- *En $x = 2$ caldrà fer els límits laterals, perquè canviem de branca. Així:*

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

Per la dreta tenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$; caldrà doncs factoritzar i simplificar. Com ja hem trobat les arrels del denominador abans, obtenim:

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Torne a fer el límit fent servir la versió simplificada:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

- *Finalment fem el límit en $x \to -2$. En aquest cas entrem per la primer branca i obtenim:*

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x+1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

i ja està, no cal fer els laterals.

2.4 Continuïtat

Exercici 39.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} & si\ x < -1 \\[2ex] \dfrac{x-2}{x^2+x-6} & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) Trobeu el domini de f

b) Feu un llistat dels punts on la funció pugui presentar alguna discontinuïtat

c) *Estudieu la continuïtat de la funció en aquests punts tot indicant els tipus de discontinuïtats*

Solució.

a) *Els possibles problemes són: denominadors que s'anul·len i que la funció estigui ben definida al canvi de branca.*

- *De la primera branca tenim:*

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1,$$

però cap dels dos valors està inclòs allà on la branca està definida. Per tant, per ara, aquests valors no s'han de treure.

- *De la segona branca tenim*

$$x^2 + x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -3 \text{ i } x = 2$$

El primer valor no està inclòs allà on està definida la branca, però el segon sí. Per tant aquest l'haurem de treure.

- *Pel que fa cal canvi de branca en $x = 1$, s'entra per la segona branca, i aquesta no hi té cap problema, per tant aquest valor no caldrà treure'l.*

Resumint, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b) *Els possibles problemes que pot presentar la funció són, d'entrada, els punts que no són del domini, on la funció serà discontínua segur. Però a més a més haurem de veure què fa la funció en $x = -1$ ja que es canvia de branca i la funció podria fer un salt.*

c)

- *Fent el límit en $x = 2$ obtenim*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{0}{0},$$

i obtenim una indeterminació. Com tenim les arrels del denominador, factoritzem i simplifiquem:

$$\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

Si fem ara el límit tindrem

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

No caldrà fer límits laterals ja el límit no depen de si ens apropem a 2 per una banda o per l'altra. Per tant, com $x = 2$ no és del domini però els límits laterals existeixen i coincideixen tindrem una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

- *En $x = -1$ tenim un canvi de branca, per tant caldrà fer límits laterals perquè la funció es comporta de maneres diferents segons si ens hi apropem per una banda o per l'altra:*

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \textit{ Indeterminació}$$

Factoritzant obtenim

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

Per fer el límit per la dreta podem fer servir la versió simplificada per facilitar els càlculs:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Com els límits laterals existeixen però són diferents, tindrem una discontinuïtat de salt en $x = -1$.

Exercici 40: Pg. 222 n^o 11.

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \frac{-2x^2+6x-4}{1-x^4}$$

Solució.
Clarament, el domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\},$$

ja que $1 - x^4 = 0 \iff x = \pm 1$. *Per tant la funció no serà continua ni en* $x = -1$ *ni en* $x = 1$. *Vegem quin tipus de discontinuïtats seran. Haurem d'estudiar els límits*

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$
$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

Pel primer tenim

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{-12}{0},$$

caldrà veure els límits laterals, perquè el denominador podria ser 0^+ *o* 0^-. *Com el denominador s'anul·la només en* $x = 1$ *i* $x = -1$, *donant valor trobem:*

$$1 - x^4 < 0 \text{ si } x < -1$$
$$1 - x^4 > 0 \text{ si } -1 < x < 1$$
$$1 - x^4 < 0 \text{ si } x > 1$$

Per tant els límits laterals quedaran

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty,$$

i la discontinuïtat serà del tipus asimptòtic.
Pel que fa a $x = 1$, *tenim*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{0}{0},$$

i caldrà factoritzar per veure què dóna aquest límit. Si trobem les arrels del denominador tindrem $-2x^2 + 6x - 4 = -2(x^2 - 3x + 2) = -2(x - 1)(x - 2)$. *I si factoritzem el denominador tindrem*

$$1 - x^4 = -(x^4 - 1) = -(x^2 + 1)(x^2 - 1) = -(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Per tant el límit quedarà

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{-2\cancel{(x-1)}(x-2)}{-(x^2+1)\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-2)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Per tant, com el límit existeix (els laterals són iguals!) però $f(1)$ no existeix, la discontinuïtat serà del tipus evitable.
Nota: Fixem-nos que, per tal de factoritzar correctament, és convenient escriure primer el polinomi de manera que el coeficient de grau més alt sigui 1, ja sigui canviant el signe al polinomi, traient factor comú o les dues coses si cal.

Exercici 41: Pg. 222 n^{o}12.
Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ si \ x \leq -1 \\ \dfrac{x+3}{2x} \ si \ -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{x}{x-2} \ si \ x > 1 \end{cases}$$

Solució.
El domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Ja sabem per tant que la funció no serà contínua en $x = 0$ ni en $x = 2$. D'una banda caldrà estudiar els límits en aquests punts per saber de quin tipus de discontinuïtat es tracta. De l'altra, caldrà veure també si la funció "enganxa bé" allà la funció canvia de branca. Comencem per $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \frac{3}{0^{\pm}} = \pm\infty,$$

i la discontinuïtat serà del tipus asimptòtica.
Per l'altre límit tenim

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \frac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty,$$

i la discontinuïtat també és asimptòtica.
Finalment mirem els punts on la funció canvia de branca:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2+1 = -1 \text{ (entrem per la primera branca)}$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ (entrem per la segona branca).}$$

Com els límits laterals coincideixen (tots dos valen -1) i coincideixen amb $f(-1) = -1$, la funció és contínua en $x = -1$.

Vegem ara què passa a $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ (entrem per la segona branca)}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{1-2} = -1 \text{ (entrem per la tercera branca).}$$

Ara els límits laterals no coincideixen però tots dos existeixen. Per tant $f(x)$ tindrà una discontinuïtat del tipus salt en $x = 1$.

Exercici 42: Pàgina 227 n^o 14.
Justificar que la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 1 \\ \dfrac{x+3}{2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

té una discontinuïtat evitable en $x = 1$. Com es pot evitar la discontinuïtat?

Solució.
Si calculem els límits laterals tenim

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Els límits laterals existeixen i coincideixen. No obstant, $f(1)$ no existeix perquè no hi està definida ($x = 1$ no està inclòs al domini de cap de les branques). Per tant, la discontinuïtat és evitable (la funció té un "forat" en $x = 1$). Per tal d'evitar-la, només cal incloure $x = 1$ en algun dels dominis. Com tots dos límits laterals coincideixen, aquest punt es pot incloure tant a la primera branca com a la segona.

Exercici 43: Pàgina 228 n^o 19.
Trobar el domini i estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x+2} & si\ x < -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & si\ -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x+1}{2-x} & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

Estudieu també les asímptotes horitzontals i oblíqües.

Solució.

La primera branca té un problema en $x = -2$ (s'anul·la el denominador), i està inclòs allà on la branca està definida. La segona branca té un denominador que s'anul·la en $x = 1$, però aquest no està inclòs allà on la branca està definida, per tant el podem ignorar (per ara!). A la tecera branca el denominador s'anul·la a $x = 2$, que altre cop també està inclòs allà on la branca està definida.Per tant, el domini de la funció serà:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Pel que fa a la continuïtat, no només haurem d'estudiar els límits laterals en aquests punts sinó allà on les branques s'enganxen: $x = -1$ i $x = 1$. Comencem pels punts que no són del domini:

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \frac{-1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{x + 1}{2 - x} = \frac{3}{0^{\mp}} = \mp\infty.$$

Per tant, la funció és discontínua en $x = -2$ i $x = 2$, no hi té dues asímptotes verticals.
Mirem ara els punts on les branques s'enganxen.

$$\lim_{x \to -1^{-}} f(x) = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \to -1^{+}} f(x) = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{-2} = 0$$

Com els límits laterals existeixen però són diferents, la funció té una discontinuïtat de tipus salt en $x = -1$. Mirem l'altre punt:

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim_{x \to 1^{-}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0},$$

que és una indeterminació. Factoritzant trobem

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} = x + 1 \xrightarrow[x \to 1^{-}]{} 2.$$

Per la dreta trobem:

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{x + 1}{2 - x} = 2.$$

Com els límits laterals existeixen i són iguals a $f(2) = 2$, la funció també és contínua en $x = 2$.

Pel que fa a les asímptotes horitzontal i oblíqües, veiem que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-x} = -1,$$

i per tant la funció té una asímptota horitzontal per la dreta: $y = -1$. Per tant d'oblíqües per la dreta no en té. Veiem per l'esquerra:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{x+2} = -\infty.$$

Podria ser que tingúes una asímptota oblíqua $y = mx + n$ per l'esquerra. De fet és molt probable, perquè el numerador té un grau més que el donominador. Calculem m:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+3x+1}{x^2+2x} = 1.$$

Trobem ara n:

$$n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{x+2} - x = \infty - \infty.$$

Com és una indeterminació del tipus $\infty - \infty$, només cal que fem la resta:

$$\frac{x^2+3x+1}{x+2} - x = \frac{x^2+3x+1-x(x+2)}{x+2} = \frac{x+1}{x+2} = \longrightarrow \underset{\to}{-}\infty\ 1 = n.$$

Per tant, la funció té una asímptota oblíqua per l'esquerra: $y = x + 1$.

Exercici 44: Bolzano.

D'una funció sabem que

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 5$$

a) Raoneu què hauria de complir la funció f per tal de garantir que l'equació

$$f(x) = 3$$

té alguna solució entre $x = 1$ i $x = 2$.

b) Doneu un exemple de funció que compleixi les condicions de l'enunciat però que en canvi no valgui mai 3.

Exercici 45.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{9-x^2} & si\ x < 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Solució.

1. *Primer comprovem si la funció està definida en els canvis de branca. Ok*
2. *Trobem els punts on s'anul·len els denominadors de les branques:*
   - *1a branca:* $9 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 3$. *Només haurem de descartar* -3 *del domini, perquè* $x = 3$ *no compleix la condició* $x < 3$.
   - *2a branca:* $x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$. *L'haurem de descartar, perquè sí que compleix la condició* $x \geq 3$.

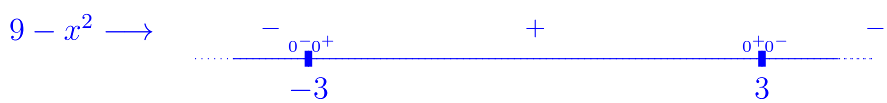
   Per tant:

   $$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

3. *Fem l'estudi local als punts que no són del domini:*
   - *En* $x = -3$. *Fem el límit:*

     $$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{3}{9 - x^2} = \frac{3}{0}$$

     Tindrem una discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$. *Cal fer els límits laterals per veure el comportament a prop de l'asímptota. Estudiem doncs el canvi de signe del denominador en* $x = -3$:

     Per tant:

     $$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$
     $$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

- *En $x = 3$. En aquest cas haurem de distingir entre dreta i esquerra, perquè a més a més tenim un canvi de branca en $x = 3$. Per tant*

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{0}{0} \ \textit{Indeterminació}$$

Com un dels dos límits laterals ha sortir ∞, ja podem dir que tenim una discontinuïtat asimptòtitca.
No obstant, per completar l'estudi, cal resoldre la indeterminació del límit per la dreta, factoritzant i simplificant:

$$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm 3 \Longrightarrow x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

Per tant tindrem:

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = x + 3 \ \textit{si}\ x \neq 3$$

i el límit quedarà:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x + 3 = 6$$

Exercici 46: Pg. 228 n^o 18.
Trobar el domini i estudiar la continuïtat de les funcions:

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{3x-15}{x^2-5x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2}{-x^2}$

Solució.

a) Clarament tenim:

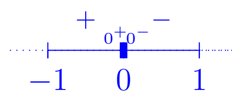
$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Per estudiar la continuïtat fem el límit:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{0}$$

La discontinuïtat serà asimptòtica, però per acabar l'estudi cal fer els límits laterals. Estudiem el canvi de signe del denominador. Com és una recta de pendent negatiu, el denominador passar de ser negatiu a positiu:

$-x \longrightarrow$



Per tant quedarà:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

b) El domini de la funció és

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$$

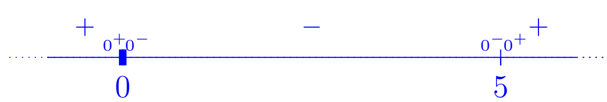
Estudiem el comportament local de la funció als dos punts que no són del domini:

- *En* $x = 0$. *Fent el límit*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-15}{0}$$

La funció tindrà un discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$. *Per acabar-ne l'estudi caldrà fer els límits laterals estudiant el canvi de signe del domininador:*

$x^2 - 5x \longrightarrow$



Per tant els límits laterals quedaran:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-15}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-15}{0^-} = +\infty$$

- *En* $x = 5$. *Comencem fent el límit:*

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \frac{0}{0} \text{ \textit{Indeterminació}}$$

Per resoldre la indeterminació, factoritzem numerador i denominador per tal de simplificar:

$$3x - 15 = 3\,(x-5)$$
$$x^2 - 5x = x(x-5)$$

Per tant, la funció es podrà simplificar:

$$\frac{3x-15}{x^2-5x} = \frac{3\cancel{(x-5)}}{x\cancel{(x-5)}} = \frac{3}{x} \text{ si } x \neq 5$$

Per tant, fent servir la versió simplificada, el límit quedarà:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{3}{x} = \frac{3}{5}$$

Per tant, la funció tindrà una discontinuïtat evitable en $x = 5$.

c) *A simple vista ja es veu que la funció es pot simplificar. No obstant, tal com està escrita, el seu domini és*

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Per tant, al funció no serà contínua en $x = 0$.
Si la simplifiquem, traient factor comú, la funció quedarà:

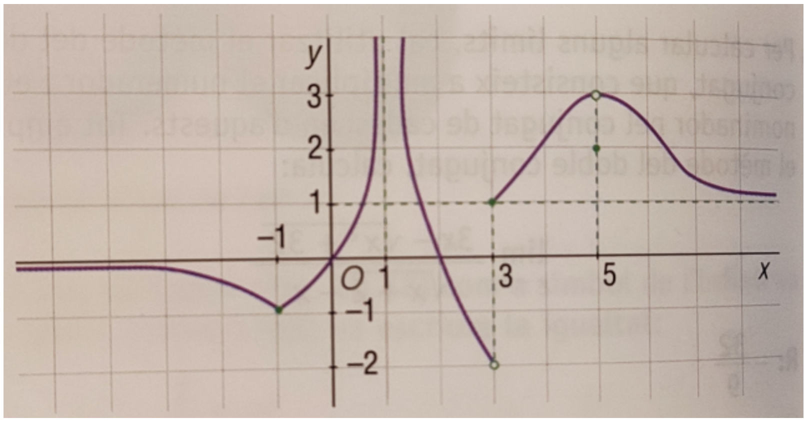
$$\frac{x^3+x^2}{-x^2} = \frac{\cancel{x^2}(x+1)}{-\cancel{x^2}} = \frac{x+1}{-1} = -x-1 \text{ si } x \neq 0$$

Així, estudiant el comportament local en $x = 0$, tindrem:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -x-1 = -1$$

Com el límit existeix (els laterals coincideixen), la discontinuïtat serà evitable.

Exercici 47: Pg. 228 n^{o}24.
Considereu la funció de la figura



a) Trobeu-ne el domini

b) Trobeu els límits quan x tendeix a $-\infty$, $+\infty$, ∞, -1^-, -1^+, -1, 1^+, 1^-, 1, 3^+, 3^-, 3, 5^-, 5^+ i 5.

c) Descriviu-ne les discontinuïtats, justificant la resposta.

Solució.

a) L'únic valor pel qual la funció no retorna cap valor és $x = 1$. Per tant:

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{1\}$$

b) Els límits quedaran:

$$\begin{array}{lll}
\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 & \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 & \lim_{x \to \infty} f(x) \nexists \\
\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1 & \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 & \lim_{x \to -1} f(x) = -1 \\
\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty & \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \\
\lim_{x \to 3^-} f(x) = -2 & \lim_{x \to 3^+} f(x) = 1 & \lim_{x \to 3} f(x) \nexists \\
\lim_{x \to 5^-} f(x) = 3 & \lim_{x \to 5^+} f(x) = 3 & \lim_{x \to 5} f(x) = 3
\end{array}$$

c) En vista dels resultats anteriors, podem concloure:

- *Com $f(-1^-) = f(-1^+) = f(-1) = -1$ la funció serà contínua en $x = -1$*
- *Com $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, la funció té una discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$.*

- *Com* $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$ *i tots dos existeixen (cap d'ells és* ∞*), la funció tindrà una discontinuïtat de salt en* $x = 3$.
- *Com* $f(5^-) = f(5^+) = 3 \neq f(5)$*, la funció té una discontinuïtat evitable en* $x = 5$.

Exercici 48.
Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} & si\ x < 1 \\ 4x + 5 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Exercici 49.
Escriviu en les vostres pròpies paraules el significat dels següents concepte. Digueu si alguns d'ells coincideixen sempre, quins coincideixen sota algunes condicions i què es pot dir de la funció f *en* $x = 1$ *en aquestes condicions:*

a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $f(1)$

c) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

e) $f(1^-)$

f) $f(1^+)$

Exercici 50.
Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ x \leq 4 \\ \dfrac{6}{x} & si\ x > 4 \end{cases}$$

Solució.
Pel que fa a la continuïtat, la primera branca no té cap problema (malgrat el seu domini no inclogui els nombres negatius), i la segona falla quan $x = 0$*, que està fora del seu domini de definició, ja que* $0 < 4$*. Per tant, només cal mirar els límits laterals allà on s'enganxen les dues branques:*

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Com els límits no coincideixen la funció no és contínua en $x = 4$*. La discontinuïtat serà del tipus salt, ja que tots dos límits laterals existeixen, però són diferents.*

Exercici 51.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ x \leq 4 \\ \dfrac{6}{x} + b & si\ x > 4 \end{cases}$$

en funció del paràmetre b.

Solució.

La funció no té cap problema fora del $x = 4$, que és on s'enganxen les branques. Fent els límits laterals trobem

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \frac{6}{4} + b = \frac{3}{2} + b.$$

Per tal que la funció sigui contínua, aquests dos límits han de coincidir:

$$2 = \frac{3}{2} + b,$$

d'on $b = \frac{1}{2}$. Fixem-nos que també tenim que els límits coincideixen amb la imatge de la funció en aquell punt, que ve donada per la primera branca $f(4) = 2$.

Exercici 52.

Estudieu la continuïtat de les següents funcions en els punts de canvi de branca

a)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x < 4 \\ \sqrt{x} & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}x - 4 & si\ x \neq 1 \\ 3 & si\ x = 1 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x < -1 \\ x^2 + 2 & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x \leq 1 \\ 1 & si\ 1 < x < 3 \\ x^2 - 7 & si\ 3 \leq x \end{cases}$$

Solució.
En tots els casos cal fer límits laterals i veure si coincideixen o no.

a)

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$$

Discontinuïtat de salt perquè els límits existeixen però són diferents.

b) Aquí cal fer servir que la funció "valor absolut" canvia el signe si $x < 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

I és una discontinuïtat de salt. Fixeu-vos que tant per la dreta com per l'esquerra del $x = 0$ s'entra per la primera branca. A més, fixeu-vos que que la funció estigui definida a part en el 0 és irrellevant.

c)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$$

Tots dos límits laterals coincideixen, però la funció és discontínua perquè el seu valor no coincideix amb el valor de la funció en $x = 1$, $f(1) = 3$. Per tant, té una discontinuïtat **evitable** *en $x = 1$.*

d)

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 3$$

La funció té una discontinuïtat de salt en $x = -1$.

e)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

La funció té una discontinuïtat de salt en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3^2 - 7 = 2$$

La funció té una discontinuïtat de salt en $x = 3$.

2.5 Asímptotes

Exercici 53.
Considereu les funcions següents

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} \qquad g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

a) Estudieu (fent els límits laterals, si cal) el comportament local de la funció als punts que no són del domini de les funcions

b) Feu els límits quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$.

c) Digueu quines són les asímptotes de les funcions, tant verticals com horitzontals (si en tenen)

Solució.

a) Els dominis són

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

- *El denominador de f passa de ser negatiu a positiu en $x = -3$, per tant*

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

La funció f presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$.

- *Com el numerador de g també s'anul·la en $x = 2$, factoritzem i simplifiquem abans de fer els límits*

$$g(x) = \frac{x\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{x(x-1)}{x-3}$$

Fixem-nos que la versió simplificada no presenta cap problema en $x = 2$, i el denominador passar de ser negatiu a positiu en $x = 3$. Per tant tindrem:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \frac{2(2-1)}{2-3} = -2$$
$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} g(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

La funció g tindrà una discontinuïtat evitable en $x = 2$, perquè

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^+} = -2$$

però en canvi $g(2)$ no existeix perquè $2 \notin D(g)$.
La funció g presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = 3$.

b) En fer el límits a l'infinit hem de mirar els graus. De la funció f són iguals, per tant els límits seran el quocient de coeficients. En canvi a la funció g el grau del numerador és més alt que el denominador, i per tant sortirà ∞. Però alerta en fer $x \to \infty$ perquè el numerador serà negatiu (grau senar) i el denominador positiu (grau parell).

Resumint, tindrem:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

c) Pel que fa a les asímptotes:

- *Verticals. Són de la forma $x = a$ i es produeixen ens discontinuïtats del tipus asimptòtic, que un denominador s'anul·la i el numerador no. Això ens passa en*

$$f : \longrightarrow x = -3$$
$$g : \longrightarrow x = 3$$

- *Pel que fa a les horitzontals, són de la forma $y = a$. Venen donades pel comportament a l'infinit i, per tant, poden ser per l'esquerra o per la dreta. La funció g no en té, perquè en fer $x \to \pm\infty$ la funció no està fitada. Però en canvi la funció f sí que en té:*

$$f : \longrightarrow y = 1 \text{ (per l'esquerra i per la dreta)}$$
$$g : \longrightarrow \text{ no en té}$$

2.6 Continuïtat amb paràmetres

Exercici 54.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + kx + 3}{x^2 - 3x + 2} & si\ x < 1 \\[2ex] \dfrac{2x + 3}{x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

on $k \in \mathbb{R}$ és paràmetre. Trobeu *a) El domini de f*

b) Els valors de k pels quals la funció té una discontinuïtat de salt

c) Els valors de k pels quals la funció té una discontinuïtat de asimptòtica

d) Existeix algun valor pel qual la funció sigui contínua?

e) Trobeu, si n'hi ha, totes les asímptotes, tant verticals com horitzontals.

Solució.

a)

- *El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = 1$ i $x = 2$, però tots dos valors entre per la segona branca.*
- *El denominador de la segona branca s'anul·la en $x = 0$, però per aquest valor s'entra per la primera branca.*
- *El canvi de branca, $x = 1$, està ben definit, ja que s'entra per la segona branca i allà no hi té cap problema.*

Per tant, el domini queda

$$D(f) = \mathbb{R}$$

b) Com el domini de la funció són tots el reals, l'única opció per tal de tenir una discontinuïtat és que aquesta es produeixi allà on es canvia de branca. Fem els límits laterals:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + kx + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1 + k + 3}{0^+} = \frac{k + 4}{0^+}$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 3}{x} = 5$$

Per tal que la funció tingui una discontinuïtat de salt, necessitem que el numerador del límit per l'esquerra s'anul·li en fer el límit, perquè en cas contrari el límit serà $+\infty$ o $-\infty$. Per tant, necessitem

$$k + 4 = 0 \Longrightarrow k = -4$$

Escollint $k = -4$, el límit per l'esquerra dóna una indeterminació, caldrà factoritzar i simplificar. Buscant les arrels del numerador obtenim:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$$

Per tant, en fer el límit per l'esquerra obtenim

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Per tant, recapitulant, si $k = -4$ ens queda

$$2 = \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$$

Per tant, si $k = -4$, la funció té una discontinuïtat de salt en $x = 1$.

c) *En cas que $k \neq -4$, en fer el límit $x \to 1^-$, el numerador no s'anul·la i, per tant, la funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica. Fixem-nos que segons si $k < -4$ o $k > -4$ el numerador tindrà diferent signe en $x = -1$. Per tant, els límits laterals donaran $+$ o $-\infty$ segons si $k < -4$ o $k > -4$.*

d) *La funció no és mai contínua, perquè l'única opció que tenim perquè no hi hagi una asímptota és que $k = -4$, però en aquest cas els límits laterals no coincideixen.*

e)

- *Si $k \neq -4$, hi ha asímptota vertical en $x = 1$.*
- *Pel que fa a les horitzontals, fem:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + kx + 3}{x^2 - 3x + 2} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{x} = 2$$

Per tant tenim dues asímptotes horitzontals:

$y = 1$	*per l'esquerra*
$y = 2$	*per la dreta*

Exercici 55.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+k}{x} & si\ x < -1 \\ 2x^2 - 3 & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) Trobeu-ne el domini

b) Trobeu, si existeix, el valor de k pel qual la funció és contínua en $x = -1$.

c) Pels valors de k pels quals la funció no és contínua en $x = -1$, digueu de quin tipus de discontinuïtat es tracta.

d) Feu els límits laterals en $x = 0$. Digueu si és contínua o no en $x = 0$, indicant de quin tipus de discontinuïtat es tracta en cas que no ho sigui.

e) Trobeu les asímptotes verticals i hortitzontals, si és que n'hi ha.

Solució.

a)

- *El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = 0$, però aquest valor entra per la segona branca.*
- *Al canvi de branca, $x = -1$, s'entra per la segona branca, i no hi té cap problema.*

Per tant:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

b) Fixem-nos que el fet que el domini siguin tots els nombres reals no implica que la funció sigui contínua, ja que aquesta podria fer un salt en $x = -1$ si les dues branques "no enganxen bé". Per tal que enganxin bé necessitem que els límits laterals valguin el mateix:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x+k}{x} = 1 - k$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2x^2 - 3 = -1$$

Per tant, f serà contínua si

$$1 - k = -1 \Longrightarrow k = 2$$

c) *En $x = 0$ la funció no presenta cap problema, ja s'entra per la segona branca, i obtenim*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2x^2 - 3 = -3$$

Com $x = 0$ és del domini i els límits laterals existeixen i donen el mateix que $f(0)$, la funció serà contínua en $x = 0$.

d) *La funció no té asímptotes verticals. Pel que fa a les horitzontals tenim*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+k}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x^2 - 3 = +\infty$$

Per tant, la funció tindrà una asímptota horitzontal per l'esquerra que serà la recta $\boxed{y = 1}$

2.7 Exponencials i logaritmes

Exercici 56.
Calculeu:

a) $\log_2 4 =$

b) $\log_3 9 =$

c) $\log_2 32 =$

d) $\log 1000 =$

e) $\log_7 \left(\sqrt{7}\right) =$

f) $\log_3 \sqrt[3]{81} =$

g) $\log_3 (\log_5 125) =$

Exercici 57.
Resoleu les equacions

a) $\log x + \log 20 = 3$

b) $\log(x+1) = \log(x-1) + 3$

c) $2\log x - \log(x+6) = 0$

d) $\log(x+1) - \log x = 1$

e) $2\log x - \log(x-6) = 0$