Capítol 5

Geometria plana

Continguts

5.1 Vectors i producte escalar

Exercici 81: Producte escalar i Teorema de Pitàgores.
Demostreu que si $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ *aleshores*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Interpreteu-ho també gràficament.

Solució.
Recordem la següent propietat del producte escalar:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{w}\|^2.$$

Aplicant aquesta propietat al vector $\vec{u} + \vec{v}$ *obtenim*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{u})$$

Com el producte escalar compleix la propietat distributiva, podem desenvolupar la part dreta de la igualtat obtenint

$$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{=\|\vec{v}\|^2} + 2\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{=0} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=\|u\|^2} = \|v\|^2 + \|\vec{u}\|^2$$

Pel que fa a la interpretació gràfica, fixem-nos que la condició $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ *implica que els vectors* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$ *són perpendiculars (assumint que cap d'ells és el vector nul). D'altra banda, el vectr suma* $\vec{v} + \vec{u}$ *no és més que la hipotenusa del triangle rectangle format pels vectors* $\vec{v}$ *i* $\vec{u}$. *Per tant, la propietat que hem demostrat és equivalent al teorema de Pitàgores.*

Exercici 82.
Considereu el paral·lelogram amb vèrtexs consecutius $A = (1, 1)$*,* $B = (3, 4)$ *i* $C = (5, -2)$

a) Comproveu que no estan alineats

b) Trobeu el quart vèrtex i el perímetre

c) Calculeu l'angle que formen les diagonals. Amb la informació anterior digueu de quin tipus de paral·lelogram es tracta (quadrat, rectangle, rombe o cap d'ells).

Solució.

a) No estan alineats perquè els vectors $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3)$ *i* $\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -6)$ *són l.i.*

b) Com els vèrtexs són consecutius, el quart vèrtex, D*, el trobarem posant a* C *el vector* $\overrightarrow{BA}$*, o bé posant a* A *el vector* $\overrightarrow{BC}$*:*

$$D = C + \overrightarrow{BA} = C + A - B = (3, 3)$$
$$D = A + \overrightarrow{BC} = A + C - B = (3, 3)$$

El perímetre serà:

$$2 \cdot \|\overrightarrow{AB}\| + 2 \cdot \|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{2^2 + 3^2} + 2\sqrt{2^2 + 6^2}$$
$$= 2\sqrt{13} + 2\sqrt{40}2\sqrt{13} + 4\sqrt{5}u$$

c) Les diagonals són $\overrightarrow{BD} = D - B = (0, -1)$ *i* $\overrightarrow{AC} = C - A = (4, -3)$*. L'angle que formen el calcularem fent servir el producte escalar:*

$$\cos(\theta) = \frac{(0, -1) \cdot (4, -3)}{\sqrt{0 + 1} \cdot \sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5}$$

Ara trobem l'angle fent

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53.13^\circ$$

Com els costats AB *i* BC *són diferents, ja sabem que no és un quadrat ni un rombe. Com a més a més,* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$*, tampoc podrà ser un rectangle perquè els costats no són perpendiculars. Per tant, serà un paral·lelogram.*

Exercici 83: Pg. 118 n^o 39.
Demostreu que el triangle amb els vèrtexs $A = (1, 2)$, $B = (6, 5)$ i $C = (3, 10)$ és rectangle en B.

Solució.

Opció 1 *Només cal veure que els vectors $\vec{BA}$ i $\vec{BC}$ són perpendiculars, cosa que es complirà si el seu producte escalar és zero:*

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (A - B) \cdot (C - B) = (-5, -3) \cdot (-3, 5) = 15 - 15 = 0$$

Opció 2 *Si és rectangle haurà de complir el teorema de Pitàgores. Com el costat AC és la hipotenusa, això serà:*

$$\begin{aligned}
\left|\vec{AC}\right|^2 &\stackrel{?}{=} \left|\vec{BA}\right|^2 + \left|\vec{BC}\right|^2 \\
\left(\sqrt{2^2 + 8^2}\right)^2 &\stackrel{?}{=} \left(\sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-3)^2 + 5^2}\right)^2 \\
4 + 64 &\stackrel{?}{=} 25 + 9 + 9 + 25 \\
68 &\stackrel{\checkmark}{=} 68
\end{aligned}$$

Per tant, com es compleix el teorema de Pitàgores, el triangle serà rectangle en B.

Exercici 84: Pg. 118 n^o 41.
Els punts $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$ i $C = (7, 4)$ són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Determineu les coordenades del quart vèrtex i les del punt d'intersecció de les diagonals.

Solució.

a) El quart vèrtex el podem obtenir de vàries maneres equivalents:

a1 *Posem sortint de C el vector $\vec{BA}$: $D = C + \vec{BA} = C + A - B = (5, 1)$*

a2 *Imposem que els vectors $\vec{CD}$ i $\vec{BA}$ siguin iguals:*

$$\vec{CD} = \vec{BA} \Longleftrightarrow D - C = A - B \Longleftrightarrow D = C + A - B = (5, 1)$$

a3 Posem sortint de A el vector $\vec{BC}$:

$$D = A + \vec{BC} \Longrightarrow D = A + C - B = (5, 1)$$

b) El punt on es tallen les diagonals serà el punt mig:

$$M = \frac{B + D}{2} = (4, 3)$$

Exercici 85: Pg. 118 n^o 42.

Els punts $P = (3, -7)$ i $Q = (5, 13)$ pertanyen a una circumferència i són diametralment oposats. Calculeu el centre de la circumferència i el seu radi.

Solució.

Com són diametralment oposats, el centre serà el punt mig del segment PQ:

$$C = \frac{P + Q}{2} = \frac{(8, 6)}{2} = (4, 3)$$

El radi el trobarem calculant la distància entre els punt C i Q, o C i P o dividint la distància entre P i Q entre 2. Recordant que la distància entre dos punts és el mòdul del vector que els separa tindrem:

$$R = \left|\vec{CP}\right| = \left|\vec{CQ}\right| = \frac{\left|\vec{PQ}\right|}{2} = \sqrt{101}$$

Exercici 86.

Justifiqueu si són certes o no les següents afirmacions

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{t} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{t})$

b) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exercici 87: Pg. 118 n^o 44.

Trobar el valor de p per tal que els punts $A = (2, 5)$, $B = (3, -2)$ i $C = (-1, p)$ estiguin alineats.

Solució.

Per tal que estiguin alineats necessitem que dos vectors qualsevols unint els treus punts tinguin la mateixa direcció. Per exemple:

$$\vec{BA} = \lambda \vec{AC} \Longrightarrow A - B = \lambda (C - A)$$
$$(-1, 7) = \lambda (-3, p - 5)$$

Es tracta d'una equació vectorial, amb dues incògnites i dues equacions, que són:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -3\lambda \\ 7 &= \lambda(p-5) \end{aligned}\right\}$$

De la primera traiem que $\lambda = \frac{1}{3}$*, i substituint-t'ho a la segona tindrem:*

$$7 = \frac{1}{3}(p-5) \Longleftrightarrow p = 26$$

Exercici 88: Pg. 120 n^o 6.
Calcular el vector $\vec{u}$ *que verifica:*

a) És unitari (té mòdul 1)

b) Té la mateixa direcció que $\vec{v} = (-6, 8)$ *però sentit contrari.*

Solució.

Opció 1 *Ens preguntem per quant hem de multiplicar el vector* $\vec{v}$ *per tal que es compleixi:*

$$\begin{aligned} |\lambda\vec{v}| = 1 \Longrightarrow |(-6\lambda, 8\lambda)| = 1 &\Longleftrightarrow \sqrt{(-6\lambda)^2 + (8\lambda)^2} = 1 \\ = \sqrt{36\lambda^2 + 64\lambda^2} = 1 &\Longleftrightarrow \sqrt{100\lambda^2} = 1 \\ \left(\sqrt{100\lambda^2}\right)^2 = 1^2 \Longleftrightarrow 100\lambda^2 = 1 &\Longleftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{100}} \Longleftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Per tant, com volem que tingui sentit contrari, el vector $\vec{u}$ *serà:*

$$\vec{u} = -\frac{1}{10}\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Opció 2 *Alternativament, sabem que si dividim un vector entre el seu propi mòdul tindrem un vector amb la mateixa direcció i sentit però de mòdul 1. Si volem que tingui sentit contrari noés caldrà dividir-lo entre el seu propi mòdul i canviar-li el signe. Per tant:*

$$|\vec{v}| = \sqrt{36 + 64} = 10$$
$$\vec{u} = -\frac{\vec{v}}{10} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Exercici 89: Pg. 120 n^o 10.
Donat el segment d'extrems $P=(3,-5)$ i $Q=(6,-8)$ determineu les coordenades del punt R d'aquest segment que verifica $PR=\frac{3}{10}\cdot PQ$.

Solució.
El punt el trobarem posant a P el vector $\vec{PQ}$ dividit entre 10 i multiplicat per 3:

$$R=P+\frac{3\cdot\vec{PQ}}{10}=P+\frac{3(Q-P)}{10}=\frac{10P+3Q-3P}{10}=\frac{7P+3Q}{10}=$$
$$=\frac{(21,35)+(18,-24)}{10}=\left(\frac{39}{10},\frac{11}{10}\right)$$

Exercici 90: Pàgina 120 n^o 11.
El baricentre d'un triangle se situa en el punt $G=(-2,0)$ i dos dels seus vèrtexs als punts $A=(3,4)$ i $B=(-6,5)$. Trobeu les coordenades del vèrtex que falta.

Solució.
Diguem M al punt mig del segment AB:

$$M=\frac{A+B}{2}=\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$$

Sabem que el punt G es troba a un terç del camí anant de M a l'altre vèrtex, C. Per tant ha de complir l'equació:

$$G=M+\frac{\vec{MC}}{3}=M+\frac{C-M}{3}=\frac{2M+C}{3}$$

Si ara aïllem C ens quedarà:

$$C=3G-2M=(-6,0)-(-3,9)=\boxed{(-3,-9)}$$

Alternativament, podem trobar C situant en vector $3\vec{MG}$ sortin de M:

$$C=M+3\vec{MG}=M+3(G-M)=-2M+3G=(-3,-9)$$

Exercici 91: Exercici examen curs 20-21.
Considereu tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{t}$. Raoneu per què l'expressió

$$\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{t}$$

NO *és correcte.*

Exercici 92.
Els punts $(1,1)$ i $(-1,3)$ divideixen el segment AB en tres parts iguals. Trobeu els punts A i B.

5.2 Rectes al pla

Exercici 93: Pg. 130 n^o 13.
Comprovar que els punts $A = (2, 3)$, $B = (-2, 1)$ i $C = (5, -1)$ no estan alineats, i trobar les rectes que determinen el triangle A, B i C.

Solució.
Només cal veure que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ no són múltiples, és a dir, són linealment independents. Obtenim $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -2)$ i $\overrightarrow{BC} = C - B = (7, -2)$. Clarament són l.i. Si ens fixem en la segona coordenada, són la mateixa però la primera no. Per tant, no podrem obtenir mai un vector a partir de l'altre multiplicant per algun escalar.
Com no ens demana la forma en què han d'estar les rectes, el més fàcil és donar-ho en vectorial. Obtindrem:

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= A + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}, \\
(x, y) &= B + \nu \cdot \overrightarrow{BC}, \\
(x, y) &= C + \mu \cdot \overrightarrow{CA},
\end{aligned}
$$

on $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ ja els havíem calculat abans i $\overrightarrow{CA} = (-3, 4)$.

Exercici 94: Pg. 130 n^o 14.
Obtenir l'equació explícita de la recta que passa pels punts $P = (0, 2)$ i $Q = (5, -1)$.

Solució.
El més fàcil és obtenir el pendent a partir del vector director $\overrightarrow{PQ}$:

$$m = \frac{-1-2}{5-0} = -\frac{3}{5}.$$

Per trobar n imposarem que passi per P, per exemple. Ho podem fer en la forma punt pendent:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

on m és el pendent (que ja hem trobat) i (x_0, y_0) són les coordenades d'un punt de pas. Substituint obtenim

$$y - 2 = -\frac{3}{5}(x - 0),$$

i aïllant y obtenim la forma explícita de la recta:

$$y = -\frac{3}{5}x + 2.$$

Una altra opció és trobar n directament resolent una equació imposant que el punt P compleixi l'equació $y = -\frac{3}{5}x + n$:

$$2 = -\frac{3}{5} \cdot 0 + n \Longrightarrow n = 2.$$

Exercici 95: Pg. 143 n^o 5.

Trobar A i B per tal que les rectes

$$2x + 3y - 5 = 0 \qquad Ax + By - 4 = 0$$

siguin perpendiculars i la segona passi pel punt $(2, 1)$.

Solució.

Haurem de resoldre un sistema de dues equacions. La primera la trobem imposant la perpendicularitat. Com les equacions les tenim en forma general, els vectors $(2, 3)$ i (A, B) són vectors perpendiculars (vectors normals) a les respectives rectes. Per tant, si les rectes han de ser perpendiculars entre elles, els vectors normals també ho hauran de ser. Imposem que el producte escalar sigui 0:

$$(2, 3) \cdot (A, B) = 2A + 3B = 0.$$

Una segona equació la trobem imposant que la segona recta passi pel punt $(2, 1)$. Perquè el punt aquest pertanyi a la recta haurà de complir la seva equació:

$$2A + B - 4 = 0$$

Així només hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 2A + 3B = 0 \\ 2A + B - 4 = 0 \end{cases}$$

Restant la primera equació menys la segona obtenim

$$2B + 4 = 0 \Longrightarrow B = -2.$$

Substituint-ho a la segona equació tenim

$$2A - 2 - 4 = 0 \Longrightarrow A = 3.$$

Exercici 96: Pg. 137 n^o 32.

Considereu la recta $r:\ x - y + 4 = 0$ i el punt $P = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$. Trobeu l'equació de les rectes que passen per P i formen un angle de $60°$ amb r

Solució.

Noteu que la recta és paral·lela a la bisectriu ja que té pendent 1, i per tant forma un angle de $45°$ *amb l'eix horitzontal* $(\arctan 1 = 45°)$*. Hi ha dues rectes que formen* $60°$ *amb* r*, girant* r *en sentit negatiu o bé en sentit positiu. Fàcilment podem trobar els pendents d'aquestes rectes. La primera formarà un angle de* $45-60 = -15°$ *amb l'eix horitzontals, i per tant tindrà un pendent de* $\tan(-15°) \sim -0.26$*. La segona formarà un angle de* $45 + 60 = 105°$ *amb l'eix d'abscisses, i per tant tindrà un pendent de* $\tan(105) \sim -3.73$*. Ara només ens quedarà imposar que passi per* P*:*

$$-\frac{1}{2} = -0.26 \cdot 2 + n \Longrightarrow n_1 \simeq 0.04$$
$$-\frac{1}{2} = -3.73 \cdot 2 + n \Longrightarrow n_2 \simeq 6.96$$

Per tant, les rectes seran

$$y = -0.26x + 0.04$$
$$y = -3.73x + 6.96$$

Exercici 97: Pg. 137 n^{o}33.

Trobar els angles del triangle que té per vèrtexs els punts $A = (2, 4)$*,* $B = (-3, -1)$ *i* $C = (-1, 6)$

Solució.

Només cal trobar els angles que formen els vectors que formen els costats. Per calcular l'angle $\hat{A}$ *primer trobem els vectors* $\overrightarrow{AB} = (-5, -5)$ *i* $\overrightarrow{AC} = (-3, 2)$*. Fixem-nos que els agafem tots dos sortint d'A per tal de mesurar l'angle correcte. En cas contrari estaríem mesurant el suplementari! Fent servir el producte escalar obtenim:*

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot AC}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{15 - 10}{\sqrt{50}\sqrt{13}} \Longrightarrow \hat{A} = 78.69°$$

Per trobar $\hat{B}$ *fem servir els vectors* $\overrightarrow{BA} = (5, 5)$ *i* $\overrightarrow{BC} = (2, 7)$*, i obtenim*

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{10 + 35}{\sqrt{50}\sqrt{53}} \Longrightarrow \hat{B} = 29.05°$$

Finalment, l'angle $\hat{C}$ *l'obtenim completant fins a* $180°$*:*

$$\hat{C} = 180 - 78.69 - 29.05 = 72.26°$$

Exercici 98: Pg. 143 n^o 8.
Donada l'equació de la recta $r: 3x - 2y + 7 = 0$ i el punt $P = (2, 0)$, determineu

a) L'equació de la recta que passa pel punt i és perpendicular a r

b) La intersecció entre les dues rectes

c) El punt simètric de P respecte r

Solució.
Raonant com a l'exercici 95, escrita en forma general la recta que ens demanen tindrà la forma $2x + 3y + A = 0$, perquè els vectors $(3, -2)$ i $(2, -3)$ són perpendiculars. Trobem A imposant que el punt P pertanyi a la recta:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + A = 0 \Longrightarrow A = -4.$$

La recta és per tant $2x + 3y - 4 = 0$.
Per trobar la intersecció de les rectes, com són perpendiculars es tallen i simplement hem de trobar l'únic punt (x, y) que compleix les dues equacions alhora. És a dir, hem de resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 7 = 0 \\ 2x + 3y - 4 = 0. \end{array}\right\}$$

Multiplicant la primera per 2 i la segona per 3 i restant les dues equacions obtenim

$$9y - 12 + 4y - 14 = 0;\ 13y - 26 = 0 \Longrightarrow y = 2.$$

Substituint a la segona equació obtenim $2x + 6 - 4 = 0$ i per tant $x = -1$.

Si anomenem Q a la intersecció que acabem de trobar, $Q = (-1, 2)$, el punt P respecte r el trobem simplement fent

$$P + 2\overrightarrow{PQ} = P + 2(Q - P) = 2Q - P = (-2, 4) - (2, 0) = (-4, 4).$$

Exercici 99: Pg. 143 n^o 10.
Trobeu els valors de k que fan que les rectes $kx+(k-1)y-2 = 0$ i $3kx-(3k+1)y+5 = 0$ siguin paral·leles i perpendiculars.

Solució.
Per tal que sigui paral·leles els seus vectors directors han de ser múltiples (linealment dependents), o, equivalentment, els vectors normals a les rectes també han de ser

múltiples. Com les tenim en forma general, agafem directament aquests darrers. Per tal que siguin múltiples imposem

$$(k, k-1) = \lambda(3k, -(3k+1)).$$

Igualant component a component obtenim un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} k = \lambda 3k \\ k-1 = -\lambda(3k+1). \end{cases}$$

Si aïllem λ *a cada equació i fem igualació obtenim*

$$\frac{k}{3k} = -\frac{k-1}{3k+1}$$

Si $k \neq 0$ *podem simplificar* k *a la part esquerra. Alerta, caldrà comprovar a part si* $k = 0$ *és solució! Simplificant* k *a la part esquerra obenim*

$$\frac{1}{3} = -\frac{k-1}{3k+1};\ 3k+1 = 3(1-k),$$

d'on $k = \frac{1}{3}$*. Comprovem ara si* $k = 0$ *també és solució. Doncs sí, substituint* $k = 0$ *al sistema original tenim que es compleixen les equacions:*

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = -1. \end{cases}$$

Per tant, per $k = 0$ *i* $k = 1/3$ *les dues rectes són paral·lels.*
Ja que són paral·leles, podríem també trobar la distància entre elles. Per $k = 0$ *les rectes queden*

$$-y - 2 = 0 \quad -y + 5 = 0.$$

Fixem-nos que les dues rectes són horitzontals! Una és la recta $y = 2$ *i l'altra* $y = -5$*. Per tant la distància entre elles és* $2 - (-5) = 7$*. En canvi per* $k = 1/3$ *no és tant trivial. En aquest cas les rectes queden:*

$$\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - 2 = 0 \quad x - 2y + 5 = 0.$$

Prenem dos punts de pas, un de cada recta. Per fer-ho el més fàcil és fer $x = 0$ *o* $y = 0$ *i trobar el valor de l'altra variable. Per exemple agafem* $(0, -3)$ *i* $(-5, 0)$*. Ara ens cal un vector normal unitari. És a dir, un vector normal de mòdul 1. Per* *exemple n'agafem un de la segona recta:* $n = \frac{(1,-2)}{\sqrt{3}}$. *Així la distància entre les rectes quedarà:*

$$d(r, r') = \left[(0,-3) - (-5,0)\right] \cdot \frac{(1,-2)}{\sqrt{3}} = \frac{5+6}{\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3}.$$

Vegem ara per quins valors de k, *si n'hi ha, les dues rectes són perpendiculars. Per tal que ho siguin imposem que els dos vectors normals siguin perpendiculars entre si, és a dir, que el seu producte escalar sigui 0:*

$$0 = (k, k-1) \cdot (3k, -(3k+1)) = 3k^2 - (k-1)(3k+1) = 3k^2 - 3k^2 + 2k + 1 = 0,$$

d'on $k = -\frac{1}{2}$. *Per tant, per* $k = -1/2$ *les dues rectes són perpendiculars.*

Exercici 100: Exercici proposat a classe, 23-1-2020.
Donades les rectes

$$kx + 2y - 6 = 0$$
$$x + (k+1)y + 3 = 0$$

a) Trobeu els valors de k *per tal que les rectes siguin perpendiculars*

b) Trobeu els valors de k *per tal que les rectes siguin paral·leles*

c) Trobeu els valors de k *per tal que les rectes siguin secants*

Solució.
Per tal que les rectes siguin perpendiculars, necessitem que els seus vectors directors també ho siguin. De manera equivalent, podem imposar també que els vectors perpendiculars a les rectes siguin perpendiculars entre ells. Com les rectes estan en forma general, aquesta darrera condició és fàcil d'imposar:

$$(k, 2) \cdot (1, k+1) = 0,$$

d'on

$$k + 2(k+1) = 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = -\frac{2}{3}.$$

Per tant, si $k = -\frac{2}{3}$ *aleshores les rectes seran perpendiculars.*

Per tal que siguin paral·leles necessitem que els vectors directors o els vectors perpendiculars siguin proporcionals, o bé que tinguin el mateix "pendent":

$$\frac{2}{k} = \frac{k+1}{1} \Longrightarrow 2 = k^2 + k,$$

d'on $k=-2$ o $k=1$. Ara bé, aquest condició no és suficient, perquè podria ser que les rectes fossin la mateixa enlloc de paral·leles. Per tant, hem d'estudiar-les amb més detall per aquests dos valors.
Si $k=-2$, les rectes queden

$$\begin{aligned} -2x+2y-6&=0\\ x-y+3&=0. \end{aligned}$$

Fixem-nos que, de fet, són la mateixa recta, perquè la primera és la segona multiplicada per -2. No obstant, podem comprovar-ho agafant qualsevol punt d'una de les rectes i comprovar si pertany a l'altra o no. Agafem el punt $(0,3)$ de la segona i mirem si és de la primera: $-2\cdot 0+2\cdot 3-6=0$. Com aquest punt compleix l'equació de la primera recta, pertany a les dues i, per tant, les rectes són la mateixa i no pas paral·leles.

Mirem ara què passa quan $k=1$. En aquest cas les rectes queden:

$$\begin{aligned} x+2y-6&=0\\ x+2y+3&=0. \end{aligned}$$

Clarament les rectes no són iguals, perquè la part de les x i les y's és la mateixa, però el terme independent no. Per tant, una equació no és múltiple de l'altra. També podem agafar el punt $(6,0)$ de la primera i veure que no pertany a la segona: $6+2\cdot 0+3\neq 0$. Així, si $k=1$, efectivament les rectes seran paral·leles.

Finalment, estudiem quan les rectes seran secants, és a dir, quan es tallaran. Recordem que dues rectes (al pla) es tallen sempre i quan no siguin paral·leles ni la mateixa. Seran paral·leles només si $k=1$, i seran la mateixa si $k=-2$. Per tant, es tallaran sempre que $k\neq 1$ i $k\neq -2$. És a dir, es tallaran per

$$k\in\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}.$$

Exercici 101: Pg. 143 n^o 12.
Trobar el baricentre, circumcentre i ortocentre del triangle definit pels punts $(0,0)$, $(4,2)$ *i* $(2,6)$.

a) *Comprovar que estan alineats*

b) *Veure que la distància de l'ortocentre al baricentre és el doble que la distància entre el baricentre i el circumcentre.*

c) La distància del circumcentre a cada vèrtex és la mateixa.

Solució.

Bàsicament la dificultat és trobar els tres punts, un cop els tens només cal calcular distàncies, que és avorrit però és fàcil.

Recordem les definicions. El baricentre és el punt on es tallen les mitjanes d'un triangle (uneixen cada vèrtex amb el punt mitjà de cada costat), l'ortocentre és el punt on es tallen les altures, i el circumcentre és el punt on es tallen les mediatrius (que són perpendiculars a cada costat passant pel punt mig).

Trobem primer les equacions de les mitjanes, de fet amb dues ja fem. Com un dels vèrtexs és a l'origen, això facilita les coses si escollim els dels costats que el contenen. Així, els punts mitjos de cada costat són directament $(2,1)$ *i* $(1,3)$. *Volem les dues rectes que passen per* $(2,1)$ *i* $(2,6)$ *i per* $(1,3)$ *i* $(4,2)$. *Dos vectors directors seran* $(2,6)-(2,1)=(0,5)$ *i* $(4,2)-(1,3)=(3,-1)$. *Agafant els vectors perpendiculars a aquests i imposant que passin per algun dels dos punts trobem que les rectes són*

$$5x-10=0,\ x+3y-10=0.$$

De fet la primera recta es pot simplificar dividint-t'ho tot entre 5, i queda $x-2=0$. *Per trobar la intersecció entre elles, només cal resoldre el sistema*

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x+3y-10=0, \end{cases}$$

que és $x=2$ *i* $y=8/3$. *Per tant el baricentre és* $(2,8/2)$.

Trobem ara les mediatrius. Altre cop, amb dues ja fem i escollim les mediatrius dels dos costats anteriors perquè contenen l'origen que facilita les coses. Hauran de passar pels punts mitjos $(2,1)$ *i* $(1,3)$ *i tenir com a vectors directors els perpendiculars als costats. Ara bé, en escriure-ho en forma general, els vectors normals a les rectes seran els mateixos vectors que uneixen els vèrtes:* $(4,2)$ *i* $(2,6)$. *Per tant, les equacions tindran la forma*

$$4x+2y+A=0$$
$$2x+6y+B=0$$

Ara només cal trobar A *i* B *imposant que passin pels punts mitjos anteriors, obtenint*

$$4\cdot 2+2\cdot 1+A=0 \Longrightarrow A=-10$$
$$2\cdot 1+6\cdot 3+B=0 \Longrightarrow B=-20$$

Així les mediatrius seran

$$4x + 2y - 10 = 0$$
$$2x + 6y - 20 = 0,$$

que simplificant (dividint tot entre 2) queden

$$2x + y - 5 = 0$$
$$x + 3y - 10 = 0.$$

Per trobar el circumcentre només caldrà resoldre els sistema anterior. Per reducció (la segona multiplicada per 2 *menys la primera) tenim* $6y - 20 - y + 5 = 0 \longrightarrow y = 3$*. Substituïnt trobem* $x = 1$*. Així el circumentre és el pulnt* $(1, 3)$*.*

Ara només queda l'ortocentre. Cal trobar almenys dues altures. Com han de ser perpendiculars als costats seran paral·lels a les medianes:

$$4x + 2y + A = 0$$
$$2x + 6y + B = 0.$$

Per trobar A *i* B *cal que imposem que passin pels vèrtexs oposats. Així la primera haurà de passar pel punt* $(2, 6)$*, i la segona pel* $(4, 2)$*. Si ho imposem obtenim*

$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + A = 0 \longrightarrow A = -20$$
$$2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + B = 0 \longrightarrow B = -20$$

Si les simplifiquem (dividint entre 2) les dues altures seran

$$2x + y - 10 = 0$$
$$x + 3y - 10 = 0.$$

Resolent el sistema obtenim l'ortocentre. Altre cop per reducció (la segona per 2 menys la primera) obtenim

$$6y - 20 - y + 10 = 0 \longrightarrow y = 2.$$

Substituïnt trobem $x = 4$*, i l'ortocentre serà el punt* $(4, 2)$*. Com de fet és uns dels vèrtexs, fixeu-vos que això vol dir que el triangle és rectangle.*

Ara només queda comprovar que els tres punts que hem trobat, $(2, 8/3)$*,* $(1, 3)$ *i* $(4, 2)$ *estan alineats, la resta de preguntes són fàcils. Per veure-ho hem de veure si els vectors* $(1, 3) - (2, 8/3) = (-1, 1/3)$ *i* $(4, 2) - (1, 3) = (3, -1)$ *són múltiples un de l'altre. Efectivament, si multipliquem el primer per* -3 *obtenim el segon.*

Exercici 102: Pg. 143 n^{o}3.
Trobar n per tal que les rectes

$$r : x + 2y - 1 = 0$$
$$r' : y = -\frac{1}{2}x - n$$

distin $\sqrt{5}$ unitats.

Solució.
D'entrada hi haurà dues solucions, ja que la recta pot estar a "una banda o a l'altra", la simètrica.
Per trobar la distància entre dues rectes només cal trobar un punt de cada recta i un vector normal unitari d'una d'elles. De la primera agafem $P = (1, 0)$ i de la segona $Q = (0, -n)$. Com a vector normal unitari agafem el $(1, 2)/\sqrt{5}$, que és perpendicular a la primera. Així tenim:

$$d(r, r') = d(P, r') = PQ \cdot (1, 2)/\sqrt{5} = (-1, -n) \cdot (1, 2)/\sqrt{5} = \frac{-1 - 2n}{\sqrt{5}}.$$

Imposant que aquesta distància sigui $\sqrt{5}$ trobem

$$\sqrt{5} = \frac{-1 + 2n}{\sqrt{5}} \longrightarrow n = \frac{5 + 1}{-2} = -3.$$

Ara bé, també podem agafar el vector $-(1, 2)/\sqrt{5}$, que apunta cap a l'atra banda! Així obtindrem l'altre valor, que és $n = 2$.

Exercici 103: Pg. 144 n^{o}17.
Determineu l'àrea del triangle determinat per les rectes

$$r : 4x + y - 5 = 0$$
$$s : x + 3y - 4 = 0$$
$$t : 3x - 2y - 12 = 0.$$

Solució.
Cal trobar una altura i una base. Per fer-ho necessitarem tots vèrtexs, que obtindrem trobant la intersecció de les rectes de dos en dos resolent els següents tres sistemes:

$$P \longrightarrow \begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0, \end{cases}$$

$$Q \longrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

i

$$R \longrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ 4x + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Les solucions dels sistemes són $P = (1, 1)$, $Q = (4, 0)$ *i* $R = (2, -3)$, *respectivament. Ara busquem l'equació de la recta que conté l'altura perpendicular a* PQ *i que passa per* R. *La recta que conté el costat* PQ *és la recta* s. *Per tant, la recta que conté aquesta altura ha de ser perpendicular a* s *i tindrà la forma*

$$3x - y + A = 0.$$

Imposant que passi per R *trobem* $A = -9$, *i la recta és*

$$h : 3x - y - 9 = 0.$$

Ara només cal trobar el valor de l'altura. Per fer-ho, si T *és la intersecció entre les rectes* s *i* h, *l'altura serà* $\|\overrightarrow{RT}\|$. *Obtenim* T *resolent el sistema*

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0, \end{cases}$$

obtenint $10x - 27 - 4 = 0$, $10x - 31 = 0 \longrightarrow x = 31/10 \longrightarrow y = 3/10$,

$$T = \left(\frac{31}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

Així, l'altura serà

$$\|\overrightarrow{RT}\| = \left\|\left(\frac{11}{10}, \frac{33}{10}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{33}{10}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{11^2 + 33^2}}{10} = \frac{\sqrt{11^2 + (3 \cdot 11)^2}}{10} = \frac{11\sqrt{1^2 + 3^2}}{10} = \frac{11\sqrt{10}}{10}.$$

Per tant l'àrea serà

$$A = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \|\overrightarrow{RT}\|}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 11\sqrt{10}}{20} = \frac{11}{2}u^2$$

Exercici 104: Pg. 144 n^o 25.
Els vèrtexs corresponents al costat desigual d'un triangle isòsceles se situen als punts $A = (-1, -1)$ i $B = (4, 0)$. El tercer vèrtex, C, és un punt de la recta $r: x - 2y + 8 = 0$. Trobeu C, el perímetre i l'àrea del triangle.

Solució.
Per tal de trobar C tenim dues opcions (almenys).

Opció 1:
Imposem que el triangle sigui isòsceles i que $C \in r$. Per tal que es compleixi la segona condició, si diem $C = (x, y)$, aleshores C serà de la forma

$$C = \left(x, \frac{x+8}{2}\right) \quad o \text{ bé} \quad C = (2y - 8, y)$$

. Escollim la segona forma, ja que ens estalviem fraccions. Imposem ara que

$$d(A, C) = d(B, C) \Longleftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{(2y + 8 + 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(2y - 8 - 4)^2 + (y - 0)^2}$$

Elevant al quadrat les dues bandes marxen les arrels i queda una equació de primer grau per y (tots els termes de grau 2 marxen), i queda

$$y = \frac{47}{11} \qquad x = \frac{6}{11}$$

amb el que $C = \left(\frac{6}{11}, \frac{47}{11}\right)$.

Opció 2:
Com el triangle és isòsceles, la mediatriu del costat AB passa per C. Per tant, només cal trobar la recta, s, perpendicular al costat AB passant pel punt mig (recta que conté la mediatriu) i trobar la intersecció amb r.
El punt mig serà $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La recta s tindrà coma vector director un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (5, 1)$, per tant serà de la forma

$$s: \; 5x + y + D = 0,$$

perquè el vector $\overrightarrow{AB}$ és perpendicular a la mediatriu. Ara trobem D imposant que passi per M:

$$5\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + D = 0 \Longrightarrow D = -7.$$

Ara el punt C el trobarem resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{l} r: x-2y+8=0 \\ s: 5x+y-7=0, \end{array}\right\}$$

que té per solució $x=\frac{6}{11}$ i $y=\frac{47}{11}$, que és el punt d'abans.

Ara per trobar el perímetre i l'area només caldrà fer:

$$\begin{aligned} \textit{Perímetre} &= \|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|+\|\overrightarrow{CA}\| \\ &= \sqrt{5^1+1^2}+\sqrt{\left(\frac{6}{11}-4\right)^2+\left(\frac{47}{11}\right)^2}+\sqrt{\left(-1-\frac{6}{11}\right)^2+\left(-1-\frac{47}{11}\right)^2} = \\ &= \sqrt{26}+\frac{2\sqrt{3653}}{11}u \\ \grave{A}rea &= \frac{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{MC}\|}{2}=\frac{273}{22}u^2 \end{aligned}$$

Recordeu que, malgrat en matemàtiques les unitats no acostumen tenir-se en compte, hi ha correctors a secundària que penalitzen no incloure-les!
*Fixem-nos que la **Opció 1** no ens dóna el punt M i, per tant, haurem de trobar l'altura del triangle d'alguna manera. La més fàcil és potser trobant la distància del punt C a la recta que passa per A i B. Aquesta recta serà*

$$t: x-5y+D'=0,$$

i imposant que passi per B tindrem $D'=-4$. Per tant, l'altura la tindrem fent

$$h=d(C,M)=d(C,t)=\left|\frac{\frac{6}{11}-5\frac{47}{11}-4}{\sqrt{1^2+5^2}}\right|=\frac{21\sqrt{26}}{22}$$

Per tant l'area ens donaria

$$\grave{A}rea=\frac{21\sqrt{26}\overbrace{\sqrt{26}}^{\|\overrightarrow{AB}\|}}{22\cdot 2}=\frac{273}{22}u^2$$

Exercici 105: Examen final curs 18-19.
Determineu els punts de tall de la recta que passa pel punt $A=(3,2)$ i forma amb els eixos de coordenades un triangle d'àrea $\frac{25}{2}$.

Solució.

Opció 1: per geometria

Diguem $B = (b, 0)$ i $C = (0, c)$ als punts de tall amb els eixos. El triangle que ens queda és rectangle, i la seva àrea serà

$$\frac{25}{2} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Però b i c no poden ser qualsevol, ja que pertanyen a la mateixa recta que passa per A, això ens donarà una relació entre b i c. Trobem aquesta recta imposant que passi per A i C (A i B també aniria bé). Un vector director d'aquesta recta és el $(3-b, 2)$, per tant tindrem, en forma contínua:

$$\frac{x-3}{3-b} = \frac{y-2}{2}.$$

Ara trobem el punt de tall d'aquesta recta amb l'eix vertical i imposem que sigui el punt $(0, c)$. És a dir, quan $x = 0$ y ha de ser c:

$$c = 2\frac{-3}{3-b} + 2 = \frac{6}{b-3} + 2 = \frac{6}{b-3} + \frac{2(b-3)}{b-3} = \frac{6+2(b-3)}{b-3} = \frac{2b}{b-3}$$

Per tant, ens queda:

$$c = \frac{2b}{b-3}$$

Substituint a l'àrea tindrem

$$\frac{25}{2} = \frac{b \cdot 2b}{2(b-3)} \Longrightarrow 2b^2 - 25b + 75 = 0$$

$$b = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{4},$$

d'on tenim dues solucions:

$$b = \frac{15}{2}$$
$$b = 5$$

De la primera ens surt

$$c = \frac{15}{\frac{15}{2} - 3} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3},$$

i de la segona

$$c = \frac{10}{2} = 5.$$

Això donarà dues parelles de punts: $(5,0)$ *i* $(0,5)$*, o bé* $(\frac{15}{2},0)$ *i* $(0,\frac{10}{3})$.

Opció 2: per semblances

Si ens fem un dibuix, tenim dos triangles rectangles semblants (en posició de Tales de fet). Tots dos comparteixen vèrtex $(b,0)$*, el petit té un vèrtex a* $(3,2)$ *i el gran a* $(0,c)$*. Per tant, per semblances tindrem:*

$$\frac{2}{b-3} = \frac{c}{b} \Longrightarrow c = \frac{2b}{b-3},$$

que és la mateixa relació que hem obtingut abans i el problema s'acaba de la mateixa manera.

Exercici 106.

Trobeu

a) *l'equació general de la recta* r *que passa pel punt* $P = (0,-4)$ *i és paral·lela a la recta* $s : 3x - 2y + 6 = 0$.

b) *la distància entre les dues rectes anteriors*

c) *Escriu l'equació de la recta perpendicular a les dues anteriors i que passa pel punt* P.

d) *Calculeu el valor d'a per tal que les rectes* $x + 2y - 1 = 0$ *i* $ax - y + 3 = 0$ *formin un angle de* $60°$.

Solució.

a) *Com ha de ser paral·lela compartiran vector director (i vector perpendicular) i la recta serà de la forma* $3x - 2y + c = 0$*. Imposant que passi per* P *trobem* $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) + c = 0 \Longrightarrow c = -8$.

b) *Per trobar la distància entre elles podem calcular la distància d'un punt d'elles a l'altra. Podem fer servir* P*:*

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{\sqrt{13}}u$$

c) *La recta perpendicular serà de la forma $2x + 3y + d = 0$, ja que $(2, 3)$ és perpendicular a $(3, -2)$. Imposant que passi per P trobem $d = 12$.*

d) *Fent servir el producte escalar imposem que l'angle entre els vectors perpendiculars $(1, 2)$ i $(a, -1)$ sigui $60°$:*

$$(1, 2) \cdot (a, -1) = a - 2 = \|(1, 2)\| \cdot \|(a, -1)\| \cdot \cos(60)$$

Ara bé, fixem-nos que podríem tenir dues solucions, ja que els vectors $(a, -1)$ i $(1, 2)$ podrien fer una angle de $120°$ enlloc de $60°$. Com $\cos(60) = \frac{1}{2}$ i $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$, les solucions del problema seran els valors d'a que compleixin

$$a - 2 = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{a^2 + 1} \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right)$$

En elevar al quadrat el signe $-$ desapareix, i ens queda una única equació que, operant, queda:

$$3a^2 - 16a + 15 = 0$$

d'on

$$a = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Una solució correspon a l'angle de $60°$ i l'altra a l'angle de $120°$.

Exercici 107.

Els punts $A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ i $C = (5, -2)$ determinen un triangle. Determina'n l'àrea.

Exercici 108.

Donats els punts $A = (2, 1)$, $B = (0, 1)$ i $C = (3, -2)$ trobeu:

a) *L'equació vectorial de les rectes que contenen els costats del triangle ABC.*

b) *L'equació general de les rectes que contenen les mitjanes.*

c) *Trobeu el barcientre del triangle com a intersecció de les mitjanes. Comproveu que es troba a $1/3$ a mig camí entre del punt mig d'un segmenet cap al vèrtex oposat.*

Solució.

a) Les rectes tindran com a vectors directors els vectors

$$\vec{AB} = B - A = (-2, 0)$$
$$\vec{AC} = C - A = (1, -3)$$
$$\vec{BC} = C - B = (3, -3)$$

Els punts de pas podrien ser A, A i C:

$$\begin{aligned} &\textit{Segment } AB : (x, y) = (2, 1) + (-2, 0) \\ &\textit{Segment } AC : \ (x, y) = (2, 1) + \lambda_2 \, (1, -3) \\ &\textit{Segment } BC : \ (x, y) = (3, -2) + \lambda_3 \, (3, -3) \end{aligned}$$

b) Per trobar les rectes que contenen les mitjanes primer trobem els punts mitjos de cada segment:

$$M_{AB} = \frac{A+B}{2} = (1, 1)$$
$$M_{AC} = \frac{A+C}{2} = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$$
$$M_{BC} = \frac{B+C}{2} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$$

Els vectors directors seran:

$$M_{AB}\vec{C} = C - M_{AB} = (3, -2) - (1, 1) = (2, -3)$$
$$M_{AC}\vec{B} = B - M_{AC} = (0, 1) - \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$
$$M_{BC}\vec{A} = A - M_{BC} = (2, 1) - \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

i les rectes seran:

$$(x, y) = M_{AB} + \lambda(2, -3)$$
$$(x, y) = M_{AC} + \lambda\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$
$$(x, y) = M_{BC} + \lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Exercici 109.
Donada la recta $r: 2x-3y+4=0$:

a) Doneu-ne un vector director

b) L'equació vectorial de la recta paral·lela a r que passa pel punt $(1,1)$.

c) L'equació vectorial de la recta perpendicular a r que passa pel punt $(1,1)$.

Exercici 110: Pg. 132 n^o 20.
Classificar les rectes

Solució.

a) Un vector director de la segona recta és $v=(1,2)$, ja que està en contínua. El pendent d'aquesta recta serà doncs $\frac{2}{1}=2\neq\frac{1}{2}$. Com les rectes tenen pendents diferents seran secants.

b) La 2a equació és la primera multiplicada per -2. Per tant, les rectes són la mateixa perquè es tracta d'exactament la mateixa equació

c) Els gradients són proporcionals (i per tant també els vectors directors). Per tant, les rectes tindran la mateixa direcció. No obstant, el terme independent, C, no manté la mateixa proporció:

$$\frac{3}{1}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{7}{-3}$$

Per tant, les rectes no tenen cap punt en comú i seran paral·leles. Fixem-nos que això voldrà dir que el sistema

$$\left.\begin{array}{l}3x-3y+7=0\\ x-y-3=0\end{array}\right\}$$

no té solució (és un sistema incompatible).

d) Un vector director de la primera és el $(2,-3)$, i un de la segona és el $(2,-3)$ (girant $90°$ el gradient). Per tant, les dues rectes tenen la mateixa direcció. Per veure si es tracta de la mateixa recta o són paral·leles comprovem si un punt de pas de la primera, el $(1,2)$, ho és també de la segona:

$$3\cdot1+2\cdot2-6\stackrel{?}{=}0 \quad ✗$$

Com no es compleix les rectes seran paral·leles.

Exercici 111: Pg. 132 n^o 23.
Discutir la posició relativa de les rectes

$$qx - 2y + 4 = 0 \qquad x + (q-3)y - 7 = 0$$

Solució.
Mirem en quin cas les rectes tindran la mateixa direcció. En cas contrari segur que seran secants i es tallaran en un punt.
Començant trobant vectors directors de cadascuna d'elles: $(2, q)$ i $(q-3, -1)$ girant els gradients $90°$. Mirem ara per quin valor de q aquests vectors tenen la mateixa direcció, cosa que es complirà quan:

$$\frac{q}{2} = \frac{-1}{q-3} \Longrightarrow q(q-3) = -2 \Longrightarrow q^2 - 3q + 2 = 0 \Longrightarrow q = 1 \text{ o } q = 2$$

*Per tant, ja sabem que si $q \neq 1$ **i** $q \neq 2$ les dues rectes seran secants. Mirem què passa en cadascun d'aquests casos.*

- *Si $q = 1$ les dues rectes quedaran:*

  $$x - 2y + 4 = 0 \qquad x - 2y - 7 = 0$$

  Clarament les rectes són paral·lels ja que les equacions s'estan contradien i el sistema no pot tenir solució. Fixem-nos que també podem dir que els gradients són proporcionals però en canvi el terme independent no respecte aquesta proporció:

  $$\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{4}{-7}$$

  Per tant, si $q = 1$ les rectes seran paral·leles.

- *Si $q = 2$, les rectes seran*

  $$2x - 2y + 4 = 0 \qquad x - y - 7 = 0$$

  El gradients són proporcionals, però altre cop el terme independent no respecte aquesta proporció:

  $$\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} \neq \frac{4}{-7}$$

  Fixem-nos que això vol dir que els equacions s'estan contradient.
  Per tant, si $q = 2$, les rectes seran paral·leles.

Exercici 112: Pg. 135 n^o 25.
Determinar l'equació de la recta perpendicular a la recta $y = \frac{3}{4}x - 6$ i que passa pel punt d'intesecció de les rectes

$$x + y + 9 = 0 \qquad x - 2y + 3 = 0$$

Solució.
Comencem trobant el punt de tall de les dues rectes resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 9 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

La solució d'aquest sistema és el punt $(-7, -2)$. Busquem ara quina ha de ser la direcció de la recta. Com tenim el pendent de la primera recta, podem trobar-ne un vector director, ja que només haurà de complir

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4}$$

Per exemple, el vector $\vec{v} = (4, 3)$ servirà. Com la recta que ens demanen ha de tenir direcció perpendicular a $\vec{v}$, un vector director serà el vector $(3, -4)$. Com no ens demanen l'equació en cap forma concreta, podem donar-la en vectorial:

$$(x, y) = (-7, -2) + \lambda(3, -4)$$

Exercici 113.
Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs $A = (1, 1)$, $B = (3, -2)$ i $C = (0, 1)$.

Solució.
L'àrea d'un triangle la trobem multiplicant una base per l'altura entre 2 (és la meitat de la del rectangle que conté el triangle i tenen un costat en comú). La base és un dels costats, per exemple el costat AB, que serà:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \|(2, -3)\| = \sqrt{13}$$

Pel que fa a l'altura corresponent al costat AB, serà la distància entre el punt C i la recta que conté el costat AB; tenim una fórmula que ens la permet calcular fàcilment. Per trobar aquesta recta sabem que un vector director serà $\overrightarrow{AB} = (2, -3)$, i un punt de pas el punt A (el B també serviria). Per tant, tenint en compte que, en la forma general, els coeficients de x i y són el gradient (perpendicular al vector director), tindrem

$$r:\ 3x + 2y + c = 0$$

Per trobar c imposem que la recta passi per A:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Longrightarrow c = -5$$

Per tant, la recta serà:

$$r: \, 3x + 2y - 5 = 0$$

Ara, l'altura serà:

$$h = d(C, r) = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Per tant, l'àrea serà:

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot d(C, r)}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\cancel{\sqrt{13}}}}{2} = \frac{3}{2} u^2$$

L'àrea doncs serà $\frac{3}{2}$*. Sovint, per enfatitzar que es tracta d'una àrea, se sol incloure la unitat* u^2 *per indicar-ho.*

Exercici 114: Pg. 135 n^o 30.

Trobeu els valors de q que fan que les rectes

$$r: \, qx - y + 2 = 0 \qquad s: \, (q+2)x + (2q+1)y = 0$$

siguin perpendiculars.

Solució.

Podeu veure la solució en l'applet de Geogebra:

https://www.geogebra.org/m/gexddjqq

Com les rectes estan en forma general, fàcilment podem trobar els vectors gradient:

$$\text{Recta } r \longrightarrow \vec{u} = (q, -1)$$
$$\text{Recta } s \longrightarrow \vec{t} = (q+2, 2q+1)$$

Girant-los $90°$ *tenim vectors directors:*

$$\text{Recta } r \longrightarrow \vec{v} = (1, q)$$
$$\text{Recta } s \longrightarrow \vec{w} = (2q+1, -q-2)$$

Per imposar que les rectes siguin perpendiculars tenim diferents opcions:

Opció 1 *Imposar que els vectors directors siguin perpendiculars; és a dir, que el seu producte escalar sigui nul:*

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (1,q)\cdot(2q+1,-q-2) = 2q+1-q^2-2q = 0 \Longrightarrow \boxed{q=1} \text{ o } \boxed{q=-1}$$

Opció 2 *Imposar que els vectors gradients siguin perpendiculars:*

$$\vec{u}\cdot\vec{t} = (q,-1)\cdot(q+2,2q+1) = q^2+2q-2q-1 = 0 \Longrightarrow \boxed{q=1} \text{ o } \boxed{q=-1}$$

Opció 3 *Imposar que el gradient d'una recta i un vector director de l'altra siguin múltiples (tinguin la mateixa direcció):*

$$\vec{u} = \lambda\vec{w} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} q &= \lambda(2q+1) \\ -1 &= \lambda(-q-2) \end{aligned}\right\}$$

Resolent els sistema trobem dues solucions:

$$\begin{aligned} q = 1 \ i\ \lambda &= \frac{1}{3} \\ q = -1 \ i\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

Exercici 115: Posició del baricentre.

Suposeu que els punts A, B i C determinen un triangle. Demostreu que el seu baricentre (punt on es tallen les mitjanes) es troba a $\frac{1}{3}$ des del punt mig d'un costat cap al vèrtex oposat.

Solució.

Per trobar el punt on es tallen les mitjanes hauríem de trobar primer les equacions de les rectes. El més fàcil és escriure-les en vectorial per evitar treballar amb les coordenades dels punts (6 variables!), tot i que després sigui una mica més complicat trobar-ne la intersecció.

Comendem trobant els puns mitjos dels segments:

$$\begin{aligned} \textit{Punt mig } AB :\longrightarrow M_1 &= \frac{A+B}{2} \\ \textit{Punt mig } AC :\longrightarrow M_2 &= \frac{A+C}{2} \end{aligned}$$

Ara, les rectes en forma vectorial quedaran:

$$\begin{aligned}
\textit{Mitjana } AB \longrightarrow (x,y) &= M_1 + \lambda_1 \cdot \overrightarrow{M_1C} = \frac{A+B}{2} + \lambda_1 \cdot \left(C - \frac{A+B}{2}\right) \\
&= \lambda_1 \cdot C + (1-\lambda_1)\frac{A+B}{2} \\
\textit{Mitjana } AC \longrightarrow (x,y) &= M_2 + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{M_2B} = \frac{A+C}{2} + \lambda_2 \cdot \left(B - \frac{A+C}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ara trobem el punt on es tallen igualant les equacions i resolent per λ_1 i λ_2:

$$\frac{\cancel{A}+B}{\cancel{2}} + \lambda_1\left(\frac{2C-A-B}{\cancel{2}}\right) = \frac{\cancel{A}+C}{\cancel{2}} + \lambda_2\left(\frac{2B-A-C}{\cancel{2}}\right)$$

Desfent els parèntesis i operant arribem a l'equació:

$$(1-\lambda_1-2\lambda_2)\cdot B - (\lambda_1-\lambda_2)\cdot A + (2\lambda_1+\lambda_2-1)\cdot C = 0$$

Una opció és que els tres coeficients siguin els exactament 0, d'on traiem les equacions:

$$\left.\begin{array}{l}
1-\lambda_1-2\lambda_2 = 0 \\
\lambda_1-\lambda_2 = 0 \\
2\lambda_1+\lambda_2-1 = 0
\end{array}\right\}$$

De la segona equació trobem $\lambda_1 = \lambda_2$, i substituïnt a les altres obtenim:

$$\begin{aligned}
1-\lambda_1-2\lambda_1 = 0 &\Longrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3} \\
2\lambda_1+\lambda_1-1 = 0 &\Longrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Com totes dues equacions tenen la mateixa solució, $\lambda_1 = \frac{1}{3} = \lambda_2$, aquesta serà una solució del sistema. A més, com aquest només en pot tenir una (les rectes es tallen en únic punt, si els punts no estan alineats), aquesta ha de ser la solució del sistema. Per tant, el punt de tall serà:

$$M_1 + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{M_1C} = M_2 + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{M_2B}$$

i per tant el baricentre es troba a un terç de la distància entre el punt mig d'un segment i el vèrtex oposat.

Exercici 116: Pg. 144 n^{o}30.
El costat desigual d'un triangle isòscel·les es troba sobre la recta $y = x$, i el vèrtex oposat és el punt $C = (0, 4)$. Trobeu els altres vèrtexs.

Solució.
Podeu seguir les solucions proposades per aquest exercici a l'applet de geogebra:

https://www.geogebra.org/m/npkfzcdb

Opció 1 Solució proposada per Roger Castells.

1.1 Trobem primer el punt M que divideix el costat AB en dos. Com el segment AB es troba sobre la recta $r : y = x$, aquest punt serà la intersecció entre aquesta reta i la recta, s, perpendicular que passa per C. El vector gradient de s és un director de r, un vector director de r és el $(1, 1)$, ja que la recta té pendent 1. Per tant, la recta r té la pinta:

$$x + y + c = 0$$

Trobem c imposant que passi per $C = (0, 4)$:

$$0 + 4 + c = 0 \Longrightarrow C = -4$$

Ara, per trobar M només caldrà resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ x + y - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

d'on $M = (2, 2)$ (es pot resoldre fàcilment per substitució).

1.2 Ara, recordem que el punt B es troba a distància 2 de M sobre la recta r. Això ens defineix un triangle rectangle de hipotenusa MB, que medeix 2, i que està sobre la recta $y = x$. Com la recta té pendent 1, els angles aguts són de 45° i, per tant, els catets faran $\sqrt{2}$ cadascun. Per tant, per trobar B, només caldrà sumar $\sqrt{2}$ a cadascuna de les coordenades de M:

$$B = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

Procedint similarment (restant), trobem que

$$A = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

Opció 2 Solució proposada de Roger Olalla, Martina Muñoz, Marta Puig i Beth Muixí.

2.1 Trobem M de la mateixa manera que abans.

2.2 Ens preguntem quins punts de la recta $y = x$ estan a distància 2 de M. Amb això hauríem d'obtenir una equació la solució de la qual són els A i B que estem buscant. Un punt qualsevol de la recta $y = x$ és de la forma $Q = (x, x)$. Ara, només caldrà imposar que estigui a distància 2 de M:

$$\|\overrightarrow{MO}\| = 2 \iff \|O - M\| = 2 \iff \sqrt{(x-2)^2 + (x-2)^2} = 2$$

Fixem-nos que el que estem buscant de fet és la intesecció entre la circumferència de centre M i radi 2 amb la recta $y = x$.
Elevant al quadrat les dues bandes obtenim l'equació

$$2(x-2)^2 = 4$$

les solucions de la qual són $2 \pm \sqrt{2}$. Per tant, els punts que estem buscant seran:

$$B = \left(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right)$$
$$A = \left(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\right)$$

Opció 3 Solució propsoada per Àlex Palomas.
La idea consisteix en trobar el punt B imposant que la projecció del vector BC sobre la recta r valgui 2. Recordem que la projecció d'un vector sobre una direcció s'obté fent el producte escalar entre el vector i el vector que dóna la direcció normalitzat (amb mòdul 1). Per tant, els punts els trobarem fent:

3.1 Trobem un vector, $\vec{v}$, director de la recta que tingui mòdul 1 i apunti de B cap a M. Aleshores tindrem que

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{1} \cdot \cos\theta = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \cos\theta = 2$$

El vector $(-1, -1)$ normalitzat servirà. Com aquest té mòdul $\sqrt{2}$, el vector normalitzat serà:

$$\vec{v} = \frac{(-1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ara només cal calcular el producte escalar i igualar a 2.

3.2 Com el punt B es troba sobre la recta $y = x$, aquest serà de la forma $B = (b, b)$. Per tant, l'equació serà:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = 2 \Longrightarrow (C - B) \cdot \vec{v} = 2 \Longrightarrow$$

$$(-b, 4-b) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$$

$$\frac{b\sqrt{2} - (4-b)\sqrt{2}}{2} = 2 \Longleftrightarrow \frac{(2b-4)\sqrt{2}}{2} = 2 \Longleftrightarrow (b-2)\sqrt{2} = 2 \Longleftrightarrow b = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 -$$

Per tant, el punt serà:

$$B = \left(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right)$$

3.3 Fent el mateix amb els vectors $\overrightarrow{AC}$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ trobem $A = (2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

Opció 4 Opció alternativa

4.1 Trobem $M = (2, 2)$ com en opcions anteriors.

4.2 Trobem un vector director de la recta r que tingui mòdul 1, com abans:

$$\vec{v} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

4.3 Ara, podem obtenir A i B simplement allargant el doble aquest vector i posant-lo sortint de M:

$$B = M + 2\vec{v} = (2,2) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right)$$

$$A = M - 2\vec{v} = \cdots = \left(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\right)$$

Exercici 117.

Determineu el punt d'intersecció entre la recta en forma paramètrica

$$r : \begin{cases} x = -4k - 6 \\ y = 2k + 2 \end{cases}$$

i la recta vertical

$$x = 9$$

Solució.
Substituint $x = 9$ a l'equació de la recta r trobem $k = -\frac{15}{4}$. El valor de y corresponent serà: $y = -\frac{11}{2}$. Per tant el punt serà $(9, -\frac{11}{2})$.

Exercici 118: Intersecció entre rectes.
Determineu l'equació general associada a la recta r expressada en forma vectorial

$$r: \ (x, y) = (2, -3) + \lambda(-4, 7)$$

Determineu també el seu punt d'intersecció amb l'eix x.

Solució.
Trobem primer un vector perpendicular a la recta, per exemple canviant l'ordre de les coordenades del vector director i el signe d'una d'elles: $(7, 4)$. L'equació general serà de la forma $7x + 4y + C = 0$. Per trobar C imposem que passi pel punt $(2, -3)$:

$$7 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + C = 0 \Longrightarrow C = -2,$$

i l'equació general és

$$7x + 4y - 2 = 0.$$

Per trobar el tall amb l'eix ho podem fer tant fent servir la forma vectorial com la general. A la vectorial hauríem de trobar primer el valor del paràmetre λ quan $y = 0$ (eix x). És més fàcil amb la general. Fent $y = 0$ trobem $x = \frac{2}{7}$. El punt de tall és doncs $(\frac{2}{7}, 0)$.

Exercici 119: Trobar el circumcetre.
Determineu les coordenades del circumcentre de vèrtexs $A = (8, 9)$, $B = (6, -3)$ i $C = (-4, 6)$.

Solució.
El circumcentre és el punt on es tallen les mediatrius d'un triangle, que són les rectes perpendiculars a cada costat passant pel punt mig d'aquest. Només caldrà trobar-ne dos i trobar el seu punt de tall. La tercera mediatriu hauria de tallar les altres al mateix punt.
Trobem les mediatrius dels costats AB i BC, per exemple. Les podem escriure en forma general, que és la forma més senzilla alhora de trobar interseccions, ja que només cal resoldre un sistema.
Un vector perpendicular a la mediatriu AB és el mateix vector

$$\vec{AB} = B - A = (-2, -12)$$

Podem canviar el sentit al vector perquè les coordenades ens quedin positives i dividir entre 2 per així facilitar els càlculs. Així la mediatriu del segment AB serà de la *forma $x+6y+C=0$. Per trobar C necessitem un punt de pas, que és el punt mig del segment AB:*

$$\frac{A+B}{2}=(7,3).$$

Substituint trobem $C=-25$.
Fem el mateix per trobar la mediatriu del costat BC. Un vector perpendicular és $(-10,9)$, i un punt de pas és el $(1,\frac{3}{2})$. Amb això trobem l'equació general de la mediatriu del costat BC:

$$-10x+9y-\frac{7}{2}=0=0.$$

Per trobar el circumcentre només cal trobar el punt de tall entre les rectes resolent el sistema

$$\begin{cases} x+6y-25=0 \\ -10x+8y-\dfrac{3}{2}=0, \end{cases}$$

que dóna

$$\left(\frac{191}{68},\frac{503}{136}\right).$$

Exercici 120: Posició relativa de rectes.
Estudieu la posició relativa de les rectes

$$\begin{cases} 2x=2y+5 \\ x+2=(k-3)y \end{cases}$$

en funció del paràmetre k.

Solució.
Bàsicament hi ha dues opcions, o es tallen o no es tallen. En cas que no es tallin, seran la mateixa o bé paral·leles. Això es pot determinar de vàries maneres.
Opció 1:
Des del punt de vista geomètric, només cal mirar l'angle que formen els vectors directors. En cas que no es tallin l'angle serà de 0° o 180°. Si l'angle no és ni 0 ni 180 aleshores es tallaran.
Primer trobem els dos vectors directors. Escrivint-les en forma general tenim

$$\begin{cases} 2x-2y-5=0 \\ x-(k-3)y+2=0 \end{cases}$$

Els vectors $(2,-2)$ i $(1,-(k-3))$ són vectors perpendiculars a les rectes. Per tant, els vectors directors seran $(2,2)$ i $(k-3,1)$. El primer el podem dividir entre 2 per *facilitar els càlculs, i serà el $(1,1)$. Mirem l'angle entre aquests vectors fent servir la relació que hi ha entre el producte escalar i l'angle, θ, entre dos vectors:*

$$(1,1)\cdot(k-3,1) = \|(1,1)\|\cdot\|(k-3,1)\|\cos\theta.$$

Les rectes no es tallaran quan $\cos\theta = 1$, i per tant haurem de resoldre l'equació

$$(1,1)\cdot(k-3,1) = \|(1,1)\|\cdot\|(k-3,1)\| \Longrightarrow k+4 = \sqrt{2}\sqrt{(k-3)^2+1},$$

que només té una solució $k=4$. En aquest cas, caldrà veure si les rectes són la mateixa o bé són paral·leles. Substituint $k=4$ ens queden les rectes

$$\begin{cases} 2x-2y-5=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$$

Les rectes no són la mateixa i per tant són paral·leles (fixeu-vos que els vectors perpendiculars $(2,-2)$ i $(1,-1)$ són proporcionals). Això es pot veure a vista, ja que la parta literal de la segona equació és la de la primera dividida entre 2, però el terme independent no. També es veure agafant qualsevol punt d'una de les rectes i comprovant que l'altra no hi passa. Per exemple, la segona recta passa pel punt $(0,2)$ però la primera no perquè aquest punt no compleix la primera equació.
Finalment, les rectes es tallaran si $k\neq 4$. Podem destacar el cas en que les rectes són perpendiculars. Això passa quan $\cos\theta = 0$, i per tant ens queda l'equació

$$(1,1)\cdot(k-3,1) \Longrightarrow k+4=0,$$

que té solució $k=-4$.
Opció 2:
Agrumentant de la mateixa manera, les rectes es tallaran quan els vectors directors siguin linealment independents: és a dir, quan no siguin "múltiples". Dos vectors directors els podem trobar girant els vectors perpendiculars $90°$: $(2,2)$ i $(-1,k-3)$. Per tal que siguin un múltiple de l'altre, si mirem la primera coordenada, haurem de multiplicar el segon per -2, ja que $-1\cdot(-2)=2$. La segona coordenada també ho haurà de ser: $(k-3)(-2)=2$, que passa quan $k=-4$. Per veure que són paral·leles quan $k=-4$ ho podem fer igual que abans.
Opció 3:
Les dues rectes es tallaran quan el sistema sigui compatible determinat. En tractar-se d'un sistema de només dues incògnites, això passarà quan

$$2\big(-(k-3)\big)-(-2)\cdot 1 \neq 0,$$

cosa que passa quan $k\neq 4$.

Exercici 121: Recta perpendicular.

Determineu l'equació de la recta perpendicular a la recta $(x, y) = (4, -5) + \lambda(3, -2)$ *i que passa pel punt* $(3, -6)$*. Escriviu-la en forma explícita.*

Solució.

Altre cop tenim diferents opcions.

Opció 1:

Escrivim la recta que ens demanen primer en forma vectorial i després la passem a explícita. Necessitem un punt de pas, el $(3, -6)$*, i un vector director. Aquest segon serà perpendincular a* $(3, -2)$*, que és el vector director de la recta* r*. Només caldrà girar-lo* $90°$ *i obtindrem la recta que ens demanen en forma vectorial:*

$$(x, y) = (3, -6) + \lambda(2, 3).$$

Per passar-la a forma explícita només cal que aillem λ *de les dues components i igualem:*

$$\lambda = \frac{x-3}{2}$$
$$\lambda = \frac{y+6}{3}$$

Igualant obtenim

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{3}$$

i aillant y

$$y = \frac{3}{2}(x-3) - 6$$

Opció 2:

Escrivim la recta en forma general i després la passem a explícita. Un vector perpendicular a la recta que ens demanen és un vector director de la recta r*. Per tant, la recta serà de la forma*

$$3x - 2y + C = 0.$$

Trobem C *imposant que passi pel punt* $(3, -6)$*:* $C = -21$*. Per tant, en forma explícita la recta serà*

$$y = \frac{3x-21}{2}.$$

Evidentment, ens dóna el mateix resultat (només cal operar una mica el resultat de la primera opció).

Exercici 122: Trobar el punt simètric.

Determineu el punt simètric de $Q = (-4, 2)$ *respecte la recta* $r : (x, y) = (4, -1) + \lambda(-3, 4)$

Solució.

Tenim diferents opcions.

Opció 1:

Segurament la més ràpida. Si al punt Q *li sumem un vector de mòdul el doble de la distància entre* Q *i* r *i que sigui perpendicular a aquesta tindrem el punt que ens demanen.*

Per trobar un vector perpendicular simplement girem $90°$ *el vector director de la recta:* $(4, 3)$*. Ara trobem la distància entre* Q *i* r*. Si volem aplicar la famosa fórmula, haurem de tenir la recta en forma general. Aïllant* λ *a les dues coordenades i fent igualació tenim*

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{4},$$

i la forma general de la recta és

$$4x + 3y - 13 = 0$$

Ara podem trobar la distància entre Q *i* r

$$d(Q, r) = \frac{|4 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 - 13|}{\sqrt{16+9}} = \frac{23}{5}$$

Ara, per tal el mòdul de vector perpendicular sigui el doble de la distància entre la recta i el punt Q*, simplement el normalitzem (fem que tingui mòdul 1 dividint entre el seu mòdul) i multipliquem per* $d(Q, r)$*. El seu mòdul és* $\sqrt{16+9} = 5$*, per tant el simètric serà*

$$(-4, 2) + 2 \cdot d(Q, r) \cdot \frac{(4, 3)}{5} = (-4, 2) + \frac{2 \cdot 23}{5 \cdot 5}(4, 3) = \left(\frac{84}{25}, \frac{188}{25}\right).$$

Opció 2:

Més laboriosa però contructiva: al punt Q *li sumem dues vegades el vector que va de* Q *a la intersecció de la recta perpendicular a* r *passant per* Q *i* r*. És a dir, considerem la recdta* s *perpendicular a* r *i que passa per* Q*. Trobem la intersecció* (R) *entre* r *i* s*. El punt simètric serà*

$$Q + 2\vec{QR}$$

Trobem primer la recta s. Un vector perpendicular a s l'obtenim-4 girant $90°$ el vector $(4,3)$. L'equació general d's serà de la forma

$$3x - 4y + C = 0.$$

Trobem C imposant que passi per Q:

$$3(-4) - 4 \cdot 2 + C = 0 \Longrightarrow C = 20.$$

Ara trobem el punt R, intersecció de s i r resolent el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

que té per solució

$$R = \left(-\frac{8}{25}, \frac{119}{25}\right)$$

Per tant, el punt simètric serà

$$Q + 2 \cdot \vec{QR} = Q + 2 \cdot (R - Q) = 2R - Q = \left(-\frac{84}{25}, \frac{188}{25}\right)$$

Exercici 123: Vectors formant un angle determinat.
Determineu els dos vectors que formen $36°$ amb el vector $(-0.2, 1.7)$ i que tenen mòdul 1.

Solució.

Opció 1 *Suposem que els vectors que ens demanen tenen coordenades (a,b). El producte escalar ens relaciona vectors amb els angles que formen:*

$$(a,b) \cdot (-0.2, 1.7) = \|(a,b)\| \cdot \|(-0.2, 1.7)\| \cos(36°).$$

A aquesta equació hi hem d'afegir l'equació

$$\|(a,b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Això ens dóna un sistema d'equacions no lineal:

$$\left.\begin{aligned} -0.2a + 1.7b = 1.34 \\ \sqrt{a^2+b^2} = 1 \end{aligned}\right\}$$

amb dues solucions. Amb una mica de paciència es pot veure que les solucions són

$$\begin{cases} a = -0.678 \\ b = 0.734 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0.489 \\ b = 0.872 \end{cases}$$

La qual cosa ens dóna els dos vectors

$$(-0.678, 0.734) \qquad (0.489, 0.872)$$

Opció 2 *Alternativament, podem fer servir complexos per trobar-los. Passem primer el vector a polar: El mòdul del complex serà*

$$\sqrt{0.2^2 + 1.7^2} = 1.712$$

i l'angle

$$\theta = \arctan\left(\frac{1.7}{-0.2}\right) + 180^\circ = 96.71^\circ$$

Fixem-nos que cal sumar 180° *perquè el complex es troba al segon quadrant. Ara només caldrà dividir pels complexos* 1.712_{36° *i* 1.712_{-36° *per tal de girar* 36° *i obtenir un complex de mòdul* 1.
Així obtindrem:

$$\frac{1.712_{96.71^\circ}}{1_{36^\circ}} = 1_{132.71^\circ}$$
$$\frac{1.712_{96.71^\circ}}{1_{-36^\circ}} = 1_{60.71^\circ}$$

Si ara els passem a binòmica trobarem els vectors girats:

$$\begin{aligned} 1_{132.71^\circ} &= 1 \cdot (\cos(132.71) + i\sin(132.71)) = \\ &= -0.678 + 0.734i \\ 1_{60.71^\circ} &= 1 \cdot (\cos(60.71) + i\sin(60.71)) = \\ &= 0.489 + 0.872i \end{aligned}$$

5.3 Rectes al pla i circumferències

Exercici 124: Pg. 168 n^o 4.
Trobeu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A = (1, 2)$ i $B = (3, 4)$ i té radi 4.

Solució.
D'entrada observem que de fet hi haurà dues solucions! I també més d'una opció per trobar-les

Opció 1: *Com sabem el radi, només ens caldria trobar al centre. Aquest estarà a distància 4 dels punts A i B; fixem-nos que aquest punt no és únic, n'hi ha dos. Si anomenem $C = (x, y)$ al centre, aquest haurà de complir*

$$d(A, C) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 4$$
$$d(B, C) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 4$$

D'aquí s'obté un sistema d'equacions bastant molest de resoldre. Mirem doncs una altra opció.

Opció 2:
Observem que el triangle ABC és isòsceles; els costats iguals valen 4 (el radi de la circumferència), i el desigual mesura $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Si considerem $M = \frac{A+B}{2} = (2, 3)$ el punt mitjà del segment AB, aleshores els segment MC és l'atura d'aquest triangle. Com el triangle AMC és rectangle, la hipotenusa és 4 i un catet val $\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \sqrt{2}$, l'altre valdrà $\|\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{16-2} = \sqrt{14}$. Per tant, el centre que busquem serà un punt que està a distància $\sqrt{14}$ de M en la direcció perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$, $(2, -2)$ o bé $(-2, 2)$. Ara necessitem que aquests vector tinguin mòdul $\sqrt{14}$. Per fer-ho, els normalitzem (dividint entre el seu mòdul, que és $2\sqrt{2}$) i multipliquem per $\sqrt{14}$. Així obtindrem dues opcions pel vector MC:

$$\sqrt{14} \cdot \frac{(2, -2)}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{7}, -\sqrt{7})$$
$$\sqrt{14} \cdot \frac{(-2, 2)}{2\sqrt{2}} = (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$$

Per tant, C serà

$$C = M + (\sqrt{7}, -\sqrt{7}) = (2 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7})$$
$$C = M + (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) = (2 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7})$$

Finalment, obtenim l'equació de les dues circumferències,

$$(x-2-\sqrt{7})^2+(y-3+\sqrt{7})^2=16$$
$$(x-2+\sqrt{7})^2+(y-3-\sqrt{7})^2=16.$$

Exercici 125: Pg. 168 n^o 5.
Trobeu l'equació de la circumferència amb centre $C=(2,-5)$ *i que passa pel punt* $P=(-1,-3)$.

Solució.
Només ens cal trobar el radi, que és $d(P,C)=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$. *Per tant, la circumferència serà*

$$(x-2)^2+(y+5)^2=13.$$

Exercici 126: Pg. 168 n^o9.
Escriure l'equació de les circumferències següents:

a) De centre $(2,-4)$ *i tangent a l'eix de les abscisses.*

b) De centre $(-5,2)$ *i tangent a l'eix d'ordenades.*

Solució.
En tots dos casos ens cal saber el radi. Com la circumferències han de ser tangents als eixos els radis seran la distància del centre als eixos. Aquestes distàncies són precisament el valor de les coordenades del centre. Així, pel primer cas el radi serà la distància del centre a l'eix horitzontal, que és la coordenada y *del punt* $(2,-4)$ *(en valor absolut!), 4. En el segon cas el radi serà la distància del punt* $(-5,2)$ *a l'eix vertical, que és la coordenada* x *d'aquest punt (en valor absolut), 5. Per tant, les circumferències que ens demanen seran*

$$(x-2)^2+(y+4)^2=16$$
$$(x+5)^2+(y-2)^2=25.$$

Exercici 127: Pg. 169 n^o 10.
Trobeu l'equació de la circumferència que és tangent a la recta $r:\ y=x+1$ *al punt d'abscissa* 3 *i passa pel punt* $A=(3,-1)$.

Solució.
Opció 1:
Busquem una equació de la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0,$$

tenim per tant 3 incògnites.
Que sigui tangent a la recta $y = x + 1$ al punt d'abscissa 3 vol dir que ha de ser tangent a la recta al punt que té $x = 3$, és a dir, al punt $(3, 4)$. Per tant, ja tenim dos punts de pas, el $(3, 4)$ i el $(3, -1)$. Imposant que la circumferència passi per aquests dos punts obtenim dues equacions:

$$(3-a)^2 + (4-b)^2 - R^2 = 0$$
$$(3-a)^2 + (-1-b)^2 - R^2 = 0.$$

Restant les dues equacions obtenim

$$(4-b)^2 - (-1-b)^2 = 16 - 8b - 1 - 2b = 0 \longrightarrow b = \frac{3}{2}.$$

Necessitem més condicions per trobar a i R. Com ha de ser tangent a la recta aquesta, sabem que el centre ha de d'estar contingut a la recta que és perpendicular a la recta $y = x + 1$ i que passa per $(3, 4)$. Escrita en forma explícita, aquesta recta és de la forma $y = -x + D$, ja que ha de ser paral·lela a la bisectriu del 4rt quadrant. Trobem D imposant que passi per $(3, 4)$: $D = 7$. Una altra opció és la següent: escrivint la recta $y = x + 1$ en forma general obtenim $y - x - 1 = 0$. Girant $90°$ el vector $(1, -1)$ obtenim un vector perpendicular a la recta que estem buscant, i per tant, en forma general, serà de la forma $y + x + M = 0$. Imposant que passi per $(3, 4)$ obtenim $M = -7$, i la recta és la mateixa que havíem trobat per l'altre mètode.
El fet que el centre hagi d'estar a la recta $y = -x + 7$ ens dóna una relació entre a i b:

$$b = -a + 7.$$

Com ja tenim b d'aquí obtenim a:

$$a = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

Ens falta trobar el radi. El podríem obtenir aïllant R a qualsevol de les dues equacions ja que ja sabem els valors d'a i b. També podem trobar R calculant la distància entre el centre i qualsevol dels dos punts de pas, per exemple

$$R = \left\| (3,4) - \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Per tant la circumferència quedaria

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} = 0.$$

Opció 2:

El punt d'abscisses 3 de la recta és el punt $B = (3, 4)$. *Sabem que el centre està situat a la recta perpendicular a* r *i que passa per* $B = (3, 4)$, *que és* $x + y - 7 = 0$. *Busquem ara un punt d'aquesta recta que estigui a la mateixa distància d'A que de* B. *Com, escrit en coordenades, un punt de la recta és de la forma* $T = (x, 7 - x)$, *la condició*

$$d(T, A) = d(T, B)$$

es pot escriure com l'equació

$$(x-3)^2 + (7-x+1)^2 = (x-3)^2 + (7-x-4)^2,$$

que té només una solució i és $x = \frac{11}{2}$. *Per tant el centre serà*

$$C = \left(\frac{11}{2}, 7 - \frac{11}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

El radi el trobem com abans, calculant la distància $d(C, A) = \frac{5}{\sqrt{2}}$, *i l'equació queda com abans.*

Exercici 128: Circumferència circumscrita, Pg. 169 n^o 11.

Trobeu l'equació de la circumferència circumscrita al triangle de vèrtexs $A = (1, 1)$, $B = (-2, 0)$ *i* $C = (0, -3)$.

Solució.

Ens cal trobar el circumcentre del triangle, que és el punt on es tallen les mediatrius (perpendiculars a les bases passant pel punt mitjà). Amb què en trobem dues ja tindrem prou, perquè la tercera passarà pel mateix punt. Per exemple, trobem les equacions de les rectes que contenen les mediatrius dels segments AB *i* BC. *Els vectors* $\overrightarrow{BA} = (3, 1)$ *i* $\overrightarrow{BC} = (2, -3)$ *són perpendiculars a aquestes rectes, i com a punts de pas tindrem els punts mitjants* $M = \frac{A+B}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *i* $N = \frac{B+C}{2} = (-1, -\frac{3}{2})$, *les rectes seran*

$$\begin{array}{lll} 3x + y + D = 0 \quad \longrightarrow & 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} + D = 0 & 3x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + D' = 0 \quad \longrightarrow & 2(-1) - 3\left(-\dfrac{3}{2}\right) + D' = 0 & 2x - 3y - \dfrac{5}{2} = 0 \end{array}$$

Ara el circumcentre el trobarem resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y - \dfrac{5}{2} = 0 \end{array}\right\}$$

que té per solució el punt

$$E = \left(-\frac{1}{22}, -\frac{19}{22}\right).$$

Ara només ens caldrà trobar el radi. Com la circumferència que estem buscant és la circumscrita, passa pels tres vèrtexs; per tant, el radi serà la distància del centre a qualsevol dels vèrtexs:

$$R = d(E, A) = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{22}\right)^2 + \left(1 + \frac{19}{22}\right)^2} = \sqrt{\frac{23^2 + 41^2}{22^2}},$$

i per tant la circumferència que ens demanen serà

$$\left(x + \frac{1}{22}\right)^2 + \left(y + \frac{19}{22}\right) = \frac{23^2 + 41^2}{22^2}$$

Exercici 129: Pg. 169 n^{o}12.

Trobeu l'equació de la circumferència de centre $C = (2, -3)$ i tangent a la rectda $r : 3x + 4x + 1 = 0$.

Solució.

Només ens cal saber el radi, que serà la distància del punt C a la recta r. Fent servir la fórmula de la distància d'un punt a una recta obtenim

$$R = d(C, r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1.$$

Per tant, la circumferència que ens demanen serà

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1.$$

Exercici 130: Pg. 170 n^o 20.

Trobeu les equacions de les rectes tangents a la circumferència

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

que passen pel punt exterior $P = (-2, 0)$.

Solució.

Opció 1:

Calculem el centre i el radi de la circumferència, escrivint la seva equació de la següent manera

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0.$$

Per tant, el seu centre és $C = (3, 2)$ i el seu radi és $R = 2$.
Si diem M M' els punts de tangències, els triangles CMP i $CM'P$ són rectangles, essent els angles rectes els coresponents als punts M i M'. Les hipotenuses d'aquests triangles són la mateixa i és el segment CP, que té mòdul $\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Per tant, per Pitàgores trobem que els catets MP i $M'P$ valen $\sqrt{29-4} = 5$. Busquem doncs quins punts de la circumferència estan a distància 5 del punt P. Això és equivalent a trobar la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{l}(x-3)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0\\ (x+2)^2 + y^2 = 25\end{array}\right\}$$

Aïllant y de la segona equació i substituint a la primera trobem les solucions

$$x = 3 \qquad x = \frac{47}{29},$$

que ens donen els punts

$$M = (3, 0)$$
$$M' = \left(\frac{47}{29}, \frac{100}{29}\right).$$

Per tant, en forma vectorial, obtenim les rectes

$$(x, y) = P + \lambda \cdot \overrightarrow{PM} = (-2, 0) + \lambda(5, 0)$$
$$(x, y) = P + \lambda \cdot \overrightarrow{PM'} = (-2, 0) + \lambda\left(\frac{105}{29}, \frac{100}{29}\right)$$

Opció 2: *Les rectes que estem buscant han de tallar una, i només una, vegada la circumferència. Escrivint una d'ells en forma explícita i imposant que passi pel punt P obtenim que és de la forma $y = mx + 2m = m(x + 2)$. Ara hem d'imposar que el sistema*

$$\left.\begin{array}{l}x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0\\ y = m(x+2)\end{array}\right\}$$

tingui només una solució. Fent substitució obtenim l'equació de segon grau

$$x^2 + m^2(x+2)^2 - 6x - 4m(x+2) + 9 = 0,$$

que operant una mica i agrupant queda

$$(m^2+1)x^2 + 2\left(2m^2 - 2m - 3\right)x + 4m^2 - 8m + 9 = 0.$$

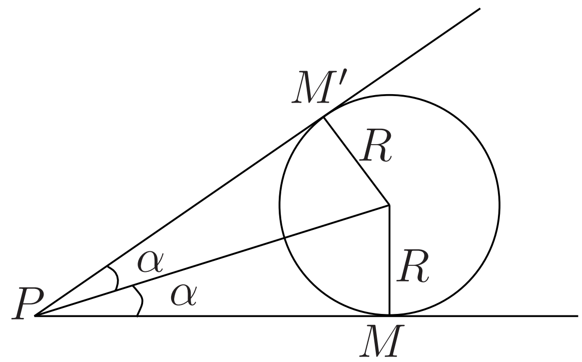


Figura 5.1: Rectes tangets a la circumferència passant per un punt

Per tal que només tingui una solució necessitem que el discriminant sigui nul:

$$\Delta = \underbrace{\left(2\left(2m^2-2m-3\right)\right)^2}_{b^2} - 4\underbrace{\left(m^2+1\right)}_{a}\underbrace{\left(4m^2-8m+9\right)}_{c} = 0.$$

Operant, l'equació queda

$$21m^2 - 20m = 0,$$

d'on $m = 0$ *i* $m = \frac{20}{21}$*. Substituint ens queden les equacions de les rectes*

$$y = 0$$
$$y = \frac{20}{21}x + \frac{40}{21}.$$

Fixem-nos que són les mateixes rectes que ens havien sortit abans, ja que $\frac{100}{105} = \frac{20}{21}$.

Opció 3:

Fixem-nos que el punt P *queda a la mateixa alçada que el punt més baix de la circumferència. En efecte, si al centre* $(3,2)$ *li restem el radi en queda el punt* $M = (3,0)$*, que està a la mateixa alçada que el punt* $P = (-2,0)$*. Per tant, una de les rectes serà la recta* $y = 0$*. Per trobar l'altra, només cal calcum el seu pendent. Segons la figura el pendent de la recta serà* $\tan(2\alpha)$*. Com sabem que* $\tan(\alpha) = \frac{R}{PM} = \frac{2}{5}$*, aplicant la fórmula de l'angle dobe obtenim*

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{21}{25}} = \frac{20}{21},$$

i l'altra recta serà de la forma $y = \frac{20}{21}x + n$ *i, imposant que passi per* P *obtenim* $n = \frac{40}{21}$*, i la recta serà* $y = \frac{20}{21}x + \frac{40}{21}$*.*

Exercici 131.

Trobeu l'equació de la circumferència circumscrita al triangle $A = (0, -3)$, $B = (-3, 0)$ i $C = (1, 1)$ de dues maneres:

a) Trobant el circumcentre del triangle

b) Imposant que passi pels vèrtexs

Solució.

a) Com el problema 128

b) L'equació de la circumferència serà de la forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

on (a, b) és el centre i R el radi. Cal trobar aquestes tres incògnites imposant que la circumferència passi pels tres punts. Això porta al un sistema de tres equacions i tres incògnites:

$$\left.\begin{aligned} (0-a)^2 + (-3-b)^2 = R^2 \\ (-3-a)^2 + (0-b)^2 = R^2 \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 = R^2 \end{aligned}\right\}$$

Exercici 132: Posició relativa recta-circumferència.

Determineu la posició relativa de la recta $2x-3y+4 = 0$ respecte de la circumferència de centre $(4, 3)$ i radi $r = 5$.

Solució.

Opció 1: *mirem el nombre de solucions del sistema.*

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 4 = 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \end{array}\right\}$$

Opció 2: *calcular la distància del centre a la recta.*

$$d(C, r) = \frac{|2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Com

$$d(C, r) < R$$

aleshores són secants (es tallen en dos punts).

Exercici 133: Circumferència circumscrita.
Trobeu l'equació de la circumferència circumscrita al triangle $A = (1, 1)$, $B = (0, 0)$ i $C = (2, -5)$. Per fer-ho, trobeu primer el circumcentre (centre de la circumferència que serà el punt de tall de les mediatrius), després el radi i finalment l'equació.

Exercici 134: Circumferència tangent a una recta i centre en un altra.
Trobeu l'equació de circumferència de radi 2 sabent que el seu centre es troba a la recta $2x - y + 3 = 0$ i és tangent a la recta $x - y - 3 = 0$.

Solució.
Podeu seguir la solució proposada per aquest exercici amb l'applet de Geogebra:

https://www.geogebra.org/m/dz98qd2q

Com sabem el radi de la circumferència només ens caldrà trobar-ne el centre: $C = (a, b)$. Com aquest es troba a la recta $r : 2x - y + 3$, aleshores, aïllant y, el punt C serà de la forma haurà de ser de la forma $C = (a, 2a + 3)$.
Com la recta $s : x - y - 3 = 0$ ha de ser tangent a la circumferència, la distància del centre de la circumferència a la recta s serà el radi. Per tant, volem que:

$$d(C, s) = 2$$

Ara podem fer servir la fórmula de la distància a un punt per calcular quin haurà de ser el valor de a. Fixem-nos que la recta s ja ens la donen en forma general, per tant la distància quedarà:

$$d(C, s) = \frac{|a - (2a + 3) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-a - 6|}{\sqrt{2}} = 2 \Longrightarrow |-a - 6| = 2\sqrt{2}.$$

Ara, fixem-nos que, com hi ha un valor absolut, aquesta equació tindrà dues opcions:

$$-a - 6 = 2\sqrt{2} \Longrightarrow a = -6 - 2\sqrt{2}$$
$$-a - 6 = -2\sqrt{2} \Longrightarrow a = -6 + 2\sqrt{2}$$

Per il·lustrar-ho més fàcilment, observeu que això és el mateix que dir que

$$|x| = 1 \Longrightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

Aquest dos valors proporcionen dos possible centres diferents:

$$C = \left(-6 - 2\sqrt{2}, 2\left(-6 - 2\sqrt{2} + 3\right)\right) = \left(-6 - 2\sqrt{2}, -9 - 4\sqrt{2}\right)$$
$$C' = \left(-6 + 2\sqrt{2}, 2\left(-6 + 2\sqrt{2} + 3\right)\right) = \left(-6 + 2\sqrt{2}, -9 + 4\sqrt{2}\right)$$

Per tant, les dues possibles circumferències seran:

$$\left(x+6+2\sqrt{2}\right)^2+\left(y+9+4\sqrt{2}\right)^2=4$$
$$\left(x+6-2\sqrt{2}\right)^2+\left(y+9-4\sqrt{2}\right)^2=4$$

Exercici 135: Circumferències tangents.

Considereu la circumferència

$$c:\ (x-1)^2+(y-3)^2=16$$

a) Digueu si el punt $(2,4)$ *es troba dins o fora la circumferència*

b) Trobeu el radi d'una circumferència de centre $(2,4)$ *que és tangent a la circumferència* c.

Solució.

a) *Per comprovar si el punt* $A=(2,4)$ *és dins o fora només cal comprovar si la distància al centre,* $C=(1,3)$*, és més gran o més petita que el radi, que és* 4*:*

$$\|\overrightarrow{CA}\|=\|A-C\|=\|\,(2-1,4-3)\,\|=\sqrt{2}$$

Com $\sqrt{2}<4$ *el punt serà interior a la circumferència.*
Fixem-nos que això és equivalent a substituir el punt A *a l'equació de la circumferència i comprovar si el resultat és més gran o més petit que 16 (el radi al quadrat).*

b) *Fixem-nos que, com és interior, hi haurà dues circumferències tangents a* c*, una d'interior i una altra d'exterior (vegeu la figura). El radi de la interior serà:*

$$4-2\sqrt{2}$$

i el radi de l'exterior serà

$$4+2\sqrt{2}$$

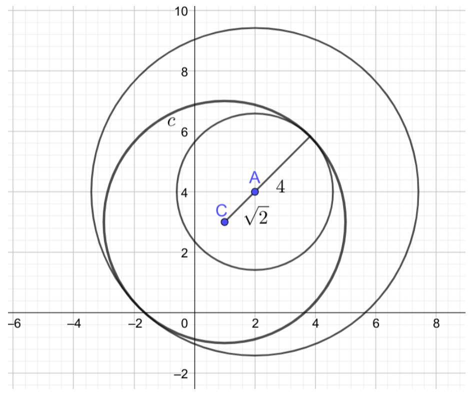
Exercici 136: Intersecció recta i circumferència.

Determineu els punts d'intersecció entre la circumferència

$$(x-3)^2+(y-5)^2=16$$

i la recta

$$r:\begin{cases}x=2k+3\\ y=6-3k\end{cases}$$



Solució.
Com tenim la recta en forma paramètrica, simplement podem substituir x i y a la circumferència i trobar el (o els) valor del paràmetre k pels quals es tallen. Així només hem de resoldre l'equació

$$(\underbrace{2k+3}_{x}-3)^2+(\underbrace{6-3k}_{y}-5)^2=16$$

que dóna

$$k=\frac{3\pm\sqrt{789}}{26}$$

Substituint les dues solucions de k a la recta r trobem els valors de les coordenades x i y dels (dos) punts corresponents:

$$\left(\frac{42+\sqrt{789}}{13},\frac{147-3\sqrt{789}}{26}\right)\qquad\left(\frac{42-\sqrt{789}}{13},\frac{147+3\sqrt{789}}{26}\right)$$