Capítol 2

Funcions

Continguts

2.1 Domini i nucli de funcions **33**

Exercici: 17 Pg. 181 n^o 5 33

Exercici: 18 Exercici proposat 34

Exercici: 19 Domini i nucli de les funcions suma, producte i quocient 35

Exercici: 20 Exercici proposat 40

Exercici: 21 43

2.2 Composició i inversa **44**

Exercici: 22 44

Exercici: 23 Pg. 187 n^o 12 46

Exercici: 24 Domini de la composició 49

Exercici: 25 Domini de la composició 51

2.3 Límits laterals **52**

Exercici: 26 Càlcul a partir de la gràfica 52

Exercici: 27 54

Exercici: 28 Exercici proposat 55

Exercici: 29 Exercici proposat 57

Exercici: 30 59

Exercici: 31 Domini i comportament local 60

Exercici: 32 Variant de Pg. 219 n^o 6 62

Exercici: 33 Pg. 219 n^o 7 64
Exercici: 34 Pg. 219 n^{o}8 64
Exercici: 35 66
Exercici: 36 Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$ 67
Exercici: 37 70
Exercici: 38 73
2.4 Continuïtat **75**
Exercici: 39 75
Exercici: 40 Pg. 222 n^o 11 77
Exercici: 41 Pg. 222 n^{o}12 79
Exercici: 42 Pàgina 227 n^o 14 80
Exercici: 43 Pàgina 228 n^o 19 80
Exercici: 44 Bolzano 82
Exercici: 45 83
Exercici: 46 Pg. 228 n^o 18 84
Exercici: 47 Pg. 228 n^{o}24 86
Exercici: 48 88
Exercici: 49 88
Exercici: 50 88
Exercici: 51 89
Exercici: 52 89
2.5 Asímptotes **91**
Exercici: 53 91
2.6 Continuïtat amb paràmetres **93**
Exercici: 54 93
Exercici: 55 96
2.7 Exponencials i logaritmes **97**
Exercici: 56 97
Exercici: 57 97
Exercici: 58 Pg. 249 n^o 4 98

2.1 Domini i nucli de funcions

Exercici 17: Pg. 181 n^o 5.

Calculeu el domini de les funcions

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-6x+5}$

b) $g(x) = \sqrt{4+3x}$

c) $h(x) = \dfrac{7x+8}{x^2+5}$

d) $k(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}x+5}$

e) $p(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 - 5x + 2$

f) $t(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x} & si\ x \leq 2 \\ \dfrac{2x}{x-3} & si\ x > 2 \end{cases}$

Solució.

a) Només cal treure els punts on el denominador s'anul·la:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \longrightarrow x = 5 \ i \ x = 1$$

Per tant

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{1, 5\}$$

b) El radicand ha de ser positiu, per tant

$$4 + 3x > 0 \Longrightarrow x > -\frac{4}{3}$$

El domini quedarà

$$D(g) = \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$$

c) Si busquem els zeros del denominador veurem que no en té (de reals). Per tant el domini d'h són tots els reals:

$$D(h) = \mathbb{R}$$

d) Com es tracta d'una arrel d'índex senar (cúbica) no hi ha cap problema si el radicand és negatiu. Per tant

$$D(k) = \mathbb{R}$$

e) La funció e és un polinomi, que tenen com a domini tots els reals

$$D(e) = \mathbb{R}$$

f) Es tracta d'una funció definida a trossos. Haurem d'estudiar el domini de cadascuna de les branques per separat i després mirar quins valors del domini compleixen la condició per entrar per aquella branca.
La primera branca té com a domini tots els nombres reals menys el 0*, perquè és on s'anul·la el dominador. Com* $0 \leq 2$ *compleix la condició, l'haurem de treure. Per tant, per ara tenim que el domini de la funció és* $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$*.*
La segona branca té per domini tots els nombres reals menys $x = 3$*, que és on s'anul·la el denominador. Com* $3 \geq 2$ *compleix la condició, també l'haurem de treure. Per tant, el domini de la segona branca serà* $(2, 3) \cup (3, \infty$*.*
Si ajuntem tots dos dominis tindrem

$$D(t) = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty).$$

Altrament, com només hem de treure els valors $x = 0$ *i* $x = 3$*, podríem escriure el domini com*

$$D(t) = \mathbb{R} \backslash \{0, 3\},$$

que són exactament iguals.

Exercici 18: Exercici proposat.
Trobeu el domini de la funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \leq 0 \\[2ex] \sqrt{x^2-4} & \text{si } 0 < x < 4 \\[2ex] \dfrac{x-3}{x^2-16} & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Solució.
Comencem estudiant la primera branca. El denominador s'anul·la quan $x^2 - 1 = 0$ *d'on* $x = 1$ *o* $x = -1$*. Ara bé, com a la primera branca només hi entrem si* $x \leq 0$*, aleshores només caldrà treure el* $x = -1$*, ja que si* $x = 1$ *entrem per la segona.*
Pel que fa a la segona branca, hem de treure tots aquells valor pels quals el radicand sigui negatiu. Busquem quan val 0: $x^2 - 4 = 0$ *si* $x = -2$ *o* $x = 2$*. Com la*

funció $x^2 - 4$ és una paràbola convexa (mira amunt) perquè el coeficient de grau 2 és positiu, haurem de treure l'interval central, és a dir, l'interval $(-2, 2)$. Ara bé, com a la segona branca hi entre només si $0 < x < 4$, és a dir, si $x \in (0, 4)$, fent la intersecció d'aquests interval tindrem els punts que haurem de treure, que són

$$(-2, 2) \cap (0, 4) = (0, 2).$$

Per tant, fins ara haurem de treure el valor $x = -1$ i l'interval $(0, 2)$.
Vegem ara la tercera branca. Mirem quan s'anul·la el denominador:

$$x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow x = -4 \text{ o } x = 4.$$

Com a la tercera branca hi entrem només si $4 \leq x$, només haurem de treure el 4, perquè -4 no està inclòs.
Resumint, hem de treure $x = -1$ de la primera, l'interval $(0, 2)$ de la segona i el punt $x = 4$ de la tercera. Per tant, el domini serà

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup [2, 4) \cup (4, \infty).$$

Exercici 19: Domini i nucli de les funcions suma, producte i quocient.
Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

a) *Trobeu $D(f)$, $D(g)$, $Nuc(f)$ i $Nuc(g)$. Recordeu que el nucli d'una funció són els valors pels quals aquesta val 0.*

b) *Trobeu $D(1/g)$, $D(1/f)$, $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ calculant les expressions explícitament.*

c) *Trobeu $D(1/g)$, $D(1/f)$, $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ fent servir només els resultats de l'apartat a).*

d) *Quines diferències trobeu?*

Solució.

a) *Com les dues funcions només tenen denominadors presentaran problemes quan aquests s'anul·lin, cosa que passa quan $x^2 - 1 = 0$ (per f) i $x + 1 = 0$ (per g). Per tant tenim*

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Pel que fa al nucli de les funcions, només cal que miram quan valen 0:

$$f(x) = 0 \longrightarrow \frac{x+2}{x^2-1} = 0 \longrightarrow x+2 = 0 \longrightarrow x = -2$$

Fixem-nos que hem de comprovar que $x = -2$ sigui del domini, és a dir, que el denominador no s'anul·li per $x = -2$ cosa, que no passa. Dit d'una altra manera, el segon pas només el podem fer si $x^2 - 1$ no és zero, cosa que només passa quan $x = -2$. Per tant,

$$Nuc(f) = \{-2\} .$$

Pel que fa a g:

$$g(x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{x+1} = 0 \longrightarrow 1 = 0$$

i per tant la funció g mai val zero:

$$Nuc(g) = \emptyset$$

b) Trobem les expressions de les funcions que ens denamen:

$$(1/g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{1} : \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{1} = x+1$$
$$(1/f)(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x+2}$$

En principi, d'aquestes expressions deduiríem que $D(1/g) = \mathbb{R}$ i $D(1/f) = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, però, com veurem al proper apartat, això no és correcte!
Per tal de calcular $f+g$ haurem de buscar un denominador comú. Factoritzem els denominadors trobant-ne les arrels:

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm 1$$

i per tant tenim que

$$x^2 - 1 = (x+1)\cdot(x-1)$$

Com $x+1$ és irreductible, ja està factoritzat. Ara sumem $f+g$:

$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{(x+1)\cdot(x-1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{(x+1)\cdot(x-1)} + \frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}$$
$$= \frac{x+2+x-1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{2x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

Per tant, d'aquesta expressió treuríem que

$$D(f+g) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Calculem ara el quocient de les funcions:

$$(f/g)(x) = \frac{\frac{x+2}{x^2-1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{(x+2)\cdot(x+1)}{(x^2-1)\cdot 1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1}$$
$$(g/f)(x) = \frac{1}{(f/g)(x)} = \frac{x^2-1}{(x+2)(x+1)}$$

Tal com estan escrites, els dominis són

$$D(f/g) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$
$$D(g/f) = \mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$$

Ara bé, què hagués passat si fem servir la factorització per simplificar aquestes expressions?

$$(f/g)(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1} = \frac{(x+2)\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$
$$(g/f)(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

I per tant ara obtenim que

$$D(f/g) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$
$$D(g/f) = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$$

i els dominis que han sortit són diferents dels d'abans. Quina és la versió correcta? Doncs com veurem al proper apartat, cap de les dues!

c) *Calculem ara els mateixos dominis que abans però sense calcular les funcions. La funció* $(1/g)(x)$ *la podem escriure com*

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$$

Per tant, la imatge de qualsevol valor per la funció $1/g$*, per exemple en* $x=a$ *es troba fent:*

$$(1/g)(a) = \frac{1}{g(a)}$$

Vist així, la funció $(1/g)$ *presenta dos possibles problemes:*

1 Hem de poder calcular $g(a)$

2 El valor de $g(a)$ *no pot ser* 0

- *Per tant, el domini de la funció* $(1/g)$ *serà el resultat de treure al domini de* g *el seu nucli:*
  $$D(1/g) = D(g) \backslash Nuc(g)$$
  Com el nucli de g *és buit, tindrem*
  $$D(1/g) = D(g) = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$$
  Fixem-nos que això no coincideix amb el que havíem obtingut a l'apartat anterior calculant l'expressió exacta!

- *Fem ara el mateix amb* $(1/f)$*:*
  $$D(1/f) = D(f) \backslash Nuc(f) = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1, -2\}$$
  que tampoc coincideix amb el resultat de l'apartat anterior!

- *Vegem ara la suma* $f + g$*. Per avaluar la funció suma*
  $$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$
  necessitarem poder calcular tant $f(a)$ *com* $g(a)$ *i, per tant, el domini serà el de* f *intersecat amb el de* g*:*
  $$D(f + g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$$

- *Fem ara els quocients de les funcions. Raonant com abans ens trobem que per tal de calcular* $(f/g)(a)$ *hem de fer*
  $$(f/g)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$$
  Per tant ens trobem amb dos possibles problemes
  - *D'una banda hem de poder calcular* $f(a)$ *i* $g(a)$
  - *de l'altra hem d'evitar que* $g(a)$ *valgui* 0

  Per tant, per trobar el domini de f/g *haurem de treure tots els punts que*

- *No siguin del domini de f: els valors $\{-1,1\}$*
- *No siguin del domini de g: $\{-1\}$*
- *Siguin del nucli de g (perquè g està al denominador): cap, perquè $Nuc(g) = \emptyset$*

Per tant, ens quedarà

$$D(f/g) = \mathbb{R}\setminus \left(\underbrace{\{-1,1\}}_{\text{No són de } D(f)} \cup \overbrace{\{-1\}}^{\text{No són de } D(g)} \cup \underbrace{\emptyset}_{Nuc(g)} \right) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Això també ho podem escriure de la següent manera:

$$D(f/g) = \mathbb{R}\setminus\left\{\text{Punts que } \textbf{no} \text{ són de } D(f) \textbf{ o } \text{de } D(g) \textbf{ o } \text{de } Nuc(g)\right\}$$
$$= \underbrace{D(f)\cap D(g)}_{\text{Punts del domini de } f \textbf{ i } \text{de } g} \overbrace{\setminus Nuc(g)}^{\text{Traiem els punts on } g \text{ val } 0}$$

- *Fem el mateix amb g/f, la funció seria la següent:*

$$(g/f)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

per tant hem de **treure** *els punts que*

- **no** *siguin del domini de f: $\{-1,1\}$*
- **no** *siguin del domini de g: $\{-1\}$*
- *siguin del nucli d'f: $Nuc(f) = \{-2\}$*

Per tant ens quedarà:

$$D(g/f) = \mathbb{R}\setminus \left(\underbrace{\{-1,1\}}_{\text{No són de } D(f)} \cup \overbrace{\{-1\}}^{\text{No són de } D(g)} \cup \underbrace{\{-2\}}_{Nuc(f)} \right) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1,-2\}$$

Això també ho podríem escriure com

$$D(g/f) = \mathbb{R}\setminus\left\{\text{Punts que } \textbf{no} \text{ són de } D(f) \textbf{ o } \text{de } D(g) \textbf{ o } \text{de } Nuc(f)\right\}$$
$$= \underbrace{D(f)\cap D(g)}_{\text{Punts del domini de } f \textbf{ i } \text{de } g} \overbrace{\setminus Nuc(f)}^{\text{Traiem els punts on } f \text{ val } 0}$$

d) Com hem comentat, els dominis trobats d'una manera i de l'altra no coincideixen. El problema està que, en operar es fan simplificacions que no es poden fer sempre. per exemple, podem dir que

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x?$$

Doncs no sempre, perquè a l'expressió de l'esquerra x no pot ser 0, però a la de la dreta sí. De la mateixa manera, podríem afirmar que

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1?$$

Doncs tampoc, perquè a l'expressió de l'esquerra x tampoc pot ser 0 però en canvi a la dreta x ja no hi apareix.
Resumint, sempre que simplifiquem o canviem de lloc un denominador, ho podrem fer sempre que aquest no sigui 0.

Exercici 20: Exercici proposat.
Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2} \quad g(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

Repetiu l'exercici 19 amb les funcions $f+g$, f/g i g/f. És a dir, calculeu $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ i compareu-lo amb els dominis que s'obtenen després d'operar i simplificar les expressions $f+g$, f/g i g/f.
Nota: aneu amb compte en calcular $Nuc(g)$.

Solució.
Calculem el domini de les funcions de dues maneres: primer de la manera incorrecte (operant i simplificant) i després de la manera correcta (fent servir els dominis de f i g i els seus nuclis).

- *Trobem primer explícitament la funció suma $f+g$. Per tal de sumar les dues fraccions algebraiques haurem de factoritzar els denominadors i fer el mínim comú múltiple. Trobem les arrels dels denominadors:*

$$x^2+3x+2=0 \longrightarrow x=-2 \ i \ x=-1$$
$$x^2+x-2=0 \longrightarrow x=-2 \ i \ x=1$$

Per tant els denominadors factoritzats seran

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2) \cdot (x+1)$$
$$x^2 + x - 2 = (x+2) \cdot (x-1)$$

i el mínim comú múltiple serà $(x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$.
Ara sumem les dues funcions

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \frac{x-1}{(x+2)\cdot(x+1)} + \frac{x+2}{(x+2)\cdot(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)(x-1)}{(x+2)(x+1)(x-1)} + \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x-1)(x-1)+(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

El denominador s'anul·la en $x = -2$, $x = -1$ *i* $x = 1$ *(que són els mateixos valors on s'anul·laven els denominadors de* f *i* g*). Per tant, després d'haver operat, el domini ens sortirà*

$$D(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

Fixem-nos que podríem haver simplificat $x+2$ *a la funció* g*, però haguéssim hagut de tornar a incloure aquest factor per tal de fer el m.c.m dels denominadors.*

- *Obtenim ara l'expressió explícita per la funció* f/g*:*

$$\begin{aligned}(f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-1}{(x+2)(x+1)}}{\frac{\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}} \\ &= \frac{(x-1)(x-1)}{(x+2)(x+1)}\end{aligned}$$

Com el denominador s'anul·la en $x = -2$ *i* $x = -1$*, el domini que ens hagués sortit per aquesta via seria*

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

que NO és correcte.

- *Per trobar el domini de la funció g/f calculant-la explícitament podem fer l'invers de l'expressió anterior:*

$$(g/f)(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-1)}$$

Com el denominador s'anul·la en $x = 1$ (dues vegades!), el domini trobat per aquesta via seria

$$D(g/f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

la qual cosa TAMPOC és correcte!

Trobem ara els dominis de la forma correcte: sense operar ni simplificar, a partir de dels dominis de les funcions i dels seus nuclis. Trobem-los primer. D'una banda tenim

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$
$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

que és on s'anul·len els denominadors. Trobem ara els nuclis igualant els numeradors a 0:

$$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$$
$$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$$

Però alerta! Resulta que $x = 2$ NO és del domini de g! Per tant, en $x = 2$ la funció no val 0 perquè simplement $g(2)$ no existeix! Per tant tenim,

$$Nuc(f) = \{1\}$$
$$Nuc(g) = \emptyset$$

Fixem-nos que de l'anterior reflexio podem deduïr que sempre tindrem

$$Nuc(f) \subset D(f)$$

és a dir, el nucli està contingut en el domini.
Trobem ara els dominis que ens denamen.

- *Per fer la funció suma necessitem avaluar les dues funcions. Per tant, un punt serà del domini de $(f+g)$ si és del domini de f* **i** *del domini de g. Per tant,*

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

- *Trobem ara el domini de f/g. D'una banda necessitem avaluar les dues funcions, però de l'altra, haurem de treure els punts on g valgui 0. Però com $Nuc(g) = \emptyset$, tindrem*

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \backslash Nuc(g) = \mathbb{R} \backslash \{-2, -1, 1\}$$

Fixem-nos que el punt on ens havia sortir que el numerador de g s'anul·lava ($x = -2$) està tret igualment del domini perquè el denominador de g també s'anul·lava.

- *Finalment, veiem ara g/f. Si fem el mateix tindrem:*

$$D(g/f) = D(f) \cap D(g) \backslash Nuc(f) = \mathbb{R} \backslash \{-2, -1, 1\}$$

Resulta que el nucli de f ja estava tret perquè $x = 1$ no era del domini de g

Exercici 21.
Considereu les funcions:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - 3x}$$

Trobeu: $D(f)$, $D(g)$, $Nuc(f)$, $Nuc(g)$, $D(f \cdot g)$, $D(f + g)$, $D(f/g)$, $D(g/f)$ *i* $Nuc(f \cdot g)$.

Solució.
Trobem el domini de f i de g mirant per quins valors d'x s'anul·len els denominadors:

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Per resoldre l'equació

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

traiem factor comú:

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

d'on les solucions seran

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = 3 \end{array}$$

Per tant, els dominis seran:

$$\begin{array}{l} D(f) = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} \\ D(g) = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 3\} \end{array}$$

Mirem ara els nuclis. Per tal que $f(x)=0$ necessitem que el seu numerador sigui 0:

$$x^2+3x+2=0 \Longrightarrow x=-1,\ x=-2$$

Però alerta!!! El valor $x=-1$ no és del domini de f i, per tant, no el podem posar! Així, el nucli serà:

$$Nuc(f)=\{-2\}$$

Pel que fa al nucli de g mirem quan el seu numerador val 0:

$$x^2-4=0 \Longrightarrow x=\pm 2$$

En aquest cas tots dos valors són del domini de g i, per tant, formen el seu nucli. Resumint tindrem:

$$Nuc(f)=\{-2\}$$
$$Nuc(g)=\{-2,2\}$$

Trobem ara tot el que ens demanen:

- $D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,3\}$
- $D(f+g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,3\}$
- $D(f/g)=D(f)\cap D(g)\setminus Nuc(g)=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,3,-2,2\}$
- $D(g/f)=D(f)\cap D(g)\setminus Nuc(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,3,-2\}$
- $Nuc(f\cdot g)=\Big(Nuc(f)\cap D(g)\Big)\cup\Big(Nuc(g)\cap D(f)\Big)=\{-2,2\}$

2.2 Composició i inversa

Exercici 22.
Trobeu la inversa de la funció

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+4}$$

i comproveu el resultat.

Solució.
La inversa la trobarem aïllant x de l'equació:

$$f(x) = y$$

$$\frac{2x+1}{x+4} = y \to 2x+1 = y(x+4) \to 2x+1 = yx+4y$$
$$2x - yx = 4y - 1 \to x(2-y) = 4y-1 \to x = \frac{4y-1}{2-y}$$

Així la inversa és la funció

$$f^{-1}(y) = \frac{4y-1}{2-y}$$

o si la volem escriure com a funció de x:

$$f^{-1}(x) = \frac{4x-1}{2-x}$$

Per comprovar el resultat hem de verificar que:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = Id(x)$$
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = Id(x)$$

Fem-ho:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{2f^{-1}(x)+1}{f^{-1}(x)+4} =$$
$$= \frac{2 \cdot \frac{4x-1}{2-x} + 1}{\frac{4x-1}{2-x} + 4} = \frac{\frac{2(4x-1)+(2-x)}{\cancel{2-x}}}{\frac{4x-1+4(2-x)}{\cancel{2-x}}} =$$
$$= \frac{8x-2+2-x}{4x-1+8-4x} = \frac{7x}{7} = x \checkmark$$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = \frac{4f(x)-1}{2-f(x)} =$$
$$= \frac{4\frac{2x+1}{x+4} - 1}{2 - \frac{2x+1}{x+4}} = \frac{\frac{4(2x+1)-(x+4)}{\cancel{x+4}}}{\frac{2(x+4)-(2x+1)}{\cancel{x+4}}} =$$
$$= \frac{8x+4-x-4}{2x+8-2x-1} = \frac{7x}{7} = x \checkmark$$

Exercici 23: Pg. 187 n^o 12.
Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x+4}{x+2} \quad g(x) = \frac{3x}{x+1}$$

a) Determineu l'expressió algebraica i el domini de $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1}

b) Comproveu que les funcions f^{-1} i g^{-1} són les inverses de f i g respectivament.

Solució.
Fixem-nos primer que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

a) Hem de tenir en compte que, en operar i trobar les expressions de les composicions en podem trobar que els dominis canviïn. Per tant, trobarem primer les expressions i després els dominis per separat, de la manera correcta com s'ha vist als exercicis 19 i 20.

- *$g \circ f$:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+4}{x+2}\right) = \frac{3\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}+1}$$
$$= \frac{3\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}+\frac{x+2}{x+2}} = \frac{3\frac{x+4}{\cancel{x+2}}}{\frac{2x+6}{\cancel{x+2}}} = \frac{3(x+4)}{2x+6}$$

El domini $D(g \circ f)$ serà el domini $D(f)$ traient els valors que facin que

$$f(x) = -1 \Longrightarrow \frac{x+4}{x+2} = -1$$
$$x+4 = -(x+2) \Longrightarrow \boxed{x=-3}$$

Per tant

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$$

Fixem-nos que $x = -3$ és el valor que anul·la del denominador que havíem trobat, però en canvi el problema en $x = -2$ desapareix de l'expressió en simplificar.

- *$f \circ g$:*

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(\frac{3x}{x+1}\right) \\
&= \frac{\frac{3x}{x+1} + 4}{\frac{3x}{x+1} + 2} = \frac{\frac{3x}{x+1} + \frac{4(x+1)}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x+1}} \\
&= \frac{\frac{7x+4}{\cancel{x+1}}}{\frac{5x+2}{\cancel{x+1}}} = \frac{7x+4}{5x+2}
\end{aligned}
$$

Per veure el domini resolem

$$g(x) = -2 \Longrightarrow \frac{3x}{x+1} = -2$$

$$3x = -2(x+1) \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{5}}$$

Per tant

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{2}{5}\right\}$$

Fixem-nos que $-\frac{2}{5}$ coincideix amb el valor on s'anul·la en denominador de l'expressió que hem trobat, però que en canvi $x = -1$ havia desaparegut en simplificar.

- *$f \circ f$:*

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(\frac{x+4}{x+2}\right) \\
&= \frac{\frac{x+4}{x+2} + 4}{\frac{x+4}{x+2} + 2} = \frac{\frac{x+4}{x+2} + \frac{4(x+2)}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} + \frac{2(x+2)}{x+2}} = \frac{\frac{5x+12}{\cancel{x+2}}}{\frac{3x+8}{\cancel{x+2}}} \\
&= \frac{5x+12}{3x+8}
\end{aligned}
$$

Per trobar el domini haurem de resoldre

$$f(x) = -2 \Longrightarrow \frac{x+4}{x+2} = -2$$

$$x+4 = -2(x+2) \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{8}{3}}$$

Per tant

$$D(f \circ f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{8}{3}\right\}$$

- *$g \circ g$:*

$$
\begin{aligned}
(g \circ g)(x) = g\left(g\left(x\right)\right) = g\left(\frac{3x}{x+1}\right) &= \frac{3\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1}+1} \\
&= \frac{\frac{9x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}} = \frac{\frac{9x}{\cancel{x+1}}}{\frac{4x+1}{\cancel{x+1}}} \\
&= \frac{9x}{4x+1}
\end{aligned}
$$

Per trobar el domini mirem per quin valor g val -1:

$$
\begin{aligned}
g(x) = -1 \Longrightarrow \frac{3x}{x+1} &= -1 \\
3x = -(x+1) &\Longrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

i per tant

$$D(g \circ g) = \mathbb{R}\backslash \left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}$$

Fixem-nos que, altre cop, $x = -\frac{1}{4}$ coincideix amb el valor que fa que el denominador de l'expressió que hem trobat s'anul·li, però en canvi $x = -1$ havia desaparegut en simplificar.

- *Trobem ara l'expressió i el domini de $f^{-1}(y)$. Per fer-ho hem d'aïllar x de l'expressió*

$$
\begin{aligned}
y = \frac{x+4}{x+2} &\Longrightarrow y(x+2) - x - 4 = 0 \\
x(y-1) + 2y - 4 = 0 &\Longrightarrow x = \frac{4-2y}{y-1}
\end{aligned}
$$

i per tant

$$f^{-1}(y) = \frac{4-2y}{y-1}$$

Mirant l'expressió que hem trobat, el domini de f^{-1} és

$$D\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}\backslash \left\{1\right\}$$

Fixem-nos que això vol dir que el valor $y = 1$ no té antiimatge. Ho podem comprovar preguntant-nos per quin valor de x la funció f val 1, i no *n'hauríem de trobar cap:*

$$f(x)=1\Longrightarrow\frac{x+4}{x+2}=1\Longrightarrow\cancel{x}+4=\cancel{x}+2$$
$$\Longleftrightarrow 4=2??$$

i per tant no trobem solució.

- *Fem el mateix amb g^{-1}, aïllem x de l'expressió*

$$y=\frac{3x}{x+1}\Longrightarrow y(x+1)-3x=0$$
$$x\left(y-3\right)+y=0\Longrightarrow x=-\frac{y}{y-3}$$

d'on

$$D\left(g^{-1}\right)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

Altre cop, si ens preguntem quina és l'antiiatge de $y=3$ ens trobarem en què no hi ha cap valor.

b) *Comprovem ara que les expressions que hem trobat de f^{-1} i g^{-1} són realment les inverses:*

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)=\frac{4-2\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}-1}$$
$$=\frac{\frac{4(x+2)}{x+2}-2\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}}=\frac{\frac{2x}{\cancel{x+2}}}{\frac{2}{\cancel{x+2}}}$$
$$=\frac{2x}{2}=x$$
$$g^{-1}\left(g(x)\right)=g^{-1}\left(\frac{3x}{x+1}\right)=-\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1}-3}$$
$$=-\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1}-\frac{3(x+1)}{x+1}}=-\frac{\frac{3x}{\cancel{x+1}}}{\frac{-3}{\cancel{x+1}}}=-\frac{3x}{-3}=x$$

Com en composar-les obtenim la identitat, les funcions són inverses una de l'altra.

Exercici 24: Domini de la composició.

Considereu les funcions

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3-8}\qquad g(x)=\frac{x^2+7x+6}{x}$$

Trobeu $D(f\circ g)$ i $D(g\circ f)$.

Solució.

Estudiem primer el domini de cadascuna d'elles per separat. Com són funcions racionals, només caldrà mirar on s'anul·len els denominadors:

$$x^3 - 8 = 0 \longrightarrow x^3 = 8 \longrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$
$$x = 0$$

Per tant tenim

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Això el que ens està dient és que a la funció f no li podem entrar el valor 2, ni a la g el valor 0.

Ens preguntem ara com calculem la imatge de la funció $(f \circ g)(x)$. Primer hem de fer g i després, el que ens doni, ho posem a f. Per tant, hem de vigilar dues coses:

1. *Hem de poder avaluar la funció g. Per tant, $D(f \circ g) \subset D(g)$*
2. *El resultat d'avaluar g no pot ser un valor fora del domini de f*

Com $f(x)$ té problemes en $x = 2$, mirem per quin valor de x la funció g ens dóna 2:

$$g(x) = 2 \longrightarrow \frac{x^2 + 7x + 6}{x} = 2 \longrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

d'on $x = -3$ i $x = -2$. Per tant, com $g(-3) = g(-2) = 2$, resulta que aquests dos valors no seran del domini de $f \circ g$. Fixem-nos que si intentem avaluar $f \circ g$ obtindrem

$$f\big(g(-3)\big) = f(2) \nexists$$
$$f\big(g(-2)\big) = f(2) \nexists$$

Per tant el domini serà

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0, -2, -3\}$$

Si fem el mateix amb $g \circ f$, haurem de veure per quins valors de x la funció $f(x)$ val 0, que és el valor que no podem entrar a la funció g:

$$f(x) = 0 \longrightarrow x = -2 \text{ i } x = 1$$

Per tant, si a més tenim en compte que el valor $x = 2$ no el podem entrar a la funció f, tindrem

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$$

Exercici 25: Domini de la composició.

Donades les funcions

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \qquad g(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2}$$

trobeu

a) $D(f)$ *i* $D(g)$

b) $D(f \circ g)$ *i* $D(g \circ f)$

Solució.

a) Resolent les equacions

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Longrightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

trobem

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$
$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b)

- $D(f \circ g)$*: El domini de* $f \circ g$ *serà el domini de* g *excepte els valors de* x *que facin que* $g(x) = 1$ *o* $g(x) = -1$*, que són els dos únics valors que no són del domini de* f*. Per tant resolem les equacions*

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\to \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2} = 1 \\ &\to x^2 + 3x + 4 = x^2 \to 3x + 4 = 0 \\ &\to x = -\frac{4}{3} \\ g(x) = -1 &\to x^2 - 3x + 4 = -x^2 \to 2x^2 - 3x + 4 = 0 \\ &\to x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Per tant,

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \backslash \left\{0, -\frac{4}{3}\right\}$$
$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1, -2, 2\}$$

Mirem quan f val 0:

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0 \Longrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

2.3 Límits laterals

Exercici 26: Càlcul a partir de la gràfica.
Considereu la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & si\ x < -1 \\ -2x^2 + 4 & si\ -1 \leq x < 0 \\ 2x + 4 & si\ 0 \leq x \end{cases}$$

a) Feu-ne la gràfica

b) A partir de la gràfica trobeu els següents límits: $\lim_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ *i* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

Solució.

a) Per fer-ne la gràfica bàsicament hem de fer les gràfiques de les tres funcions però quedar-nos només en el tros on estan definides a cada branca.

- *La primera branca és una paràbola que és convexa (mira amunt), en calculem el vèrtex i els punts de tall ($x_v = -\frac{b}{2a}$):*

$$x_v = -\frac{-2}{2} = 1 \Longrightarrow y_v = 1 - 2 + 3 = 2$$

i el vèrtex serà el punt $(1, 2)$. Fixem-nos que aquest punt no apareixerà a la gràfica, perquè no compleix que $x_v < -1$.
El punt de tall amb l'eix Y serà $(0, 3)$, però tampoc apaereixerà a la gràfica

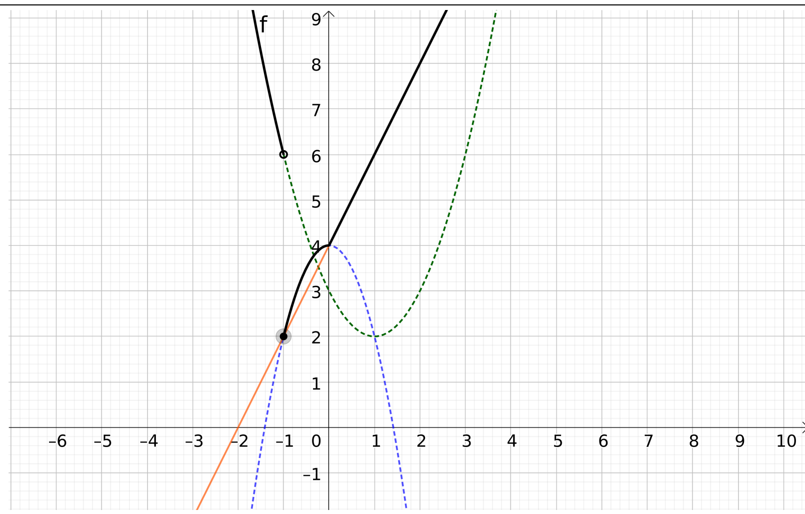


Figura 2.1: Funció a trossos

perquè no compleix que $0 < -1$.
Els punts de tall amb l'eix X *els trobarem resolent l'equació*

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

i per tant no tallarà l'eix X.
Ens serà útil saber quant val la funció $x^2 - 2x + 3$ *allà on canviem de branca:* $1 + 2 + 3 = 6$ *i passarà pel punt* $(-1, 6)$.

- *Fem el mateix amb la segona. La funció* $-2x^2 + 4$ *és una paràbola còncava, que és simètrica respecte l'eix* Y *(perquè* $b = 0$*). El seu vèrtex és el punt* $(0, 4)$ *(que també és el punt de tall amb l'eix* Y*), i els punts de tall amb l'eix* X *seran* $(\sqrt{2}, 0)$ *i* $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$.

- *Finalment, la tercera funció és una recta, que té pendent positiu* (2) *i passa pel punt* $(0, 4)$.

La gràfica de les tres funcions és la de la figura *b) Gràficament veiem que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} x^2-2x+3 = 6\\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} -2x^2+4 = 2\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} -2x^2+4 = 4\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} 2x+4 = 4\\
\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} x^2-2x+3 = 11\\
\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} x^2-2x+3 = 11\\
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} 2x+4 = 8\\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} 2x+4 = 8
\end{aligned}$$

Exercici 27.
Calculeu els següents límits laterals

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{(x-2)^2} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

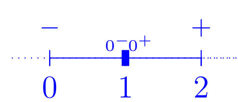
Solució.

a) Si substituim per $x=1$ ens trobem amb

$$\frac{-1}{0}$$

Per tant, els límits laterals donaran $\pm\infty$, només caldrà mirar el signe del denominador segons si ens apropem a 1 per l'esquerra o per la dreta. Com el denominador val 0 només quan $x=1$, mirem el seu signe valuant a esquerra i dreta de $x=1$, i trobem:

$x-1 \longrightarrow$



Per tant tindrem

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

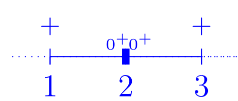
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

b) Fem el mateix. Subsituim primer per $x = 2$ per veure què passa, i obtenim

$$\frac{5}{0}$$

Per tant, els límits laterals seran $\pm\infty$, caldrà mirar el signe del denominador a prop de $x = 2$. Estudiem el signe del denominador avaluant a dreta i esquerra d'allà on val 0.

$(x-2)^2 \longrightarrow$



Per tant tindrem:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Exercici 28: Exercici proposat.

De les funcions següents, calculeu-ne el domini i feu els límits laterals als punts on tinguin problemes

$$f(x) = \frac{x+2}{x-4} \qquad g(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

$$h(x) = \frac{3x}{x^2+2x-8} \qquad k(x) = \frac{2x-5}{x^2-2x+1}$$

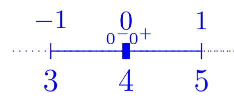
Solució.

Pel que fa als dominis tenim

$$\begin{array}{ll} D(f)=\mathbb{R}\setminus\{4\} & D(g)=\mathbb{R}\setminus\{-3\} \\ D(h)=\mathbb{R}\setminus\{-4,2\} & D(k)=\mathbb{R}\setminus\{1\} \end{array}$$

Per mirar els límits laterals als llocs on els denominadors s'anul·len, mirem el signe d'aquests a cada banda

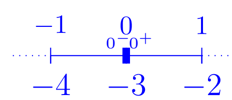
- *Pel denominador de $f(x)$:*

  $x-4 \longrightarrow$ 

  Per tant

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\frac{6}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

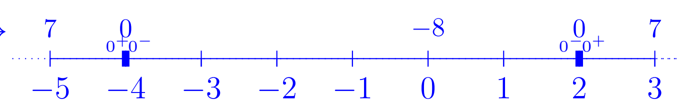
- *Pel denominador de $g(x)$:*

  $x+3 \longrightarrow$ 

  Per tant tenim

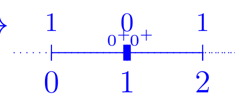
$$\lim_{x\to -3^-} g(x)=\frac{9}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -3^+} g(x)=\frac{9}{0^+}=+\infty$$

- *Pel denominador de $h(x)=\frac{3x}{x^2+2x-8}$*

$x^2+2x-8 \longrightarrow$ 

$$\lim_{x\to -4^-} h(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -4^+} h(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

- *Pel denominador de* $k(x) = \frac{2x-5}{x^2-2x+1}$

$x^2 - 2x + 1 \longrightarrow$ 

Per tant ens queda

$$\lim_{x\to 1^-} k(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} k(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Exercici 29: Exercici proposat.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-2} & si\ x < -2 \\[2ex] \dfrac{1}{x^2-1} & si\ x > -2 \end{cases}$$

a) Trobeu-ne el domini

b) Calculeu els límits laterals en $x = -2$*,* $x = -1$ *i* $x = 1$

Solució.

a) Aquesta funció té tres possible problemes:

- *Que s'anul·li el numerador de la primera branca.*
  El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = 2$, però aquest valor correspon a la segona branca i tindrem $f(2) = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$ i per tant la funció no té cap problema en $x = 2$.

- *Que s'anul·li el numerador de la segona branca.*
  El denominador de la segona branca s'anul·la en $x = -1$ i en $x = 1$. Tots dos valors es troben a la segona branca, per tant els haurem de treure.

- *Que tinguem problemes allà on s'enganxen les dues branques.*
  Quan $x = -2$ no podem entrar per cap de les dues branques, per tant també l'haurem de treure aquest valor.

Així tindrem

$$f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

b) Calculem ara els límits laterals en aquest valors.

- *En $x = -2$ haurem de tenir en compte que per l'esquerra entrarem per la primera branca, i per la dreta per la segona. Per tant*

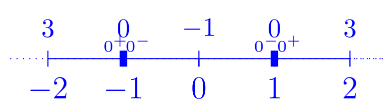
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x}{x-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{3}$$

  Tots dos límits laterals existeixen, però com no coincideixen podem dir que

$$\lim_{x \to -2} f(x) \nexists$$

- *Per veure els límits laterals en $x = \pm 1$ mirem el signe del denominador a cada banda:*

$x^2 - 1 \longrightarrow$



Per tant tindrem

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Exercici 30.
Calculeu el domini de la funció

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

i feu-ne un estudi local (calculant els límits laterals) als punts que no pertanyin al domini.

Solució.
Resolent l'equació

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

trobem que el denominador s'anul·la en $x = 1$ i $x = 3$. Per tant,

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$$

Mirem ara com es comporta la funció que x s'apropa a aquests valors. Si fem el límit

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Ens trobem una indeterminació. És a dir, no sabem quin dels dos es fa petit més ràpid, si el numerador o el denominador. Per solucionar aquest tipus d'indeterminacions factoritzem tant numerador com denominador trobant-ne les arrels:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2 \text{ i } x = 1$$

per tant la funció la podem escriure com

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$$

Fixem-nos que tenen un factor en comú que podem simplificar sempre i quant $x \neq 1$. Com estem fent el límit i no avaluant la funció en $x = 1$, podem simplificar, i obtenim

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{(x-3)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Fixem-nos que no cal fer els límits laterals perquè tots dos donarien el mateix en existir el límit quan $x \to 1$. Per tant podem dir que quan x s'apropa a 1 la funció s'apropa a $-\frac{3}{2}$, però que en canvi quan x val exactament 1 la funció no existeix.
Veiem ara el comportament a prop de $x = 3$. En aquest cas només s'anul·la el denominador, per tant caldrà fer els límits laterals per estudiar el signe i veure si se'n va + o − infinit. Com en apropar-nos a $x = 3$ estem lluny de $x = 1$ podem fer servir la versió simplificada de la funció cosa que ens facilitarà els càlculs:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

perquè el denominador $x-3$ passa de ser negatiu a positiu en $x = 3$. En aquest cas, la funció no està fitada i el límit no existeix, ja que per totes dues bandes la funció se'n va a infinit.

Exercici 31: Domini i comportament local.
Estudieu el comportament de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

prop dels punts que no són del domini.

Solució.
Trobem primer els punts que no seran del domini resolent

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x\left(x^2 - 4x - 4\right) = 0$$

En poder treure factor comú x ja sabem que $x = 0$ és una solució. Les altres les trobarem de resoldre l'equació

$$x^2 - 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Ens trobem que $x = 2$ és una arrel doble del polinomi!
El domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

i per tant haurem d'estudiar els límits

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

Fixem-nos que $x=0$ és arrel del denominador, però no del numerador, però en canvi $x=2$ ho és dels dos, ja que si substituim $x=2$ el numerador també s'anul·la:

$$2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$$

Això d'una banda ens diu que quan fem el límit $x\to 2$ tindrem una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, però de l'altra ens diu que la funció la podem simplificar, perquè numerador i denominador tenen una arrel en comú. Per tant, factoritzem el numerador per tal de simplificar i facilitar-nos els càlculs.
Si trobem les arrels del numerador tenim

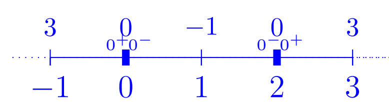
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \textit{ i } x = 3$$

Per tant, quan $x \neq 2$, la funció la podrem escriure com

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{x(x-2)^{\cancel{2}}} = \frac{x-3}{x(x-2)} \textit{ si } x\neq 2$$

Aquesta darrera expressió és la que farem servir per calcular els límits, cosa que ens simplificarà els càlculs.
Com hem simplificat tot el que es podem simplificar, ara el numerador i denominador no s'anul·laran alhora. Per tant, allà on s'anul·li el denominador tindrem límits del tipus $\pm\infty$. Mirem els canvis de signe del denominador:

$$x(x-2) \longrightarrow$$



Un cop tenim clars els canvis de signe del denominador, podem fer els límits laterals:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Per tant la funció no està fitada ni a prop de $x = 0$ ni de $x = 2$ (té dues asimptòtes verticals).

Exercici 32: Variant de Pg. 219 n^o 6.
Donada la funció

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$$

a) calculeu-ne els límits quan x tendeix a -3^-, -3^+, -2^-, -2^+, 1^- i 1^+.

b) fent servir només els resultats anteriors (sense fer cap alre càlcul), discutiu si els límits

$$\lim_{x\to -3} f(x) \qquad \lim_{x\to -2} f(x) \qquad \lim_{x\to 1} f(x)$$

existeixen o no, i digueu quant valen en cas d'existir.

c) Representeu la funció f amb Geogebra o Wolframalpha (o el que vulgueu) i comenteu els resultats.

Solució.

a) Intentem calcular primer les imatges dels valors que ens proposen per veure si la funció hi té algun problema o no:

- *En $x = -3$ s'anul·la del denominador només: $\Longrightarrow$ ens donrà ∞ i caldrà fer límits laterals per veure el signe*
- *En $x = -2$ s'anul·len tots dos: $\Longrightarrow$ caldrà factoritzar i simplificar*
- *En $x = 1$ s'anul·la només el numerador: $\Longrightarrow$ el límit serà 0, ja sigui per l'esquerra o per la dreta*

Com haurem de factoritzar per resoldre la indeterminació quan $x \to -2$, factoritzem d'entrada per simplificar els càlculs. Trobem les arrels del numerador i *denominador:*

$$
\begin{aligned}
x^2 + x - 2 = 0 & \\
& \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} \\
& \Longrightarrow x = -2 \ i \ x = 1 \\
x^5 + 5x + 6 = 0 & \\
& x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} \\
& \Longrightarrow x = -3 \ i \ x = -2
\end{aligned}
$$

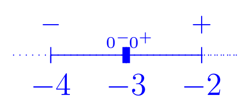
Per tant tindrem que, si $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$$

Fem servir aquesta expressió per calcular els límits.

- *Fixem-nos que el denominador passa de ser negatiu a positiu quan* $x = -3$*:*

$x + 3 \longrightarrow$



$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -3^-} f(x) &= \lim_{x \to -3^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \\
\lim_{x \to -3^+} f(x) &= \lim_{x \to -3^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{0^+} = -\infty
\end{aligned}
$$

- *En* $x = -2$*, com en simplificar la funció els factors* $(x+2)$ *marxen, els límits laterals coincidiran perquè la funció no hi presenta cap problema ara:*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2^-} f(x) &= \lim_{x \to -2^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-3}{1} = -3 \\
\lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-3}{1} = -3
\end{aligned}
$$

- *Finalment, com el numerador s'anul·la en $x = 1$ però el denominador no, obtenim*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$

b)

- *Com els límits laterals en $x = 3$ no existeixn (el límit dóna infinit), el límit en $x = 3$ tampoc existeix. Fixeu-vos que, a més, no podem dir ni tan sols que el límit sigui ni $+\infty$ ni $-\infty$.*
- *Com els límits laterals en $x = -2$ existeixen i coincideixen podem afirmar que el límit quan $x \to -2$ existeix i val*

$$\lim_{x\to -2} f(x) = -3$$

- *Com els límits laterals en $x = 1$ existeixen i coincideixen, podem afirmar que el límit quan $x \to 1$ existeix i val*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

c) En fer la gràfica ens trobem que, aparentment, la funció no presenta cap problema en $x = 1$ ni $x = -2$, tot i que aquests dos valors no són del domini. En canvi, en $x = -3$ ens trobem que la funció fa un salt infinit*, és a dir, té una asímptota vertical en $x = -3$*

Exercici 33: Pg. 219 n^o 7.
Donada la funció

$$f(x) = \sqrt{x-4}$$

trobeu-ne el domini i calculeu els límits quan x tendeix a 4^-, 4^+ i 4.

Exercici 34: Pg. 219 n^{o}8.
Trobeu el domini de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{2x^2+2x} & si\ x \leq 1 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{2x-2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

i estudieu els límits quan x tendeix a 0, 1, i 3 (trobant, si cal, els límits laterals).

Solució.

Estudiem primer el domini tenint en compte els possibles problemes:

- *Cal assegurar-nos que la funció estigui ben definida als punts on s'enganxen les branques*
- *Caldrà vigilar amb els punts on s'anul·lin els denominadors i treure aquests valors en cas que es trobin a la branca corresponent*

En $x = 1$ *entrem per la primera branca. Per tant, en principi, la funció no té cap problema.*
Mirem on s'anul·len els denominadors:

$$2x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ } i \text{ } x = -1$$
$$2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Els primers dos valors els haurem de treure, perquè estan inclosos a la primera branca. En canvi, $x = 1$ *no caldrà treure'l perquè, per aquest valor, s'entra per la primera branca. No obstant, caldrà fer el límit quan* $x \to 1^+$*, per saber quin és el comportament de la funció a prop de* $x = 1$ *(de fet, ens ho demana l'enunciat).*
Resumint, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

Fem els límits:

- *En apropar-nos a* $x = 0$*, tant per l'esquerra com per la dreta, entrem per la primer branca. Per aquest valor obtenim una indeterminació del tipus* $\frac{0}{0}$ *i per tant caldrà factoritzar i simplificar. Traient factor comú obtenim:*

$$\frac{x^2 - x}{2x^2 + 2x} = \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(2x+2)} = \frac{x-1}{2x+2} \text{ } si \text{ } x \neq 0$$

  Com en la versió simplificada de la primera branca no presenta cap problema en $x = 0$ *no caldrà fer límits laterals:*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{2x+2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

- *Fem ara el límit quan* $x \to 1$*. En aquest cas, com es canvi de branca percisament en* $x = 1$*, caldrà fer límits laterals, sí o sí:*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{2x+2} = 0$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{2x-2} = \frac{0}{0}$$

Com el límit per la dreta ens surt una indeterminació, haurem de factoritzar també la segona branca i simplificar:

$$\frac{x^2-1}{2x-2} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{2} \text{ si } x \neq 1$$

Per tant tindrem

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

- *Finalment, estudiem el límit quan $x \to 3$. Per aquest valor entrem per la segona branca, i la funció no presenta cap problema:*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Fixem-nos que no cal fer límits laterals.

Exercici 35.
Calculeu els límits $x \to -3$, $x \to -2$ i $x \to 2$ de la funció

$$f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^3+x^2-6x}$$

Solució.
Com

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{0}{0}$$

caldrà factoritzar. Trobant les arrels del numerador i denominador obtenim

$$f(x) = \frac{(x+2)\cancel{(x+3)}}{x(x-2)\cancel{(x+3)}}.$$

Per tant obtenim

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{-1}{15},$$

i no depen de si ens apropem per la dreta o per l'esquera al -3.
D'altra banda tenim

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{0}{8} = 0,$$

i tampoc depen dels límits laterals al -2.
Finalment tenim

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{4}{0}.$$

No és una indeterminació, però haurem de mirar els límits laterals per saber si el límit és ∞ o $-\infty$ o cap de les dues. En qualsevol cas, d'entrada ja sabem que el límit no existirà. Si mirem els signes de $x(x-2)$ a l'esquerra i dreta de 2 obtenim que són negatiu i positiu, respectivament. Per tant tenim

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

Per tant, el límit quan $x \to 2$ no existeix perquè els laterals no coincideixen i, a més, aquests tampoc existeixen (perquè són $\pm\infty$).

Exercici 36: Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$.
Calculeu els següent límits. Si és necessari, feu també els límits laterals.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4-3x^3-2x^2}{x^2-x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+4x^2+4x}$

Solució.

a) Fem una primera inspecció substituïnt x per 1, i obtenim

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació factoritzem tant numerador com denominador per simplificar. Per factoritzar trobem les arrels dels dos:

$$x^2-1=0 \Longrightarrow x=\pm 1$$
$$x^2-3x+2=0 \Longrightarrow x=1 \text{ i } x=2$$

Per tant, obtenim

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-2)\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x-2}$$

Amb l'expressió simplificada podem tornar a fer el límit substituïnt de nou x per 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=\frac{2}{-1}=-2$$

Fixem-nos que no cal fer els límits laterals perquè tots dos donaran el mateix.

b) Fem el mateix:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$$

Factortizem per resoldre la indeterminació. Fixem-nos que podem treure factor comú:

$$x^4+3x^3-2x^2=x^2\left(x^2+3x-2\right)$$
$$x^2-x=x\,(x-1)$$

Fixem-nos que no cal seguir factoritzant, perquè en simplificar x ja resoldrem la interminació:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}(x^2+3x-2)}{\cancel{x}(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3x-2)}{x-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Altre cop tampoc caldrà fer els límits laterals perquè donaran el mateix, 0.

c) Si substituim x per -1 tornem a tenir una indeterminació, per tant factoritzem. Haurem de resoldre les següents equacions per trobar-ne les arrels:

$$x^2+4x+3=0\Longrightarrow x=-3\ i\ x=-1$$
$$x^2+2x+1=0\Longrightarrow x=-1\ arrel\ doble$$

Per tant tindrem:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to -1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{2}{0}$$

Ara la intederminació l'hem resolt, però ens queda un 0 al denominador, per tant el límit serà $+\infty$ o bé $-\infty$, cosa que dependrà dels límits laterals. Com el *denoinador, $x+1$, és una recta de pendent positiu, el canvi de signe en $x=-1$ serà de negatiu a positiu. Per tant tindrem:*

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

d) *Altre cop tenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. Factoritzem per resoldre-la:*

$$x^3+4x^2+4x = x\left(x^2+4x+4\right)$$

$$x^2+4x+4=0 \Longrightarrow x=-2 \text{ (arrel doble)}$$

perquè

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2} = -2 \; i \; -2$$

Per tant, el denominador factoritzat serà:

$$x^3+4x^2+4x = x(x+2)^2$$

i el límit serà:

$$\lim_{x\to -2} \frac{\cancel{x+2}}{x(x+2)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{0}$$

Altre cop hem resolt la indeterminació, però caldrà fer els límits laterals perquè el denominador segurament canviarà de signe en $x=-2$. El denominador és una paràbola convexa (mira amunt), i talla en $x=0$ i $x=-2$. Per tant, el canvi de signe en $x=-2$ serà de positiu a negatiu:

$$x(x+2) \longrightarrow \begin{array}{ccccc} + & 0^+ \; 0^- & - & 0^- \; 0^+ & + \\ \hline & -2 & & 0 & \end{array}$$

Per tant els límits laterals quedaran:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Exercici 37.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1} & si\ x < 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) *Trobeu-ne el domini*

b) *Trobeu-ne el nucli*

c) *Calculeu els límits*

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

Solució.

a) *Per trobar el domini mirem*

(a) *Punts de canvi de branca. En $x = 1$ la funció canvia de branca, i aquest valor està inclòs a la segona. Per tant, per ara, 1 és del domini.*

(b) *Punts on s'anul·len els denominadors.*
El denominador de la primera branca s'anul·la quan

$$x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

Com $x = -1$ està inclòs al rang de la primera branca $(-1 < 1)$, el valor $x = -1$ l'haurem de treure del domini. Per tant, per ara tenim $-1 \notin D(f)$.
El denominador de la segona branca s'anul·la quan

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1 \ i\ x = 3$$

Com tots dos valor estan inclosos al rang de la segona branca tots dos també els haurem de treure del domini.
Així el domini quedarà:

$$\boxed{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}}$$

O alternativament

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)$$

b) *Per trobar el nucli ens preguntem qua la funció val 0. Això ens dóna dues opcions, una per a cada branca.*

- *Mirem la primera:*

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = 0 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ } i \text{ } x = -1$$

  Però cap dels dos valor els haurem de descartar perquè

  - $-1 \notin D(f)$
  - *El valor* $x = 2$ *no està inclòs al rang del la primera branca, l'haurem de descartar.*

  Per tant, per ara, el nucli és buit.

- *Mirem la segona branca:*

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

  Ara bé, altre cop tots dos valors els haurem de descartar perquè

  - $1 \notin D(f)$
  - -1 *no està inclòs al rang de la segona branca perquè no compleix que* $-1 \geq 1$

Per tant, el nucli és buit:

$$\boxed{Nuc(f) = \emptyset}$$

c) *Ens demana fer els límits justament en els punts que no són del domini per saber-ne el comportament a prop d'aquests punts (comportament local).*

- *En* $x = -1$ *entrem per la primera branca, tant per la dreta com per l'esquerra. Per tant, fem una primera inspecció subsituïnt* $x = -1$ *i tenim*

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació haurem de factoritzar trobant les arrels del numerador (el denominador no es pot reduir):

$$x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \ i \ x = -1$$

Per tant ens quedarà:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \to -1} x - 2 = -3$$

- *En $x = 1$ hi tenim un canvi de branca. Per tant, haurem de distingir entre esquerra i dreta fent els límits laterals.*
Per l'esquerra entrem per la primera branca:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

I per la dreta entrem per la segona branca:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} \ \textit{Indeterminació}$$

En aquest cas tenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, que haurem de resoldre factoritzant. Trobem les arrels del numerador i denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1 \ i \ x = 3$$

Així quedarà

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

- *Finalment, en $x = 3$ entrem per la segona branca, tant per la dreta com per la segona. Fixem-nos que podem fer servir la versió simplificada de la funció, cosa que ens facilitarà els càlculs:*

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{0}$$

Caldrà fer els límits laterals per estudiar el canvi de signe del denominador. El denominador, $x - 3$, és una recta amb pendent positiu i, per tant, el canvi *de signe en $x = 3$ es produeix passant de ser negatiu a positiu. Per tant tenim:*

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Exercici 38.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Trobeu-ne el domini

b) Trobeu-ne el nucli

c) Calculeu els límits

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

Solució.

a)

- *Primer mirem que $x = 2$ esitigui inclòs en algun dels rangs on estan definides les dues branques. Ok perquè*

$$f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

- *Mirem allà on les branques tinguin problemes:*
  - *El denominador de la primera branca s'anul·la quan $x = -1$. Com -1 compleix que $-1 \leq 2$, aquest valor l'haurem de treure del domini de f.*

- *El denominador de la segona branca s'anul·la quan $x = -2$ o bé $x = 2$. Cap dels dos valor compleix la condició $x > 2$, per tant, cap dels dos els haurem de treure. De fet, tindrem:*

$$f(-2) = \frac{-2}{-2+1} = 2$$
$$f(2) = \frac{2}{3}$$

Així, el domini quedarà:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

b) *Per trobar el nucli igualem les dues branques a 0, i després comprovem que els valors trobats esituin dins el rang.*

- *La primera branca:*

$$\frac{x}{x+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Com $0 < 2$, $0 \in Nuc(f)$.

- *De la segona branca traiem*

$$\frac{x-2}{x^2-4} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Per com que $2 \not< 2$ aleshores $x = 2$ no serà del nucli: $2 \notin Nuc(f)$.

Així,

$$Nuc(f) = \{0\}$$

c) *Fem ara els límits:*

- *En $x = -1$ entrem per la primera branca, i per tant tenim*

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0}$$

Caldrà doncs fer els límits laterals i estudiar el canvi de signe del denominador. Com $x + 1$ és una recta de pendent positiu, passa de ser negatiu a l'esquerra de $x = -1$ a positiu a la dreta. Per tant tindrem:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

- *En $x = 2$ caldrà fer els límits laterals, perquè canviem de branca. Així:*

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

Per la dreta tenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$; caldrà doncs factoritzar i simplificar. Com ja hem trobat les arrels del denominador abans, obtenim:

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Torne a fer el límit fent servir la versió simplificada:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

- *Finalment fem el límit en $x \to -2$. En aquest cas entrem per la primer branca i obtenim:*

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x+1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

i ja està, no cal fer els laterals.

2.4 Continuïtat

Exercici 39.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} & si\ x < -1 \\[2ex] \dfrac{x-2}{x^2+x-6} & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) Trobeu el domini de f

b) Feu un llistat dels punts on la funció pugui presentar alguna discontinuïtat