligned}4x + 2y + A &= 0 \\2x + 6y + B &= 0.\end{aligned}$$

Per trobar A i B cal que imposem que passin pels vèrtexs oposats. Així la primera haurà de passar pel punt $(2, 6)$, i la segona pel $(4, 2)$. Si ho imposem obtenim

$$\begin{aligned}4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + A &= 0 \rightarrow A = -20 \\2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + B &= 0 \rightarrow B = -20\end{aligned}$$

Si les simplifiquem (dividint entre 2) les dues altures seran

$$\begin{aligned}2x + y - 10 &= 0 \\x + 3y - 10 &= 0.\end{aligned}$$

Resolent el sistema obtenim l'ortocentre. Altre cop per reducció (la segona per 2 menys la primera) obtenim

$$6y - 20 - y + 10 = 0 \rightarrow y = 2.$$

Substituint trobem $x = 4$, i l'ortocentre serà el punt $(4, 2)$. Com de fet és un dels vèrtexs, fixe'u-vos que això vol dir que el triangle és rectangle.

Ara només queda comprovar que els tres punts que hem trobat, $(2, 8/3)$, $(1, 3)$ i $(4, 2)$ estan alineats, la resta de preguntes són fàcils. Per veure-ho hem de veure si els vectors $(1, 3) - (2, 8/3) = (-1, 1/3)$ i $(4, 2) - (1, 3) = (3, -1)$ són múltiples un de l'altre. Efectivament, si multipliquem el primer per -3 obtenim el segon.

Exercici 102: Pg. 143 n°3.

Trobar n per tal que les rectes

$$r : x + 2y - 1 = 0$$

$$r' : y = -\frac{1}{2}x - n$$

distin $\sqrt{5}$ unitats.

Solució.

D'entrada hi haurà dues solucions, ja que la recta pot estar a “una banda o a l'altra”, la simètrica.

Per trobar la distància entre dues rectes només cal trobar un punt de cada recta i un vector normal unitari d'una d'elles. De la primera agafem $P = (1, 0)$ i de la segona $Q = (0, -n)$. Com a vector normal unitari agafem el $(1, 2)/\sqrt{5}$, que és perpendicular a la primera. Així tenim:

$$d(r, r') = d(P, r') = PQ \cdot (1, 2)/\sqrt{5} = (-1, -n) \cdot (1, 2)/\sqrt{5} = \frac{-1 - 2n}{\sqrt{5}}.$$

Imposant que aquesta distància sigui $\sqrt{5}$ trobem

$$\sqrt{5} = \frac{-1 - 2n}{\sqrt{5}} \rightarrow n = \frac{5 + 1}{-2} = -3.$$

Ara bé, també podem agafar el vector $-(1, 2)/\sqrt{5}$, que apunta cap a l'altra banda! Així obtindrem l'altre valor, que és $n = 2$.

Exercici 103: Pg. 144 n°17.

Determineu l'àrea del triangle determinat per les rectes

$$r : 4x + y - 5 = 0$$

$$s : x + 3y - 4 = 0$$

$$t : 3x - 2y - 12 = 0.$$

Solució.

Cal trobar una altura i una base. Per fer-ho necessitem tots vèrtexs, que obtindrem trobant la intersecció de les rectes de dos en dos resolent els següents tres sistemes:

$$P \rightarrow \begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0, \end{cases}$$

$$Q \longrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

i

$$R \longrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ 4x + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Les solucions dels sistemes són $P = (1, 1)$, $Q = (4, 0)$ i $R = (2, -3)$, respectivament. Ara busquem l'equació de la recta que conté l'altura perpendicular a PQ i que passa per R . La recta que conté el costat PQ és la recta s . Per tant, la recta que conté aquesta altura ha de ser perpendicular a s i tindrà la forma

$$3x - y + A = 0.$$

Imposant que passi per R trobem $A = -9$, i la recta és

$$h : 3x - y - 9 = 0.$$

Ara només cal trobar el valor de l'altura. Per fer-ho, si T és la intersecció entre les rectes s i h , l'altura serà $\|\overrightarrow{RT}\|$. Obtenim T resolent el sistema

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0, \end{cases}$$

obtenint $10x - 27 - 4 = 0$, $10x - 31 = 0 \longrightarrow x = 31/10 \longrightarrow y = 3/10$,

$$T = \left(\frac{31}{10}, \frac{3}{10} \right).$$

Així, l'altura serà

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{RT}\| &= \left\| \left(\frac{11}{10}, \frac{33}{10} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{11}{10} \right)^2 + \left(\frac{33}{10} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{11^2 + 33^2}}{10} = \frac{\sqrt{11^2 + (3 \cdot 11)^2}}{10} = \frac{11\sqrt{1^2 + 3^2}}{10} = \frac{11\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$

Per tant l'àrea serà

$$A = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \|\overrightarrow{RT}\|}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 11\sqrt{10}}{20} = \frac{11}{2} u^2$$

Exercici 104: Pg. 144 nº 25.

Els vèrtexs corresponents al costat desigual d'un triangle isòsceles se situen als punts $A = (-1, -1)$ i $B = (4, 0)$. El tercer vèrtex, C , és un punt de la recta $r : x - 2y + 8 = 0$. Trobeu C , el perímetre i l'àrea del triangle.

Solució.

Per tal de trobar C tenim dues opcions (almenys).

Opció 1:

Imposem que el triangle sigui isòsceles i que $C \in r$. Per tal que es compleixi la segona condició, si diem $C = (x, y)$, aleshores C serà de la forma

$$C = \left(x, \frac{x+8}{2}\right) \quad \text{o bé} \quad C = (2y-8, y)$$

. Escollim la segona forma, ja que ens estalviem fraccions. Imposem ara que

$$\begin{aligned} d(A, C) = d(B, C) &\iff \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \iff \\ &\iff \sqrt{(2y+8+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(2y-8-4)^2 + (y-0)^2} \end{aligned}$$

Elevant al quadrat les dues bandes marxen les arrels i queda una equació de primer grau per y (tots els termes de grau 2 marxen), i queda

$$y = \frac{47}{11} \quad x = \frac{6}{11}$$

amb el que $C = \left(\frac{6}{11}, \frac{47}{11}\right)$.

Opció 2:

Com el triangle és isòsceles, la mediatriu del costat AB passa per C . Per tant, només cal trobar la recta, s , perpendicular al costat AB passant pel punt mig (recta que conté la mediatriu) i trobar la intersecció amb r .

El punt mig serà $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La recta s tindrà coma vector director un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (5, 1)$, per tant serà de la forma

$$s : 5x + y + D = 0,$$

perquè el vector $\overrightarrow{AB}$ és perpendicular a la mediatriu. Ara trobem D imposant que passi per M :

$$5\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + D = 0 \implies D = -7.$$

Ara el punt C el trobarem resolent el sistema

$$\left. \begin{array}{l} r : x - 2y + 8 = 0 \\ s : 5x + y - 7 = 0, \end{array} \right\}$$

que té per solució $x = \frac{6}{11}$ i $y = \frac{47}{11}$, que és el punt d'abans.

Ara per trobar el perímetre i l'àrea només caldrà fer:

$$\begin{aligned} \text{Perímetre} &= \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| \\ &= \sqrt{5^2 + 1^2} + \sqrt{\left(\frac{6}{11} - 4\right)^2 + \left(\frac{47}{11}\right)^2} + \sqrt{\left(-1 - \frac{6}{11}\right)^2 + \left(-1 - \frac{47}{11}\right)^2} = \\ &= \sqrt{26} + \frac{2\sqrt{3653}}{11}u \\ \text{Àrea} &= \frac{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{MC}\|}{2} = \frac{273}{22}u^2 \end{aligned}$$

Recordeu que, malgrat en matemàtiques les unitats no acostumen tenir-se en compte, hi ha correctors a secundària que penalitzen no incloure-les!

Fixem-nos que la **Opció 1** no ens dóna el punt M i, per tant, haurem de trobar l'altura del triangle d'alguna manera. La més fàcil és potser trobant la distància del punt C a la recta que passa per A i B . Aquesta recta serà

$$t : x - 5y + D' = 0,$$

i imposant que passi per B tindrem $D' = -4$. Per tant, l'altura la tindrem fent

$$h = d(C, M) = d(C, t) = \left| \frac{\frac{6}{11} - 5\frac{47}{11} - 4}{\sqrt{1^2 + 5^2}} \right| = \frac{21\sqrt{26}}{22}$$

Per tant l'àrea ens donaria

$$\text{Àrea} = \frac{21\sqrt{26} \overbrace{\sqrt{26}}^{\|\overrightarrow{AB}\|}}{22 \cdot 2} = \frac{273}{22}u^2$$

Exercici 105: Examen final curs 18-19.

Determineu els punts de tall de la recta que passa pel punt $A = (3, 2)$ i forma amb els eixos de coordenades un triangle d'àrea $\frac{25}{2}$.

Solució.**Opció 1: per geometria**

Diguem $B = (b, 0)$ i $C = (0, c)$ als punts de tall amb els eixos. El triangle que ens queda és rectangle, i la seva àrea serà

$$\frac{25}{2} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Però b i c no poden ser qualsevol, ja que pertanyen a la mateixa recta que passa per A , això ens donarà una relació entre b i c . Trobem aquesta recta imposant que passi per A i C (A i B també aniria bé). Un vector director d'aquesta recta és el $(3-b, 2)$, per tant tindrem, en forma contínua:

$$\frac{x-3}{3-b} = \frac{y-2}{2}.$$

Ara trobem el punt de tall d'aquesta recta amb l'eix vertical i imposem que sigui el punt $(0, c)$. És a dir, quan $x = 0$ y ha de ser c :

$$c = 2 \frac{-3}{3-b} + 2 = \frac{6}{b-3} + 2 = \frac{6}{b-3} + \frac{2(b-3)}{b-3} = \frac{6+2(b-3)}{b-3} = \frac{2b}{b-3}$$

Per tant, ens queda:

$$c = \frac{2b}{b-3}$$

Substituint a l'àrea tindrem

$$\frac{25}{2} = \frac{b \cdot 2b}{2(b-3)} \implies 2b^2 - 25b + 75 = 0$$

$$b = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{4},$$

d'on tenim dues solucions:

$$\begin{aligned} b &= \frac{15}{2} \\ b &= 5 \end{aligned}$$

De la primera ens surt

$$c = \frac{15}{\frac{15}{2} - 3} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3},$$

i de la segona

$$c = \frac{10}{2} = 5.$$

Això donarà dues parelles de punts: $(5, 0)$ i $(0, 5)$, o bé $(\frac{15}{2}, 0)$ i $(0, \frac{10}{3})$.

Opció 2: per semblances

Si ens fem un dibuix, tenim dos triangles rectangles semblants (en posició de Tales de fet). Tots dos comparteixen vèrtex $(b, 0)$, el petit té un vèrtex $a(3, 2)$ i el gran $a(0, c)$. Per tant, per semblances tindrem:

$$\frac{2}{b-3} = \frac{c}{b} \implies c = \frac{2b}{b-3},$$

que és la mateixa relació que hem obtingut abans i el problema s'acaba de la mateixa manera.

Exercici 106.

Trobeu

- l'equació general de la recta r que passa pel punt $P = (0, -4)$ i és paral·lela a la recta $s : 3x - 2y + 6 = 0$.
- la distància entre les dues rectes anteriors
- Escriu l'equació de la recta perpendicular a les dues anteriors i que passa pel punt P .
- Calculeu el valor d' a per tal que les rectes $x + 2y - 1 = 0$ i $ax - y + 3 = 0$ formin un angle de 60° .

Solució.

- Com ha de ser paral·lela compartiran vector director (i vector perpendicular) i la recta serà de la forma $3x - 2y + c = 0$. Imposant que passi per P trobem $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) + c = 0 \implies c = -8$.
- Per trobar la distància entre elles podem calcular la distància d'un punt d'elles a l'altra. Podem fer servir P :

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$$

- c) La recta perpendicular serà de la forma $2x + 3y + d = 0$, ja que $(2, 3)$ és perpendicular a $(3, -2)$. Imposant que passi per P trobem $d = 12$.
- d) Fent servir el producte escalar imposem que l'angle entre els vectors perpendiculars $(1, 2)$ i $(a, -1)$ sigui 60° :

$$(1, 2) \cdot (a, -1) = a - 2 = \|(1, 2)\| \cdot \|(a, -1)\| \cdot \cos(60^\circ)$$

Ara bé, fixem-nos que podríem tenir dues solucions, ja que els vectors $(a, -1)$ i $(1, 2)$ podrien fer una angle de 120° enlloc de 60° . Com $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ i $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$, les solucions del problema seran els valors d' a que compleixin

$$a - 2 = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{a^2 + 1} \cdot \left(\pm \frac{1}{2}\right)$$

En elevar al quadrat el signe $-$ desapareix, i ens queda una única equació que, operant, queda:

$$3a^2 - 16a + 15 = 0$$

d'on

$$a = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Una solució correspon a l'angle de 60° i l'altra a l'angle de 120° .

Exercici 107.

Els punts $A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ i $C = (5, -2)$ determinen un triangle. Determina'n l'àrea.

Exercici 108.

Donats els punts $A = (2, 1)$, $B = (0, 1)$ i $C = (3, -2)$ trobeu:

- L'equació vectorial de les rectes que contenen els costats del triangle ABC .
- L'equació general de les rectes que contenen les mitjanes.
- Trobeu el baricentre del triangle com a intersecció de les mitjanes. Comproveu que es troba a $1/3$ a mig camí entre del punt mig d'un segmenet cap al vèrtex oposat.

Solució.

a) Les rectes tindran com a vectors directors els vectors

$$\vec{AB} = B - A = (-2, 0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (1, -3)$$

$$\vec{BC} = C - B = (3, -3)$$

Els punts de pas podrien ser A, A i C:

$$\text{Segment } AB : (x, y) = (2, 1) + (-2, 0)$$

$$\text{Segment } AC : (x, y) = (2, 1) + \lambda_2 (1, -3)$$

$$\text{Segment } BC : (x, y) = (3, -2) + \lambda_3 (3, -3)$$

b) Per trobar les rectes que contenen les mitjanes primer trobem els punts mitjos de cada segment:

$$M_{AB} = \frac{A + B}{2} = (1, 1)$$

$$M_{AC} = \frac{A + C}{2} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$M_{BC} = \frac{B + C}{2} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Els vectors directors seran:

$$\vec{M_{AB}C} = C - M_{AB} = (3, -2) - (1, 1) = (2, -3)$$

$$\vec{M_{AC}B} = B - M_{AC} = (0, 1) - \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{M_{BC}A} = A - M_{BC} = (2, 1) - \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

i les rectes seran:

$$(x, y) = M_{AB} + \lambda(2, -3)$$

$$(x, y) = M_{AC} + \lambda \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$(x, y) = M_{BC} + \lambda \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Exercici 109.

Donada la recta $r : 2x - 3y + 4 = 0$:

- a) Doneu-ne un vector director
- b) L'equació vectorial de la recta paral·lela a r que passa pel punt $(1, 1)$.
- c) L'equació vectorial de la recta perpendicular a r que passa pel punt $(1, 1)$.

Exercici 110: Pg. 132 n° 20.

Classificar les rectes

Solució.

- a) Un vector director de la segona recta és $v = (1, 2)$, ja que està en contínua. El pendent d'aquesta recta serà doncs $\frac{2}{1} = 2 \neq \frac{1}{2}$. Com les rectes tenen pendents diferents seran secants.
- b) La 2a equació és la primera multiplicada per -2 . Per tant, les rectes són la mateixa perquè es tracta d'exactament la mateixa equació
- c) Els gradients són proporcionals (i per tant també els vectors directors). Per tant, les rectes tindran la mateixa direcció. No obstant, el terme independent, C , no manté la mateixa proporció:

$$\frac{3}{1} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{7}{-3}$$

Per tant, les rectes no tenen cap punt en comú i seran paral·leles. Fixem-nos que això voldrà dir que el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 3y + 7 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{array} \right\}$$

no té solució (és un sistema incompatible).

- d) Un vector director de la primera és el $(2, -3)$, i un de la segona és el $(2, -3)$ (girant 90° el gradient). Per tant, les dues rectes tenen la mateixa direcció. Per veure si es tracta de la mateixa recta o són paral·leles comprovem si un punt de pas de la primera, el $(1, 2)$, ho és també de la segona:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 6 \stackrel{?}{=} 0 \quad \mathbf{X}$$

Com no es compleix les rectes seran paral·leles.

Exercici 111: Pg. 132 n° 23.

Discutir la posició relativa de les rectes

$$qx - 2y + 4 = 0 \quad x + (q - 3)y - 7 = 0$$

Solució.

Mirem en quin cas les rectes tindran la mateixa direcció. En cas contrari segur que seran secants i es tallaran en un punt.

Començant trobant vectors directors de cadascuna d'elles: $(2, q)$ i $(q - 3, -1)$ girant els gradients 90° . Mirem ara per quin valor de q aquests vectors tenen la mateixa direcció, cosa que es complirà quan:

$$\frac{q}{2} = \frac{-1}{q-3} \implies q(q-3) = -2 \implies q^2 - 3q + 2 = 0 \implies q = 1 \text{ o } q = 2$$

Per tant, ja sabem que si $q \neq 1$ i $q \neq 2$ les dues rectes seran secants. Mirem què passa en cadascun d'aquests casos.

- *Si $q = 1$ les dues rectes quedaran:*

$$x - 2y + 4 = 0 \quad x - 2y - 7 = 0$$

Clarament les rectes són paral·lels ja que les equacions s'estan contradient i el sistema no pot tenir solució. Fixem-nos que també podem dir que els gradients són proporcionals però en canvi el terme independent no respecte aquesta proporció:

$$\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{4}{-7}$$

Per tant, si $q = 1$ les rectes seran paral·leles.

- *Si $q = 2$, les rectes seran*

$$2x - 2y + 4 = 0 \quad x - y - 7 = 0$$

El gradients són proporcionals, però altre cop el terme independent no respecte aquesta proporció:

$$\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} \neq \frac{4}{-7}$$

Fixem-nos que això vol dir que les equacions s'estan contradient.

Per tant, si $q = 2$, les rectes seran paral·leles.

Exercici 112: Pg. 135 n° 25.

Determinar l'equació de la recta perpendicular a la recta $y = \frac{3}{4}x - 6$ i que passa pel punt d'intersecció de les rectes

$$x + y + 9 = 0 \quad x - 2y + 3 = 0$$

Solució.

Comencem trobant el punt de tall de les dues rectes resolent el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 9 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{array} \right\}$$

La solució d'aquest sistema és el punt $(-7, -2)$. Busquem ara quina ha de ser la direcció de la recta. Com tenim el pendent de la primera recta, podem trobar-ne un vector director, ja que només haurà de complir

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4}$$

Per exemple, el vector $\vec{v} = (4, 3)$ servirà. Com la recta que ens demanen ha de tenir direcció perpendicular a $\vec{v}$, un vector director serà el vector $(3, -4)$. Com no ens demanen l'equació en cap forma concreta, podem donar-la en vectorial:

$$(x, y) = (-7, -2) + \lambda(3, -4)$$

Exercici 113.

Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs $A = (1, 1)$, $B = (3, -2)$ i $C = (0, 1)$.

Solució.

L'àrea d'un triangle la trobem multiplicant una base per l'altura entre 2 (és la meitat de la del rectangle que conté el triangle i tenen un costat en comú). La base és un dels costats, per exemple el costat AB , que serà:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \|(2, -3)\| = \sqrt{13}$$

Pel que fa a l'altura corresponent al costat AB , serà la distància entre el punt C i la recta que conté el costat AB ; tenim una fórmula que ens la permet calcular fàcilment. Per trobar aquesta recta sabem que un vector director serà $\overrightarrow{AB} = (2, -3)$, i un punt de pas el punt A (el B també serviria). Per tant, tenint en compte que, en la forma general, els coeficients de x i y són el gradient (perpendicular al vector director), tindrem

$$r : 3x + 2y + c = 0$$

Per trobar c imposem que la recta passi per A :

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + c = 0 \implies c = -5$$

Per tant, la recta serà:

$$r : 3x + 2y - 5 = 0$$

Ara, l'altura serà:

$$h = d(C, r) = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Per tant, l'àrea serà:

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot d(C, r)}{2} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}}{2} = \frac{3}{2} u^2$$

L'àrea doncs serà $\frac{3}{2}$. Sovint, per enfatitzar que es tracta d'una àrea, se sol incloure la unitat u^2 per indicar-ho.

Exercici 114: Pg. 135 n° 30.

Trobeu els valors de q que fan que les rectes

$$r : qx - y + 2 = 0 \quad s : (q + 2)x + (2q + 1)y = 0$$

siguin perpendiculars.

Solució.

Podeu veure la solució en l'applet de Geogebra:

<https://www.geogebra.org/m/gexddjqj>

Com les rectes estan en forma general, fàcilment podem trobar els vectors gradient:

$$\text{Recta } r \longrightarrow \vec{u} = (q, -1)$$

$$\text{Recta } s \longrightarrow \vec{t} = (q + 2, 2q + 1)$$

Girant-los 90° tenim vectors directors:

$$\text{Recta } r \longrightarrow \vec{v} = (1, q)$$

$$\text{Recta } s \longrightarrow \vec{w} = (2q + 1, -q - 2)$$

Per imposar que les rectes siguin perpendiculars tenim diferents opcions:

Opció 1 Imposar que els vectors directors siguin perpendiculars; és a dir, que el seu producte escalar sigui nul:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1, q) \cdot (2q + 1, -q - 2) = 2q + 1 - q^2 - 2q = 0 \implies \boxed{q = 1} \text{ o } \boxed{q = -1}$$

Opció 2 Imposar que els vectors gradients siguin perpendiculars:

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = (q, -1) \cdot (q + 2, 2q + 1) = q^2 + 2q - 2q - 1 = 0 \implies \boxed{q = 1} \text{ o } \boxed{q = -1}$$

Opció 3 Imposar que el gradient d'una recta i un vector director de l'altra siguin múltiples (tinguin la mateixa direcció):

$$\vec{u} = \lambda \vec{w} \implies \left. \begin{array}{l} q = \lambda(2q + 1) \\ -1 = \lambda(-q - 2) \end{array} \right\}$$

Resolent els sistema trobem dues solucions:

$$\begin{array}{l} q = 1 \text{ i } \lambda = \frac{1}{3} \\ q = -1 \text{ i } \lambda = 1 \end{array}$$

Exercici 115: Posició del baricentre.

Suposeu que els punts A , B i C determinen un triangle. Demostreu que el seu baricentre (punt on es tallen les mitjanes) es troba a $\frac{1}{3}$ des del punt mig d'un costat cap al vèrtex oposat.

Solució.

Per trobar el punt on es tallen les mitjanes hauríem de trobar primer les equacions de les rectes. El més fàcil és escriure-les en vectorial per evitar treballar amb les coordenades dels punts (6 variables!), tot i que després sigui una mica més complicat trobar-ne la intersecció.

Comendem trobant els puns mitjos dels segments:

$$\begin{array}{l} \text{Punt mig } AB : \longrightarrow M_1 = \frac{A + B}{2} \\ \text{Punt mig } AC : \longrightarrow M_2 = \frac{A + C}{2} \end{array}$$

Ara, les rectes en forma vectorial quedaran:

$$\begin{aligned} \text{Mitjana } AB \longrightarrow (x, y) &= M_1 + \lambda_1 \cdot \overrightarrow{M_1 C} = \frac{A+B}{2} + \lambda_1 \cdot \left(C - \frac{A+B}{2} \right) \\ &= \lambda_1 \cdot C + (1 - \lambda_1) \frac{A+B}{2} \\ \text{Mitjana } AC \longrightarrow (x, y) &= M_2 + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{M_2 B} = \frac{A+C}{2} + \lambda_2 \cdot \left(B - \frac{A+C}{2} \right) \end{aligned}$$

Ara trobem el punt on es tallen igualant les equacions i resolent per λ_1 i λ_2 :

$$\frac{A+B}{2} + \lambda_1 \left(\frac{2C - A - B}{2} \right) = \frac{A+C}{2} + \lambda_2 \left(\frac{2B - A - C}{2} \right)$$

Desfent els parèntesis i operant arribem a l'equació:

$$(1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) \cdot B - (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot A + (2\lambda_1 + \lambda_2 - 1) \cdot C = 0$$

Una opció és que els tres coeficients siguin exactament 0, d'on traiem les equacions:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la segona equació trobem $\lambda_1 = \lambda_2$, i substituïnt a les altres obtenim:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_1 - 2\lambda_1 &= 0 \implies \lambda_1 = \frac{1}{3} \\ 2\lambda_1 + \lambda_1 - 1 &= 0 \implies \lambda_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Com totes dues equacions tenen la mateixa solució, $\lambda_1 = \frac{1}{3} = \lambda_2$, aquesta serà una solució del sistema. A més, com aquest només en pot tenir una (les rectes es tallen en únic punt, si els punts no estan alineats), aquesta ha de ser la solució del sistema. Per tant, el punt de tall serà:

$$M_1 + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{M_1 C} = M_2 + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{M_2 B}$$

i per tant el baricentre es troba a un terç de la distància entre el punt mig d'un segment i el vèrtex oposat.

Exercici 116: Pg. 144 n°30.

El costat desigual d'un triangle isòscel·les es troba sobre la recta $y = x$, i el vèrtex oposat és el punt $C = (0, 4)$. Trobeu els altres vèrtexs.

Solució.

Podeu seguir les solucions proposades per aquest exercici a l'applet de geogebra:

<https://www.geogebra.org/m/npkfzcdB>

Opció 1 Solució proposada per Roger Castells.

- 1.1 Trobem primer el punt M que divideix el costat AB en dos. Com el segment AB es troba sobre la recta $r : y = x$, aquest punt serà la intersecció entre aquesta recta i la recta, s , perpendicular que passa per C . El vector gradient de s és un director de r , un vector director de r és el $(1, 1)$, ja que la recta té pendent 1. Per tant, la recta r té la pinta:

$$x + y + c = 0$$

Troblem c imposant que passi per $C = (0, 4)$:

$$0 + 4 + c = 0 \implies C = -4$$

Ara, per trobar M només caldrà resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x + y - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

d'on $M = (2, 2)$ (es pot resoldre fàcilment per substitució).

- 1.2 Ara, recordem que el punt B es troba a distància 2 de M sobre la recta r . Això ens defineix un triangle rectangle de hipotenusa MB , que medeix 2, i que està sobre la recta $y = x$. Com la recta té pendent 1, els angles aguts són de 45° i, per tant, els catets faran $\sqrt{2}$ cadascun. Per tant, per trobar B , només caldrà sumar $\sqrt{2}$ a cadascuna de les coordenades de M :

$$B = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

Procedint similarment (restant), trobem que

$$A = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

Opció 2 Solució proposada de Roger Olalla, Martina Muñoz, Marta Puig i Beth Muixí.

2.1 Trobem M de la mateixa manera que abans.

2.2 Ens preguntem quins punts de la recta $y = x$ estan a distància 2 de M . Amb això hauríem d'obtenir una equació la solució de la qual són els A i B que estem buscant. Un punt qualsevol de la recta $y = x$ és de la forma $Q = (x, x)$. Ara, només caldrà imposar que estigui a distància 2 de M :

$$\|\overrightarrow{MO}\| = 2 \iff \|O - M\| = 2 \iff \sqrt{(x-2)^2 + (x-2)^2} = 2$$

Fixem-nos que el que estem buscant de fet és la intersecció entre la circumferència de centre M i radi 2 amb la recta $y = x$.

Elevant al quadrat les dues bandes obtenim l'equació

$$2(x-2)^2 = 4$$

les solucions de la qual són $2 \pm \sqrt{2}$. Per tant, els punts que estem buscant seran:

$$B = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

$$A = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

Opció 3 Solució propsoada per Àlex Palomas.

La idea consisteix en trobar el punt B imposant que la projecció del vector BC sobre la recta r valgui 2. Recordem que la projecció d'un vector sobre una direcció s'obté fent el producte escalar entre el vector i el vector que dona la direcció normalitzat (amb mòdul 1). Per tant, els punts els trobarem fent:

3.1 Trobem un vector, $\vec{v}$, director de la recta que tingui mòdul 1 i apunti de B cap a M . Aleshores tindrem que

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_1 \cdot \cos \theta = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \cos \theta = 2$$

El vector $(-1, -1)$ normalitzat servirà. Com aquest té mòdul $\sqrt{2}$, el vector normalitzat serà:

$$\vec{v} = \frac{(-1, -1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ara només cal calcular el producte escalar i igualar a 2.

3.2 Com el punt B es troba sobre la recta $y = x$, aquest serà de la forma $B = (b, b)$. Per tant, l'equació serà:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = 2 \implies (C - B) \cdot \vec{v} = 2 \implies$$

$$(-b, 4 - b) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2$$

$$\frac{b\sqrt{2} - (4 - b)\sqrt{2}}{2} = 2 \iff \frac{(2b - 4)\sqrt{2}}{2} = 2 \iff (b - 2)\sqrt{2} = 2 \iff b = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

Per tant, el punt serà:

$$B = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

3.3 Fent el mateix amb els vectors $\overrightarrow{AC}$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ trobem $A = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

Opció 4 Opció alternativa

4.1 Trobem $M = (2, 2)$ com en opcions anteriors.

4.2 Trobem un vector director de la recta r que tingui mòdul 1, com abans:

$$\vec{v} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

4.3 Ara, podem obtenir A i B simplement allargant el doble aquest vector i posant-lo sortint de M :

$$B = M + 2\vec{v} = (2, 2) + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

$$A = M - 2\vec{v} = \dots = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

Exercici 117.

Determineu el punt d'intersecció entre la recta en forma paramètrica

$$r : \begin{cases} x = -4k - 6 \\ y = 2k + 2 \end{cases}$$

i la recta vertical

$$x = 9$$

Solució.

Substituint $x = 9$ a l'equació de la recta r trobem $k = -\frac{15}{4}$. El valor de y corresponent serà: $y = -\frac{11}{2}$. Per tant el punt serà $(9, -\frac{11}{2})$.

Exercici 118: Intersecció entre rectes.

Determineu l'equació general associada a la recta r expressada en forma vectorial

$$r : (x, y) = (2, -3) + \lambda(-4, 7)$$

Determineu també el seu punt d'intersecció amb l'eix x .

Solució.

Troblem primer un vector perpendicular a la recta, per exemple canviant l'ordre de les coordenades del vector director i el signe d'una d'elles: $(7, 4)$. L'equació general serà de la forma $7x + 4y + C = 0$. Per trobar C imposem que passi pel punt $(2, -3)$:

$$7 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + C = 0 \implies C = -2,$$

i l'equació general és

$$7x + 4y - 2 = 0.$$

Per trobar el tall amb l'eix ho podem fer tant fent servir la forma vectorial com la general. A la vectorial hauríem de trobar primer el valor del paràmetre λ quan $y = 0$ (eix x). És més fàcil amb la general. Fent $y = 0$ trobem $x = \frac{2}{7}$. El punt de tall és doncs $(\frac{2}{7}, 0)$.

Exercici 119: Trobar el circumcentre.

Determineu les coordenades del circumcentre de vèrtexs $A = (8, 9)$, $B = (6, -3)$ i $C = (-4, 6)$.

Solució.

El circumcentre és el punt on es tallen les mediatrïus d'un triangle, que són les rectes perpendiculars a cada costat passant pel punt mig d'aquest. Només caldrà trobar-ne dos i trobar el seu punt de tall. La tercera mediatriu hauria de tallar les altres al mateix punt.

Troblem les mediatrïus dels costats AB i BC , per exemple. Les podem escriure en forma general, que és la forma més senzilla alhora de trobar interseccions, ja que només cal resoldre un sistema.

Un vector perpendicular a la mediatriu AB és el mateix vector

$$\vec{AB} = B - A = (-2, -12)$$

Podem canviar el sentit al vector perquè les coordenades ens quedin positives i dividir entre 2 per així facilitar els càlculs. Així la mediatriu del segment AB serà de la

forma $x + 6y + C = 0$. Per trobar C necessitem un punt de pas, que és el punt mig del segment AB :

$$\frac{A + B}{2} = (7, 3).$$

Substituint trobem $C = -25$.

Fem el mateix per trobar la mediatriu del costat BC . Un vector perpendicular és $(-10, 9)$, i un punt de pas és el $(1, \frac{3}{2})$. Amb això trobem l'equació general de la mediatriu del costat BC :

$$-10x + 9y - \frac{7}{2} = 0 = 0.$$

Per trobar el circumcentre només cal trobar el punt de tall entre les rectes resolent el sistema

$$\begin{cases} x + 6y - 25 = 0 \\ -10x + 8y - \frac{3}{2} = 0, \end{cases}$$

que dóna

$$\left(\frac{191}{68}, \frac{503}{136} \right).$$

Exercici 120: Posició relativa de rectes.

Estudieu la posició relativa de les rectes

$$\begin{cases} 2x = 2y + 5 \\ x + 2 = (k - 3)y \end{cases}$$

en funció del paràmetre k .

Solució.

Bàsicament hi ha dues opcions, o es tallen o no es tallen. En cas que no es tallin, seran la mateixa o bé paral·leles. Això es pot determinar de diverses maneres.

Opció 1:

Des del punt de vista geomètric, només cal mirar l'angle que formen els vectors directores. En cas que no es tallin l'angle serà de 0° o 180° . Si l'angle no és ni 0 ni 180 aleshores es tallaran.

Primer trobem els dos vectors directores. Escrivint-les en forma general tenim

$$\begin{cases} 2x - 2y - 5 = 0 \\ x - (k - 3)y + 2 = 0 \end{cases}$$

Els vectors $(2, -2)$ i $(1, -(k - 3))$ són vectors perpendiculars a les rectes. Per tant, els vectors directores seran $(2, 2)$ i $(k - 3, 1)$. El primer el podem dividir entre 2 per

facilitar els càlculs, i serà el $(1, 1)$. Mirem l'angle entre aquests vectors fent servir la relació que hi ha entre el producte escalar i l'angle, θ , entre dos vectors:

$$(1, 1) \cdot (k - 3, 1) = \|(1, 1)\| \cdot \|(k - 3, 1)\| \cos \theta.$$

Les rectes no es tallaran quan $\cos \theta = 1$, i per tant haurem de resoldre l'equació

$$(1, 1) \cdot (k - 3, 1) = \|(1, 1)\| \cdot \|(k - 3, 1)\| \implies k + 4 = \sqrt{2} \sqrt{(k - 3)^2 + 1},$$

que només té una solució $k = 4$. En aquest cas, caldrà veure si les rectes són la mateixa o bé són paral·leles. Substituint $k = 4$ ens queden les rectes

$$\begin{cases} 2x - 2y - 5 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Les rectes no són la mateixa i per tant són paral·leles (fixeu-vos que els vectors perpendiculars $(2, -2)$ i $(1, -1)$ són proporcionals). Això es pot veure a vista, ja que la parta literal de la segona equació és la de la primera dividida entre 2, però el terme independent no. També es veure agafant qualsevol punt d'una de les rectes i comprovant que l'altra no hi passa. Per exemple, la segona recta passa pel punt $(0, 2)$ però la primera no perquè aquest punt no compleix la primera equació.

Finalment, les rectes es tallaran si $k \neq 4$. Podem destacar el cas en que les rectes són perpendiculars. Això passa quan $\cos \theta = 0$, i per tant ens queda l'equació

$$(1, 1) \cdot (k - 3, 1) \implies k + 4 = 0,$$

que té solució $k = -4$.

Opció 2:

Agrumentant de la mateixa manera, les rectes es tallaran quan els vectors directores siguin linealment independents: és a dir, quan no siguin "múltiples". Dos vectors directores els podem trobar girant els vectors perpendiculars 90° : $(2, 2)$ i $(-1, k - 3)$. Per tal que siguin un múltiple de l'altre, si mirem la primera coordenada, haurem de multiplicar el segon per -2 , ja que $-1 \cdot (-2) = 2$. La segona coordenada també ho haurà de ser: $(k - 3)(-2) = 2$, que passa quan $k = -4$. Per veure que són paral·leles quan $k = -4$ ho podem fer igual que abans.

Opció 3:

Les dues rectes es tallaran quan el sistema sigui compatible determinat. En tractar-se d'un sistema de només dues incògnites, això passarà quan

$$2(-(k - 3)) - (-2) \cdot 1 \neq 0,$$

cosa que passa quan $k \neq 4$.

Exercici 121: Recta perpendicular.

Determineu l'equació de la recta perpendicular a la recta $(x, y) = (4, -5) + \lambda(3, -2)$ i que passa pel punt $(3, -6)$. Escriviu-la en forma explícita.

Solució.

Altres cop tenim diferents opcions.

Opció 1:

Escrivim la recta que ens demanen primer en forma vectorial i després la passem a explícita. Necessitem un punt de pas, el $(3, -6)$, i un vector director. Aquest segon serà perpendicular a $(3, -2)$, que és el vector director de la recta r . Només caldrà girar-lo 90° i obtindrem la recta que ens demanen en forma vectorial:

$$(x, y) = (3, -6) + \lambda(2, 3).$$

Per passar-la a forma explícita només cal que aïllem λ de les dues components i igualem:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{x-3}{2} \\ \lambda &= \frac{y+6}{3}\end{aligned}$$

Iguant obtenim

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{3}$$

i aïllant y

$$y = \frac{3}{2}(x-3) - 6$$

Opció 2:

Escrivim la recta en forma general i després la passem a explícita. Un vector perpendicular a la recta que ens demanen és un vector director de la recta r . Per tant, la recta serà de la forma

$$3x - 2y + C = 0.$$

Troblem C imposant que passi pel punt $(3, -6)$: $C = -21$. Per tant, en forma explícita la recta serà

$$y = \frac{3x-21}{2}.$$

Evidentment, ens dona el mateix resultat (només cal operar una mica el resultat de la primera opció).

Exercici 122: Trobar el punt simètric.

Determineu el punt simètric de $Q = (-4, 2)$ respecte la recta $r : (x, y) = (4, -1) + \lambda(-3, 4)$

Solució.

Tenim diferents opcions.

Opció 1:

Segurament la més ràpida. Si al punt Q li sumem un vector de mòdul el doble de la distància entre Q i r i que sigui perpendicular a aquesta tindrem el punt que ens demanen.

Per trobar un vector perpendicular simplement girem 90° el vector director de la recta: $(4, 3)$. Ara trobem la distància entre Q i r . Si volem aplicar la famosa fórmula, haurem de tenir la recta en forma general. Aïllant λ a les dues coordenades i fent igualació tenim

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{4},$$

i la forma general de la recta és

$$4x + 3y - 13 = 0$$

Ara podem trobar la distància entre Q i r

$$d(Q, r) = \frac{|4 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 - 13|}{\sqrt{16+9}} = \frac{23}{5}$$

Ara, per tal el mòdul de vector perpendicular sigui el doble de la distància entre la recta i el punt Q , simplement el normalitzem (fem que tingui mòdul 1 dividint entre el seu mòdul) i multipliquem per $d(Q, r)$. El seu mòdul és $\sqrt{16+9} = 5$, per tant el simètric serà

$$(-4, 2) + 2 \cdot d(Q, r) \cdot \frac{(4, 3)}{5} = (-4, 2) + \frac{2 \cdot 23}{5 \cdot 5}(4, 3) = \left(\frac{84}{25}, \frac{188}{25}\right).$$

Opció 2:

Més laboriosa però constructiva: al punt Q li sumem dues vegades el vector que va de Q a la intersecció de la recta perpendicular a r passant per Q i r . És a dir, considerem la recta s perpendicular a r i que passa per Q . Trobem la intersecció (R) entre r i s . El punt simètric serà

$$Q + 2\vec{QR}$$

Trobem primer la recta s . Un vector perpendicular a s l'obtenim-4 girant 90° el vector $(4, 3)$. L'equació general d' s serà de la forma

$$3x - 4y + C = 0.$$

Trobem C imposant que passi per Q :

$$3(-4) - 4 \cdot 2 + C = 0 \implies C = 20.$$

Ara trobem el punt R , intersecció de s i r resolent el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

que té per solució

$$R = \left(-\frac{8}{25}, \frac{119}{25} \right)$$

Per tant, el punt simètric serà

$$Q + 2 \cdot \vec{QR} = Q + 2 \cdot (R - Q) = 2R - Q = \left(-\frac{84}{25}, \frac{188}{25} \right)$$

Exercici 123: Vectors formant un angle determinat.

Determineu els dos vectors que formen 36° amb el vector $(-0.2, 1.7)$ i que tenen mòdul 1.

Solució.

Opció 1 Suposem que els vectors que ens demanen tenen coordenades (a, b) . El producte escalar ens relaciona vectors amb els angles que formen:

$$(a, b) \cdot (-0.2, 1.7) = \|(a, b)\| \cdot \|(-0.2, 1.7)\| \cos(36^\circ).$$

A aquesta equació hi hem d'afegir l'equació

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Això ens dóna un sistema d'equacions no lineal:

$$\begin{cases} -0.2a + 1.7b = 1.34 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \end{cases}$$

amb dues solucions. Amb una mica de paciència es pot veure que les solucions són

$$\begin{cases} a = -0.678 \\ b = 0.734 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0.489 \\ b = 0.872 \end{cases}$$

La qual cosa ens dóna els dos vectors

$$(-0.678, 0.734) \quad (0.489, 0.872)$$

Opció 2 *Alternativament, podem fer servir complexos per trobar-los. Passem primer el vector a polar: El mòdul del complex serà*

$$\sqrt{0.2^2 + 1.7^2} = 1.712$$

i l'angle

$$\theta = \arctan\left(\frac{1.7}{-0.2}\right) + 180^\circ = 96.71^\circ$$

Fixem-nos que cal sumar 180° perquè el complex es troba al segon quadrant. Ara només caldrà dividir pels complexos 1.712_{36° i 1.712_{-36° per tal de girar 36° i obtenir un complex de mòdul 1. Així obtindrem:

$$\frac{1.712_{96.71^\circ}}{1_{36^\circ}} = 1_{132.71^\circ}$$
$$\frac{1.712_{96.71^\circ}}{1_{-36^\circ}} = 1_{60.71^\circ}$$

Si ara els passem a binòmica trobarem els vectors girats:

$$\begin{aligned} 1_{132.71^\circ} &= 1 \cdot (\cos(132.71) + i \sin(132.71)) = \\ &= -0.678 + 0.734i \\ 1_{60.71^\circ} &= 1 \cdot (\cos(60.71) + i \sin(60.71)) = \\ &= 0.489 + 0.872i \end{aligned}$$

5.3 Rectes al pla i circumferències

Exercici 124: Pg. 168 n° 4.

Trobeu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A = (1, 2)$ i $B = (3, 4)$ i té radi 4.

Solució.

D'entrada observem que de fet hi haurà dues solucions! I també més d'una opció per trobar-les

Opció 1: *Com sabem el radi, només ens caldria trobar al centre. Aquest estarà a distància 4 dels punts A i B ; fixem-nos que aquest punt no és únic, n'hi ha dos. Si anomenem $C = (x, y)$ al centre, aquest haurà de complir*

$$d(A, C) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 4$$

$$d(B, C) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 4$$

D'aquí s'obté un sistema d'equacions bastant molest de resoldre. Mirem doncs una altra opció.

Opció 2:

Observem que el triangle ABC és isòsceles; els costats iguals valen 4 (el radi de la circumferència), i el desigual mesura $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Si considerem $M = \frac{A+B}{2} = (2, 3)$ el punt mitjà del segment AB , aleshores el segment MC és l'altura d'aquest triangle. Com el triangle AMC és rectangle, la hipotenusa és 4 i un catet val $\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \sqrt{2}$, l'altre valdrà $\|\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{16-2} = \sqrt{14}$. Per tant, el centre que busquem serà un punt que està a distància $\sqrt{14}$ de M en la direcció perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$, $(2, -2)$ o bé $(-2, 2)$. Ara necessitem que aquests vector tinguin mòdul $\sqrt{14}$. Per fer-ho, els normalitzem (dividint entre el seu mòdul, que és $2\sqrt{2}$) i multipliquem per $\sqrt{14}$. Així obtindrem dues opcions pel vector MC :

$$\sqrt{14} \cdot \frac{(2, -2)}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{7}, -\sqrt{7})$$

$$\sqrt{14} \cdot \frac{(-2, 2)}{2\sqrt{2}} = (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$$

Per tant, C serà

$$C = M + (\sqrt{7}, -\sqrt{7}) = (2 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7})$$

$$C = M + (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) = (2 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7})$$

Finalment, obtenim l'equació de les dues circumferències,

$$\begin{aligned}(x - 2 - \sqrt{7})^2 + (y - 3 + \sqrt{7})^2 &= 16 \\ (x - 2 + \sqrt{7})^2 + (y - 3 - \sqrt{7})^2 &= 16.\end{aligned}$$

Exercici 125: Pg. 168 n° 5.

Trobeu l'equació de la circumferència amb centre $C = (2, -5)$ i que passa pel punt $P = (-1, -3)$.

Solució.

Només ens cal trobar el radi, que és $d(P, C) = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. Per tant, la circumferència serà

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 13.$$

Exercici 126: Pg. 168 n°9.

Escriure l'equació de les circumferències següents:

a) De centre $(2, -4)$ i tangent a l'eix de les abscisses.

b) De centre $(-5, 2)$ i tangent a l'eix d'ordenades.

Solució.

En tots dos casos ens cal saber el radi. Com la circumferències han de ser tangents als eixos els radis seran la distància del centre als eixos. Aquestes distàncies són precisament el valor de les coordenades del centre. Així, pel primer cas el radi serà la distància del centre a l'eix horitzontal, que és la coordenada y del punt $(2, -4)$ (en valor absolut!), 4. En el segon cas el radi serà la distància del punt $(-5, 2)$ a l'eix vertical, que és la coordenada x d'aquest punt (en valor absolut), 5. Per tant, les circumferències que ens demanen seran

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (y + 4)^2 &= 16 \\ (x + 5)^2 + (y - 2)^2 &= 25.\end{aligned}$$

Exercici 127: Pg. 169 n° 10.

Trobeu l'equació de la circumferència que és tangent a la recta $r : y = x + 1$ al punt d'abscissa 3 i passa pel punt $A = (3, -1)$.

Solució.

Opció 1:

Busquem una equació de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

tenim per tant 3 incògnites.

Que sigui tangent a la recta $y = x + 1$ al punt d'abscissa 3 vol dir que ha de ser tangent a la recta al punt que té $x = 3$, és a dir, al punt $(3, 4)$. Per tant, ja tenim dos punts de pas, el $(3, 4)$ i el $(3, -1)$. Imposant que la circumferència passi per aquests dos punts obtenim dues equacions:

$$\begin{aligned}(3 - a)^2 + (4 - b)^2 - R^2 &= 0 \\ (3 - a)^2 + (-1 - b)^2 - R^2 &= 0.\end{aligned}$$

Restant les dues equacions obtenim

$$(4 - b)^2 - (-1 - b)^2 = 16 - 8b - 1 - 2b = 0 \longrightarrow b = \frac{3}{2}.$$

Necessitem més condicions per trobar a i R . Com ha de ser tangent a la recta aquesta, sabem que el centre ha de d'estar contingut a la recta que és perpendicular a la recta $y = x + 1$ i que passa per $(3, 4)$. Escrita en forma explícita, aquesta recta és de la forma $y = -x + D$, ja que ha de ser paral·lela a la bisectriu del 4rt quadrant. Trobem D imposant que passi per $(3, 4)$: $D = 7$. Una altra opció és la següent: escrivint la recta $y = x + 1$ en forma general obtenim $y - x - 1 = 0$. Girant 90° el vector $(1, -1)$ obtenim un vector perpendicular a la recta que estem buscant, i per tant, en forma general, serà de la forma $y + x + M = 0$. Imposant que passi per $(3, 4)$ obtenim $M = -7$, i la recta és la mateixa que havíem trobat per l'altre mètode.

El fet que el centre hagi d'estar a la recta $y = -x + 7$ ens dona una relació entre a i b :

$$b = -a + 7.$$

Com ja tenim b d'aquí obtenim a :

$$a = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

Ens falta trobar el radi. El podríem obtenir aïllant R a qualsevol de les dues equacions ja que ja sabem els valors d' a i b . També podem trobar R calculant la distància entre el centre i qualsevol dels dos punts de pas, per exemple

$$R = \left\| (3, 4) - \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{-5}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Per tant la circumferència quedaria

$$\left(x - \frac{11}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{25}{2} = 0.$$

Opció 2:

El punt d'abscisses 3 de la recta és el punt $B = (3, 4)$. Sabem que el centre està situat a la recta perpendicular a r i que passa per $B = (3, 4)$, que és $x + y - 7 = 0$. Busquem ara un punt d'aquesta recta que estigui a la mateixa distància d' A que de B . Com, escrit en coordenades, un punt de la recta és de la forma $T = (x, 7 - x)$, la condició

$$d(T, A) = d(T, B)$$

es pot escriure com l'equació

$$(x - 3)^2 + (7 - x + 1)^2 = (x - 3)^2 + (7 - x - 4)^2,$$

que té només una solució i és $x = \frac{11}{2}$. Per tant el centre serà

$$C = \left(\frac{11}{2}, 7 - \frac{11}{2} \right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

El radi el trobem com abans, calculant la distància $d(C, A) = \frac{5}{\sqrt{2}}$, i l'equació queda com abans.

Exercici 128: Circumferència circumscrita, Pg. 169 n° 11.

Trobeu l'equació de la circumferència circumscrita al triangle de vèrtexs $A = (1, 1)$, $B = (-2, 0)$ i $C = (0, -3)$.

Solució.

Ens cal trobar el circumcentre del triangle, que és el punt on es tallen les mediatriss (perpendiculars a les bases passant pel punt mitjà). Amb què en trobem dues ja tindrem prou, perquè la tercera passarà pel mateix punt. Per exemple, trobem les equacions de les rectes que contenen les mediatriss dels segments AB i BC . Els vectors $\overrightarrow{BA} = (3, 1)$ i $\overrightarrow{BC} = (2, -3)$ són perpendiculars a aquestes rectes, i com a punts de pas tindrem els punts mitjants $M = \frac{A+B}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i $N = \frac{B+C}{2} = (-1, -\frac{3}{2})$, les rectes seran

$$\begin{aligned} 3x + y + D = 0 & \longrightarrow 3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + D = 0 & 3x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + D' = 0 & \longrightarrow 2(-1) - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + D' = 0 & 2x - 3y - \frac{5}{2} = 0 \end{aligned}$$

Ara el circumcentre el trobarem resolent el sistema

$$\left. \begin{aligned} 3x + y + 1 &= 0 \\ 2x - 3y - \frac{5}{2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que té per solució el punt

$$E = \left(-\frac{1}{22}, -\frac{19}{22} \right).$$

Ara només ens caldrà trobar el radi. Com la circumferència que estem buscant és la circumscrita, passa pels tres vèrtexs; per tant, el radi serà la distància del centre a qualsevol dels vèrtexs:

$$R = d(E, A) = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{22}\right)^2 + \left(1 + \frac{19}{22}\right)^2} = \sqrt{\frac{23^2 + 41^2}{22^2}},$$

i per tant la circumferència que ens demanen serà

$$\left(x + \frac{1}{22}\right)^2 + \left(y + \frac{19}{22}\right)^2 = \frac{23^2 + 41^2}{22^2}$$

Exercici 129: Pg. 169 n°12.

Trobeu l'equació de la circumferència de centre $C = (2, -3)$ i tangent a la recta $r : 3x + 4y + 1 = 0$.

Solució.

Només ens cal saber el radi, que serà la distància del punt C a la recta r . Fent servir la fórmula de la distància d'un punt a una recta obtenim

$$R = d(C, r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1.$$

Per tant, la circumferència que ens demanen serà

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1.$$

Exercici 130: Pg. 170 n° 20.

Trobeu les equacions de les rectes tangents a la circumferència

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

que passen pel punt exterior $P = (-2, 0)$.

Solució.

Opció 1:

Calculem el centre i el radi de la circumferència, escrivint la seva equació de la següent manera

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0.$$

Per tant, el seu centre és $C = (3, 2)$ i el seu radi és $R = 2$.

Si diem M i M' els punts de tangències, els triangles CMP i $CM'P$ són rectangles, essent els angles rectes els corresponents als punts M i M' . Les hipotenuses d'aquests triangles són la mateixa i és el segment CP , que té mòdul $\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Per tant, per Pitàgores trobem que els catets MP i $M'P$ valen $\sqrt{29 - 4} = 5$. Busquem doncs quins punts de la circumferència estan a distància 5 del punt P . Això és equivalent a trobar la solució del sistema

$$\left. \begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 - 4 &= 0 \\ (x+2)^2 + y^2 &= 25 \end{aligned} \right\}$$

Aïllant y de la segona equació i substituint a la primera trobem les solucions

$$x = 3 \quad x = \frac{47}{29},$$

que ens donen els punts

$$\begin{aligned} M &= (3, 0) \\ M' &= \left(\frac{47}{29}, \frac{100}{29} \right). \end{aligned}$$

Per tant, en forma vectorial, obtenim les rectes

$$\begin{aligned} (x, y) &= P + \lambda \cdot \overrightarrow{PM} = (-2, 0) + \lambda(5, 0) \\ (x, y) &= P + \lambda \cdot \overrightarrow{PM'} = (-2, 0) + \lambda \left(\frac{105}{29}, \frac{100}{29} \right) \end{aligned}$$

Opció 2: Les rectes que estem buscant han de tallar una, i només una, vegada la circumferència. Escrivint una d'ells en forma explícita i imposant que passi pel punt P obtenim que és de la forma $y = mx + 2m = m(x + 2)$. Ara hem d'imposar que el sistema

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 &= 0 \\ y &= m(x + 2) \end{aligned} \right\}$$

tingui només una solució. Fent substitució obtenim l'equació de segon grau

$$x^2 + m^2(x + 2)^2 - 6x - 4m(x + 2) + 9 = 0,$$

que operant una mica i agrupant queda

$$(m^2 + 1)x^2 + 2(2m^2 - 2m - 3)x + 4m^2 - 8m + 9 = 0.$$

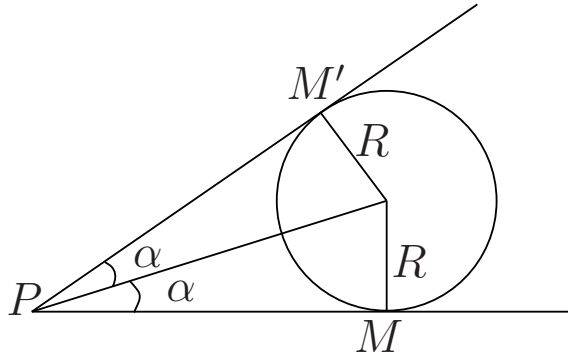


Figura 5.1: Rectes tangents a la circumferència passant per un punt

Per tal que només tingui una solució necessitem que el discriminant sigui nul:

$$\Delta = \underbrace{(2(2m^2 - 2m - 3))^2}_{b^2} - 4 \underbrace{(m^2 + 1)}_a \underbrace{(4m^2 - 8m + 9)}_c = 0.$$

Operant, l'equació queda

$$21m^2 - 20m = 0,$$

d'on $m = 0$ i $m = \frac{20}{21}$. Substituint ens queden les equacions de les rectes

$$y = 0$$

$$y = \frac{20}{21}x + \frac{40}{21}.$$

Fixem-nos que són les mateixes rectes que ens havien sortit abans, ja que $\frac{100}{105} = \frac{20}{21}$.

Opció 3:

Fixem-nos que el punt P queda a la mateixa alçada que el punt més baix de la circumferència. En efecte, si al centre $(3, 2)$ li restem el radi en queda el punt $M = (3, 0)$, que està a la mateixa alçada que el punt $P = (-2, 0)$. Per tant, una de les rectes serà la recta $y = 0$. Per trobar l'altra, només cal calcum el seu pendent. Segons la figura el pendent de la recta serà $\tan(2\alpha)$. Com sabem que $\tan(\alpha) = \frac{R}{PM} = \frac{2}{5}$, aplicant la fórmula de l'angle doble obtenim

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{21}{25}} = \frac{20}{21},$$

i l'altra recta serà de la forma $y = \frac{20}{21}x + n$ i, imposant que passi per P obtenim $n = \frac{40}{21}$, i la recta serà $y = \frac{20}{21}x + \frac{40}{21}$.

Exercici 131.

Trobeu l'equació de la circumferència circumscrita al triangle $A = (0, -3)$, $B = (-3, 0)$ i $C = (1, 1)$ de dues maneres:

- a) Trobant el circumcentre del triangle
- b) Imposant que passi pels vèrtexs

Solució.

- a) Com el problema 128
- b) L'equació de la circumferència serà de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

on (a, b) és el centre i R el radi. Cal trobar aquestes tres incògnites imposant que la circumferència passi pels tres punts. Això porta al un sistema de tres equacions i tres incògnites:

$$\left. \begin{aligned} (0 - a)^2 + (-3 - b)^2 &= R^2 \\ (-3 - a)^2 + (0 - b)^2 &= R^2 \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 &= R^2 \end{aligned} \right\}$$

Exercici 132: Posició relativa recta-circumferència.

Determineu la posició relativa de la recta $2x - 3y + 4 = 0$ respecte de la circumferència de centre $(4, 3)$ i radi $r = 5$.

Solució.

Opció 1: mireu el nombre de solucions del sistema.

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + 4 &= 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 &= 5^2 \end{aligned} \right\}$$

Opció 2: calcular la distància del centre a la recta.

$$d(C, r) = \frac{|2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Com

$$d(C, r) < R$$

aleshores són secants (es tallen en dos punts).

Exercici 133: Circumferència circumscrita.

Trobeu l'equació de la circumferència circumscrita al triangle $A = (1, 1)$, $B = (0, 0)$ i $C = (2, -5)$. Per fer-ho, trobeu primer el circumcentre (centre de la circumferència que serà el punt de tall de les mediatrises), després el radi i finalment l'equació.

Exercici 134: Circumferència tangent a una recta i centre en un altra.

Trobeu l'equació de circumferència de radi 2 sabent que el seu centre es troba a la recta $2x - y + 3 = 0$ i és tangent a la recta $x - y - 3 = 0$.

Solució.

Podeu seguir la solució proposada per aquest exercici amb l'applet de Geogebra:

<https://www.geogebra.org/m/dz98qd2q>

Com sabem el radi de la circumferència només ens caldrà trobar-ne el centre: $C = (a, b)$. Com aquest es troba a la recta $r : 2x - y + 3$, aleshores, aïllant y , el punt C serà de la forma haurà de ser de la forma $C = (a, 2a + 3)$.

Com la recta $s : x - y - 3 = 0$ ha de ser tangent a la circumferència, la distància del centre de la circumferència a la recta s serà el radi. Per tant, volem que:

$$d(C, s) = 2$$

Ara podem fer servir la fórmula de la distància a un punt per calcular quin haurà de ser el valor de a . Fixem-nos que la recta s ja ens la donen en forma general, per tant la distància quedarà:

$$d(C, s) = \frac{|a - (2a + 3) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-a - 6|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |-a - 6| = 2\sqrt{2}.$$

Ara, fixem-nos que, com hi ha un valor absolut, aquesta equació tindrà dues opcions:

$$\begin{aligned} -a - 6 &= 2\sqrt{2} \implies a = -6 - 2\sqrt{2} \\ -a - 6 &= -2\sqrt{2} \implies a = -6 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Per il·lustrar-ho més fàcilment, observeu que això és el mateix que dir que

$$|x| = 1 \implies x = 1 \text{ o } x = -1$$

Aquest dos valors proporcionen dos possible centres diferents:

$$\begin{aligned} C &= \left(-6 - 2\sqrt{2}, 2(-6 - 2\sqrt{2} + 3)\right) = \left(-6 - 2\sqrt{2}, -9 - 4\sqrt{2}\right) \\ C' &= \left(-6 + 2\sqrt{2}, 2(-6 + 2\sqrt{2} + 3)\right) = \left(-6 + 2\sqrt{2}, -9 + 4\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Per tant, les dues possibles circumferències seran:

$$(x + 6 + 2\sqrt{2})^2 + (y + 9 + 4\sqrt{2})^2 = 4$$

$$(x + 6 - 2\sqrt{2})^2 + (y + 9 - 4\sqrt{2})^2 = 4$$

Exercici 135: Circumferències tangents.

Considereu la circumferència

$$c : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

- a) Digueu si el punt $(2, 4)$ es troba dins o fora la circumferència
- b) Trobeu el radi d'una circumferència de centre $(2, 4)$ que és tangent a la circumferència c .

Solució.

- a) Per comprovar si el punt $A = (2, 4)$ és dins o fora només cal comprovar si la distància al centre, $C = (1, 3)$, és més gran o més petita que el radi, que és 4:

$$\|\overrightarrow{CA}\| = \|A - C\| = \|(2 - 1, 4 - 3)\| = \sqrt{2}$$

Com $\sqrt{2} < 4$ el punt serà interior a la circumferència.

Fixem-nos que això és equivalent a substituir el punt A a l'equació de la circumferència i comprovar si el resultat és més gran o més petit que 16 (el radi al quadrat).

- b) Fixem-nos que, com és interior, hi haurà dues circumferències tangents a c , una d'interior i una altra d'exterior (vegeu la figura). El radi de la interior serà:

$$4 - 2\sqrt{2}$$

i el radi de l'exterior serà

$$4 + 2\sqrt{2}$$

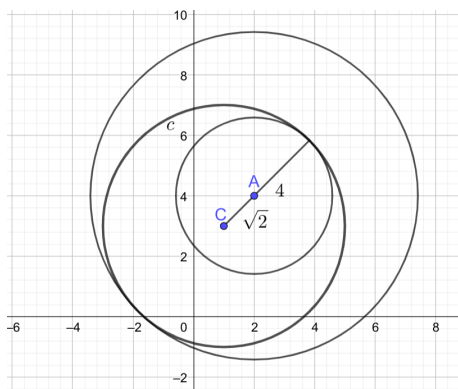
Exercici 136: Intersecció recta i circumferència.

Determineu els punts d'intersecció entre la circumferència

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$$

i la recta

$$r : \begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = 6 - 3k \end{cases}$$

**Solució.**

Com tenim la recta en forma paramètrica, simplement podem substituir x i y a la circumferència i trobar el (o els) valor del paràmetre k pels quals es tallen. Així només hem de resoldre l'equació

$$\underbrace{(2k+3-3)}_x^2 + \underbrace{(6-3k-5)}_y^2 = 16$$

que dóna

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{789}}{26}$$

Substituint les dues solucions de k a la recta r trobem els valors de les coordenades x i y dels (dos) punts corresponents:

$$\left(\frac{42 + \sqrt{789}}{13}, \frac{147 - 3\sqrt{789}}{26} \right) \quad \left(\frac{42 - \sqrt{789}}{13}, \frac{147 + 3\sqrt{789}}{26} \right)$$

Bibliografia

- [1] *Mathématiques 1^{re} Bac*.
J. Besora, JM. Guiteras, A. Jané. , Mc. Graw Hill, ISBN: 978-84-481-9604-2,
2015.