Capítol 4

Nombres complexos

Continguts

Exercici 69.
Calculeu

$$\frac{2-i}{3+i} =$$

Solució.

Opció 1 Divisió en binòmica

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{3+i} &= \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-5i+i^2}{3^2-i^2} = \frac{6-5i-1}{9-(-1)}\\ &= \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Opció 2 Passar a polar.

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}\\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{-1}{2}\right) = -26.56^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}\\ \theta_2 &= \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{3+i} &= \frac{\rho_{1_{\theta_1}}}{\rho_{2_{\theta_2}}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\theta_1-\theta_2}\\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)_{-26.56^\circ-18.43^\circ} = \left(\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}}\right)_{-45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}_{-45^\circ}\end{aligned}$$

Si ara el passem a binòmica:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}_{-45^\circ} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(-45^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(-45^\circ)i\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Exercici 70.
Calcular

$$(3+4i)^{-1}$$

Solució.

Opció 1 Ho passem a polar:

$$\rho = \sqrt{25} = 5$$
$$\theta = \arctan\frac{4}{3} = 53.13^\circ$$

Aleshores

$$(5_{53.13^\circ})^{-1} = \frac{1}{5}_{-53.13^\circ}$$

Opció 2 Racionalitzant:

$$(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Exercici 71: Fórmula d'Euler.

a) *Considereu θ un angle en radians. Doneu un valor a θ i comproveu que*

$$\sin(\theta) = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$
$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

Per fer-ho, d'una banda calculeu $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ per un valor qualsevol de θ (petit i en radians), i de l'altra feu les sumes pel mateix valor de θ fins a ordre 6 o 7.

b) *Fent servir les igualtats anteriors i que*

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

demostreu la fórmula d'Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Exercici 72.

Passeu de binòmica a polar o de polar a binòmica els següents nombres complexos:

a) $-1+3i$

b) $2-2i$

c) 2_{30°

d) 2_{200°

Exercici 73: Pg. 99 n^o 1.
Resoleu les següents equacions

a) $x^2+25=0$

b) $9x^2+1=0$

c) $x^2+x+1=0$

d) $x^2-4x+5=0$

Solució.

a) $x^2=-25 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{-25}=\pm\sqrt{25\cdot(-1)}=\pm5\sqrt{-1}=\pm5i$

b) $x^2=-\dfrac{1}{9} \Longrightarrow x=\pm\dfrac{1}{3}i$

c) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\dfrac{4\pm2i}{2}=2\pm i$

Exercici 74: Pg. 99 n^{o}2.
Donats $z_1=1-2i$ *i* $z_2=-4+6i$ *calculeu:*

a) z_1+z_2

b) z_1-z_2

c) $z_1\cdot z_2$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solució.

a) $z_1+z_2=-3+4i$

b) $z_1 - z_2 = 5 - 8i$

c) $z_1 \cdot z_2 = -4 - 12i^2 + 6i + 8i = -4 + 12 + 14i = 8 + 14i$

d) $\dfrac{1-2i}{-4+6i} = \dfrac{1-2i}{-4+6i} \cdot \dfrac{-4-6i}{-4-6i} = \dfrac{-4-12-6i+8i}{16+36} = \dfrac{-16+2i}{52} = -\dfrac{4}{13} + \dfrac{1}{26}i$

Exercici 75.

Pg. 47 nº 3 Expresseu els nombres $z_1 = -1 + i$ *i* $z_2 = 4 - \sqrt{3}i$ *en forma polar, i calculeu*

$$\frac{z_1^4}{z_2}$$

Solució.

Per passar-ho a polar caldrà calcular el mòdul i l'angle:

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$
$$|z_2| = \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right) = -23.41^\circ$$

Fixem-nos que si calculem l'argument de z_1 *fent servir l'arctangent li haurem de sumar* 180° *perquè* z_1 *pertany al 2n quadrant mentre que* -45° *és un angle del quart quadrant. En canvi, en calcular l'angle de* z_2 *el resultat que retorna la calculadora en fer l'arctangent ja és el correcte perquè* z_2 *pertany al quart quadrant.*
Ara, per calcular el que ens demanen més val fer servir la forma polar, perquè en multiplicar multiplicarem mòduls i sumarem angles, mentre que en dividir dividirem mòduls i restarem angles:

$$\frac{z_1^4}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{2}^4_{4\cdot 135^\circ})}{\sqrt{19}_{-23.41^\circ}}$$
$$= \frac{4_{540^\circ}}{\sqrt{19}_{-23.41^\circ}} = \frac{4_{180^\circ}}{\sqrt{19}_{-23.41^\circ}} = \frac{4}{\sqrt{19}}\angle 180 + 23.41$$
$$= \boxed{\frac{4}{\sqrt{19}}\angle 203.41^\circ}$$

Fixem-nos que l'angle de 540 *el podem reduir a* $180^\circ = 540^\circ - 360^\circ$ *perquè és més d'una volta.*

Exercici 76.
Considereu un z_1:

a) *Si r és el mòdul de z_1 i α és el seu angle, escriviu-lo en forma trigonomètrica.*

b) *Escriviu el complex $z_2 = e^{i\beta}$ en forma trigonomètrica (passant-lo a binòmica).*

c) *Fent servir les dues expressions obtingudes en els apartats anteriors, demostreu que el producte $z_1 \cdot z_2$ consisteix en girar un angle β en sentit antihorari el complex z_1.*

d) *Feu servir la fórmula obtinguda a l'apartat anterior per girar el vector $(1,3)$ un angle de 30° en sentit antihorari.*

Solució.

a) *Simplement, recordant la forma trigonomètrica obtenim:*

$$z_1 = r\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$$

b) *El mòdul de $e^{i\beta}$ és 1, i el seu argument β. Per tant, si l'escrivim en forma trigonomètrica ens quedarà:*

$$z_2 = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$$

c) *Fem ara el producte $z_1 \cdot z_2$ en forma binòmica:*

$$\begin{aligned}
r\cdot&\Big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\Big)\cdot\Big(\cos(\beta) + i\sin(\beta)\Big) = \\
&= r\Big(\cos(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\sin(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) + \overbrace{i^2}^{-1}\sin(\alpha)\sin(\beta)\Big) = \\
&= r\Bigg(\underbrace{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\Big(\underbrace{\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}\Big)\Bigg) = \\
&= r\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)
\end{aligned}$$

Veiem que el complex resultant és un complex de mòdul r i angle $\alpha+\beta$. Per tant, el complex z_1 ha mantingut el mòdul però ha girat un angle β en sentit antihorari.

d) Per girar el vector $(1,3)$ *un angle de* $30°$ *en sentit antihorari calculem primer el seu mòdul i angle:*

$$\|(1,3)\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{1}\right) = 71.56°$$

Per tant, el vector, representat com a complex, girat 30 graus serà:

$$\sqrt{10}\left(\cos(71.56+30) + i\sin(71.56+30)\right) \simeq -0.634 + 3.09i$$

Per tant, el vector demanat serà, aproximadament,

$$\boxed{(-0.634, 3.09)}$$

Exercici 77.
Siguin

$$z_1 = -1+2i \qquad z_2 = -3-4i$$

Calculeu:

a) z_1^6

b) $z_1^3 \cdot z_2$

c) $\dfrac{z_1}{z_2^4}$

d) $\dfrac{z_2^4}{z_1}$

Solució.
Clarament, el més còmode per fer aquestes operacions és tenir els complexos expressats en forma polar o exponencial. Pel que fa a z_1 *fixem-nos que pertany al 2n quadrant, i per tant cladrà sumar* $180°$ *a l'angle perquè, en ser la seva tangent negativa, la calculador retornarà un angle del 4rt quadrant:*

$$|z_1| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + 180° = -63.3° + 180 = 116.6°$$

El mateix passa amb z_2, també caldrà sumar-li $180°$ al seu argument perqupe pertany al 3r quadrant i la calculadora ens retornarà un angle del primer quadrant:

$$|z_2| = \sqrt{9+16} = 5$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) + 180° = 233.1°$$

Ara podem fer les operacions que ens demanen:

a) $z_1^6 = \left(\sqrt{5}\right)^6 \angle 6 \cdot 116.6 = 125_{339.6°}$

b) $z_1^3 \cdot z_2 = 5\sqrt{5}_{3\cdot 116.5} \cdot 5_{233.1} = 25\sqrt{5}_{582.6°} = 25\sqrt{5}_{222.6°}$

c) $\dfrac{z_1}{z_2^4} = \dfrac{\sqrt{5}_{116.6°}}{5^4_{4\cdot 233.1°}} = \dfrac{\sqrt{5}}{625}\angle - 95.9°$

d) Fixem-nos que ens demanen l'invers de l'anterior. Per tant tindrem l'angle canviat de signe i el mòdul invertit:

$$\frac{z_2^4}{z_1} = \frac{625}{\sqrt{5}}\angle 95.9 = 125\sqrt{5}_{95.9°}$$

Exercici 78.
Quina relació hi ha entre un complex z i el seu invers $\frac{1}{z}$?

Solució.
Si considerem $z = re^{i\theta}$ i fem la divisió:

$$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{i0}}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

El seu mòdul s'inverteix, i el seu angle es canvia de signe.

Exercici 79.
Factoritzeu el polinomi $x^3 + 9x$

Solució.
Per factoritzar-lo hem de buscar les seves arrels, és a dir, resoldre l'equació

$$x^3 + 9x = 0 \Longrightarrow x\left(x^2+9\right) = 0$$

D'aquí traiem dues opcions:

$$x = 0$$
$$x^2 + 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$$

Per tant, la factorització quedarà:

$$x^3 + 9x^2 = x(x - 3i)(x + 3i)$$

Exercici 80.

Considereu un complex z i el seu conjugat, $\bar{z}$.

a) *Què passa si els sumem: $z + \bar{z}$?*

b) *Què passa si els restem: $z - \bar{z}$?*

c) *Què passa si els multipliquem: $z \cdot \bar{z}$?*

d) *Què passa si els dividim: $\dfrac{z}{\bar{z}}$?*