Capítol 1

Successions

Continguts

1.1 Successions geomètriques

Exercici 1: Successió geomètrica.

Els primers termes d'una successió són: 15, 3, 0.6, 0.12 i 0.024.

a) Justifiqueu que es podria tractar d'una successió geomètrica, i trobeu-ne la raó Recordeu que la suma dels n primers termes d'una successió geomètrica ve donada per la fórmula

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

b) Calculeu la suma dels seus primers 8 termes (amb fórmula).

c) Calculeu la suma dels seus infinits termes (noteu que $|r| < 1$).

Exercici 2.

Digueu si les següents successions són geomètriques o no, tot trobant-ne la raó en cas afirmatiu.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)$

b) $a_n = 2^{n+3}$

c) $a_n = 3^{2n}$

d) $a_n = 5^{2n-3}$

e) $a_n = 3^{-n+2}$

f) $a_n = 2^{n^2}$

Solució.

Només cal dividir els termes consecutius i comprovar si és constant o no.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = 3^{-1}$. *Geomètrica,* $r = \frac{1}{3}$ *i* $a_1 = r$

b) $a_n = 2^{n+3}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-(n+3)} = 2$. *Geomètrica, de raó* $r = 2$ *i* $a_1 = 2^4$.

c) $a_n = 3^{2n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}} = 3^{2(n+1)-2n} = 3^2$. *Geomètrica, de raó* $r = 3^2$ *i* $a_1 = 3^2$

d) $a_n = 5^{2n-3}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{2(n+1)-3}}{5^{2n-3}} = 2^{2(n+1)-3-(2n-3)} = 5^2$. *Geomètrica, de raó* 5^2 *i* $a_1 = 5^{-1}$

e) $a_n = 3^{-n+2}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)+2}}{3^{-n+2}} = 3^{-(n+1)+2-(-n+2)} = 3^{-1}$. *Geomètrica, de raó* $r = \frac{1}{3}$ *i* $a_1 = 3$.

f) $a_n = 2^{n^2}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = 2^{(n+1)^2-n^2} = 2^{2n+1}$. *No és geomètrica, ja que el quocient de termes consecutius no és constant (depèn de* n*).*

Exercici 3: Successió aritmètica.

a) El vintè terme d'una progressió aritmètica és 7, i la diferència, -0.25

b) Trobeu l'expressió del terme general i calcula la suma dels 12 primers termes.

c) Quant val la suma dels infinits termes de la successió?

1.2 Monotonia, màxim i mínims, successions fitades

Exercici 4.
Considereu la successió

$$a_n = \frac{6n-1}{3n+1}$$

a) Demostreu si la successió és creixent o decreixent, digueu si està fitada i doneu-ne el límit.

b) Digueu a partir de quin terme tots seran majors que 1.99

Solució.

a) Per veure si és creixent només hem de comprovar si es compleix

$$a_{n+1} > a_n$$

o no.
Operant obtenim:

$$\overbrace{\frac{6(n+1)-1}{3(n+1)+1}}^{a_{n+1}} > \overbrace{\frac{6n-1}{3n+1}}^{a_n} \iff \frac{6n+5}{3n+4} > \frac{6n-1}{3n+1}$$

Per $n \geq 1$ els denominadors són positius tots dos; per tant, els podem passar a l'altra banda multiplicant i mantenir el sentit de la desigualtat:

$$\frac{6n+5}{3n+4} > \frac{6n-1}{3n+1} \iff (6n+5)(3n+1) > (6n-1)(3n+4)$$

Alerta, si algun dels denominadors hagués estat negatiu, hauríem d'haver canviat el sentit de la desigualtat!
Desfent els parèntesis o agrupant obtenim:

$$18n^2 + 21n + 5 > 18n^2 + 21n - 4$$

Si ara ho passem tot a l'esquerra:

$$18n^2 - 18n^2 + 21n - 21n + 5 + 4 > 0 \iff 9 > 0$$

cosa que és certa si $n \geq 1$. Per tant, efectivament, la successió és creixent, ja que es compleix

$$a_{n+1} > a_n \, \forall n \geq 1$$

. Pel que fa al límit, aquest serà 2, ja que els graus del numerador i denominador coincideixen obtenint el quocient dels coeficients:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6n-1}{3n+1} == 2^-$$

és a dir, la successió s'apropa a 2 per l'esquerra (perquè és creixent).

b) *Volem saber a partir de quina valor de n obtenim*

$$a_n > 1.99$$

Com és creixent i el seu límit és 2, la pregunta té sentit. Per trobar aquest valor de n resolem l'equació:

$$a_n => .99 \Longrightarrow \frac{6n-1}{3n+1} = 1.99 \Longrightarrow 6n-1 > 1.99\,(3n+1) \ldots n = 99.66$$

Per tant, a partir de $n = 100$ es compleix que $2 > a_n > 1.99$.

1.3 Càlcul de límits varis

Exercici 5: Pg. 201 n^o 16.

Calculeu els límits de les següents successions.

$$a_n = \frac{2n+1}{n} + \frac{n}{n+1} \quad b_n = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n}$$
$$c_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \quad d_n = 5 : \frac{1}{n}$$

Solució.

A la primera ens trobem la suma dues successions racionals (quocient de polinomis). Comparant els graus veiem que totes dues són convergents i, per tant, tindrem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 + 1 = 3.$$

En el segon cas ens trobem una indeterminació del tipus $0/0$*:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 : 0 \longrightarrow \textit{Indeterminació.}$$

Per resoldre-la, simplement operem per tal d'escriure la successió com a quocient de dos polinomis per comparar-ne els graus:

$$b_n = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{1} = \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{n},$$

que tendeix a 0,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

La tercera, com és la diferència de dues successions convergents que tendeixen a 0, el límit serà

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 - 0 = 0.$$

La quarta serà divergent, perquè tendim a dividir 5 entre 0 podríem escriure $5/0 \to \infty$*. De fet, si la escrivim en forma de quocient de polinomis obtenim*

$$d_n = 5 : \frac{1}{n} = 5n,$$

i per tant

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \infty.$$

Exercici 6: Pg. 208 n^o 5.
Calculeu els següents límits

$$
\begin{array}{ll}
a_n = (3n-5)(2-3n) & b_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n}{2} \\
c_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+n}}{2n+3} & d_n = \dfrac{5}{n} - \sqrt{n} \\
e_n = \dfrac{n-n^3+1}{n^2} & f_n = \dfrac{3n+n^2}{1-n^2}
\end{array}
$$

Solució.
Primer provem substituïm n per ∞. Si trobem una indeterminació haurem d'operar. Així obtenim

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \cdot (-\infty) = -\infty,$$

i la primera és divergent.
Mirem la segona,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty - \infty \textit{ Indeterminació}$$

on ja hem fet servir que el grau del numerador de la primera fracció és més gran que el del denominador. Aquí obtenim una indeterminació del tipus $\infty - \infty$. Per resoldre-la operem per escriure la successió com una sola fracció:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n(n+1)}{(n+1)2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n+2} = \infty,$$

perquè el grau del numerador és més gran que el del denominador.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\infty}{\infty}.$$

Malauradament el numerador no és un polinomi. No obstant, com el terme de grau 2 mana, podem menysprear el del grau 1, obtenint

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2}}{2n+3} = \lim_{\to\infty} \frac{2n}{2n+3} = 1.$$

També podem raonar-ho d'una altra manera. En fer l'arrel quadrada d'un polinomi obtenim una mena de polinomi el grau més alt del qual seria 1, i el coeficient d'aquest seria $\sqrt{4} = 2$. Com iguala el del denominador, el límit serà $\frac{2}{2} = 1$. Tenim també una opció més rigorosa, dividim el numerador i el denominador entre n:

$$c_n = \frac{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}}{\frac{2n+3}{n}} = \frac{\sqrt{\frac{4n^2+n}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{4+\frac{n}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}}$$

i per tant tenim

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1.$$

La la quarta obtenim

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0 - \infty = -\infty,$$

perquè $\sqrt{\infty} = \infty$.
La cinquena, simplement comparant els graus més alts, el del numerador és més gran i, per tant, la successió serà divergent. Ara bé, com els coeficients de grau més alt són -1 *i* 1*, el límit serà*

$$\lim_{n\to\infty} e_n = -\infty.$$

Finalment, a la sisena, els graus del numerador i denominador coincideixen. Per tant, el límit serà el quocient de coeficients:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{-1} = -1.$$

Exercici 7: Pg. 206 n^o 6.
Trobar el valor de k *per tal que el*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{kn^2+3}{1-n^2} = 2$$

Solució.
Com els graus del numerador numerador i denominador coincideixen, necessitarem que el quocient de coeficients valgui 2:

$$\frac{k}{-1} = 2 \Longrightarrow k = -2.$$

Exercici 8: Pg. 208 n^o 7.
Calculeu els següents límits

$$\begin{array}{ll}
a_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{5n} & b_n = \dfrac{n^3-3n^2+1}{n^5-2n} \\
c_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}} & d_n = \dfrac{\sqrt{5}\cdot n^3+3n^2}{\sqrt{n^3+5n+1}} \\
e_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{2n}{n+1}} & f_n = \dfrac{3n^2}{n+1} - \dfrac{3n^2-2}{n-1} \\
g_n = \sqrt{3n} - \sqrt{n} & h_n = 300^{-n} \\
i_n = \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n} & j_n = \left(\dfrac{5n^2+3}{n^2}\right)^{\frac{3}{n}}
\end{array}$$

Solució.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

perquè la base és més petita que 1.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

perquè el grau del denominador és més petit que el del numerador.
Per la successió c_n *no tenim quocient de polinomis; no obstant, en fer el límit podem fer les següents simplificacions:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\cancel{1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}} = \infty.$$

també podem optar per dividir entre n tant el numerador com el denominador (el grau més alt) i obtenim

$$c_n = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{0} \to \infty.$$

A la tercera, raonant de la mateixa manera, al numerador hi tenim grau 3, i al denominador "grau $\frac{3}{2}$*". Per tant, la sucessió divergirà. Per veure-ho tenim dues opcions. La primera (una mica llarga) és dividir numerador i denominador entre el grau més alt, 3:*

$$d_n = \frac{\frac{\sqrt{5}n^3+3n^2}{n^3}}{\frac{\sqrt{n^3+5n+1}}{n^3}} = \frac{\sqrt{5}+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{n^3+5n+1}{n^6}}} \to \frac{\sqrt{5}}{0} \to \infty$$

L'altra opció és "menysprear" els termes de grau més baix:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{\sqrt{5}\cdot n^3 + \cancel{3n^2}}{\sqrt{n^3+\cancel{5n}+\cancel{1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}\cdot n^3}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}\cdot n^3\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}\cdot \cancel{n^3}\sqrt{n^3}}{\cancel{n^3}} = \infty$$

Per la cinquena obtenim

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \infty^2 = \infty.$$

Per la sisena

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \infty - \infty \textit{ Ideterminació.}$$

Per resoldre la indeterminació, reescrivim la successió com una sola fracció:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{3n^2(n-1)-(3n^2-2)(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{\cancel{3n^3}-3n^2-\cancel{3n^3}-3n^2+2n+2}{n^2-1} \\ &= \frac{-6n^2+2n+2}{n^2-1} \end{aligned}$$

i, com els graus del numerador i denominador coincideixen, el límit serà

$$\lim_{n\to\infty} f_n = -6$$

Substituïnt n per ∞ obtenim una indeterminació del tipus $\infty-\infty$. Com es tracta d'una resta d'arrels, per tal d'operar-ho i escriure-ho d'una altra manera, l'única cosa que podem fer és obtenir el mateix per tal de treure factor comú. Si escrivem $\sqrt{3n}=\sqrt{3}\sqrt{n}$ podrem restar:

$$g_n = \sqrt{3}\sqrt{n}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Com que $\sqrt{3}-1>0$, el límit serà

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \infty.$$

A la següent successió podem fer

$$\lim_{n\to\infty} 300^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{300^n} = 0,$$

ja que el denominador tendeix a ∞ però el numerador no.
Substituïnt per $n=\infty$ a la penúltima successió ens surt una indeterminació del tipus 1^∞. La solucionem primer escrivint la base en la forma $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$ de la següent manera

$$\begin{aligned} \frac{n+3}{n+5} &= 1+\frac{n+3}{n+5}-1 = 1+\frac{n+3-(n+5)}{n+5} \\ &= 1+\frac{-2}{n+5} = 1+\frac{1}{\frac{n+5}{-2}} \end{aligned}$$

Calculem ara el límit del quocient entre l'exponent i el que ens ha quedat al denominador de la fracció:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{n+5}{-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+5} = -2$$

Per tant el límit serà

$$\lim_{n\to\infty} i_n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Finalment, per darrera successió obtenim

$$\lim_{n\to\infty} j_n = 5^0 = 1,$$

ja que a la base hi tenim el quocient de dos polinomis del mateix grau i a l'exponent una fracció que tendeix a 0.

Exercici 9: Pg. 209 n^o 2.
Donades les successions $a_n = (2n+1)^2$ *i* $b_n = (1+n)(1-n)$, *calcular*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

Solució.

a) El límit surt ∞ *i la successió és divergent*

b) Si desfem el parèntesis tenim $b_n = -n^2+1$, *que també és divergent ja que tendeix a* $-\infty$

c) Fent servir els dos altres apartats, com hem de fer la diferència entre les dues successions, el límit sortirà $\infty + \infty = \infty$, *i també és divergent*

d) Si fem el quocient ens trobem que al numerador i denominador hi tenim dos polinomis del mateix grau, 2. El límit serà el quocient dels coeficients de grau més alt, i serà

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{-n^2+1} = \frac{4}{-1} = -4$$

Exercici 10: Pg. 208 n^o 6.

Considereu la successió

$$a_n = \frac{3n^k - 5n + 7}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Discutiu segons el valor de k quant val $\lim a_n$.

Solució.

Hem de comparar els graus del numerador i denominador. Al denominador hi tenim el polinomi $(4n^2 - 1) = 16n^4 - 8n^2 + 1$, que és de grau 4. Per tant tindrem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & si\ k > 4 \\ \dfrac{3}{16} & si\ k = 4 \\ 0 & si\ k < 4 \end{cases}$$

Exercici 11: Pg. 209 n^o 4.

Donades les successions

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

trobeu

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$

Solució.

Com es tracta de successions exponencials i totes dues tenen la base més petita que 1 (i positives), tenim

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

En fer el tercer límit, ens surt una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. La resoldrem operant:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n : \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (3)^n.$$

Ara, com totes dues potències tenen el mateix exponent, podem ajuntar les bases:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (3)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Per tant tindrem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Exercici 12: Exercici proposat.

Considereu les següent successions

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$
$$b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{2n}$$

Trobeu

a) $\lim_{n\to\infty} a_n$

b) $\lim_{n\to\infty} b_n$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$

Solució.

Totes dues successions tenen límit 0*, ja que la seva base és métita que* 1*. Per calcular els altres dos límits hauren d'operar, ja ens queden indeterminacions del tipus* $\frac{0}{0}$*. En operar, l'objectiu que ens hem de proposar és ajuntar les dues potències, cosa que només podrem fer si tenim el mateix exponent. Com d'entrada els exponenets no són iguals, haurem de reescriure les potències perquè ho siguin fent servir les següent propietats:*

$$x^{n+1} = x \cdot x^n$$
$$y^{2n} = \left(y^2\right)^n$$

Així, ens quedarà

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} : \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2n}$$
$$= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n} \cdot \left(\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right)^{n}$$
$$= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right)^{n} = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n}.$$

Com la base és més gran que 1, el límit quedarà ∞.
Fent servir això podrem trobar l'altre límit fent l'invers:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Exercici 13: Pg. 209 n^o 5.
Calculeu els següents límits

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{2n - 5}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n + 3}{2 - n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 3}{n^3 - 1}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n + 5}{n - 1}\right)^{n^2+1}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n - 1}{n + 3}\right)^{\frac{n^2+1}{2n^2-5}}$

Solució.
Els tres primers es resolen fàcilment comparant els graus del numerador i denominador (cal tenir en compte els signes!), i obtenim ∞, -5 *i* 0, *respectivament.*
La quarta ens surt una ideterminació del tipus $\infty - \infty$. *Com no podem ajuntar les*

arrels perquè al radicand no hi ha cap factor en comú, multipliquem pel conjugat per passar a una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \frac{n^2-1-n^2-1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} \to \frac{-2}{\infty+\infty} \to 0.\end{aligned}$$

A la següent successió ens surt una indeterminació del tipus 1^∞. Primer arreglem la base perquè esciure-la de la forma $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{n+5}{n-1} &= 1+\frac{n+5}{n-1}-1 = 1+\frac{n+5-(n-1)}{(n-1)}\\ &= 1+\frac{6}{n-1} = 1+\frac{1}{\frac{n-1}{6}}.\end{aligned}$$

Fem ara el límit del quocient de l'exponenet i el que ens ha quedat sota l'1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{\frac{n-1}{6}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+6}{n-1} = \infty$$

Per tant, el límit de la successió ens quedarà e^∞ i per tant és divergent.
Pel que fa l'últim, substituïnt primer per $n=\infty$ ens queda $2^{\frac{1}{2}}$, que no és cap indeterminació. Per tant ens quedarà

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+3}\right)^{\frac{n^2+1}{2n^2-5}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Exercici 14.
Trobeu els límits de les següents successions

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^3-2n^2-n+2} \quad b_n = \sqrt{3n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}$$

$$c_n = \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$$

1.4 Indeterminació del tipus 1^∞

Normalment es resolen comparant-la amb el límit de la successió

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exercici 15: Pg. 208 n^o 9.
Trobeu els límits

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n+5}\right)^n$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{n}\right)^{2n}$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-n^2}{n^3+1}\right)^n$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2n}{n+1}\right)^{n+1}$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n+1}{n}\right)^{-2n}$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+1}\right)^{5n}$

Solució.
Tots aquest exercicis porten a una indeterminació del tipus 1^∞. Es resolen de la mateixa manera, escrivint la base en la forma

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

i el límit serà

$$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}},$$

on b_n és l'exponent que hi havia a la successió.

a) Reescrivint la base obtenim

$$1+\frac{3}{n+5}=1+\frac{1}{\frac{n+5}{3}}$$

Calculem ara el límit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{n+5}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+5}=3.$$

Per tant el límit serà

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{3}}\right)^n=e^3.$$

b) Procedim de la mateixa manera, primer arreglem la base

$$1-\frac{6}{n}=1-\frac{1}{\frac{n}{6}}=1+\frac{1}{-\frac{n}{6}}$$

Ara només caldrà fer el límit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\frac{-n}{6}}=-12,$$

i el límit serà e^{-12}.

c) Arreglem la base

$$\begin{aligned}\frac{n^3-n^2}{n^3+1}&=1+\frac{n^3-n^2}{n^3+1}-1=1+\frac{n^3-n^2}{n^3+1}-\frac{n^3+1}{n^3+1}\\&=1+\frac{n^3-n^2-n^3-1}{n^3+1}=1+\frac{-n^2-1}{n^3+1}=1+\frac{1}{\frac{n^3+1}{-n^2-1}}\end{aligned}$$

Fem ara el límit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{n^3+1}{-n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(-n^2-1)}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-n}{n^3+1}=-1,$$

i per tant el límit serà e^{-1}.

d) Fem el mateix:

$$3 - \frac{2n}{n+1} = 1 + 2 - \frac{2n}{n+1} = 1 + \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2n}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} = 1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}$$

i calculant el límit entre l'exponent i el denominador tenim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\frac{n+1}{2}} = 2,$$

i per tant el límit és e^2.

e) Arreglem primer la base

$$2 - \frac{n+1}{n} = 1 + 1 - \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{n-(n+1)}{n}$$
$$1 + \frac{-1}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{n}{-1}} == 1 + \frac{1}{-n}$$

Fem ara el límit del quocient entre l'exponent i $-n$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{-n} = 2,$$

i per tant el límit quedarà e^2.

f) Fem el mateix, primer la base

$$\frac{n^2+5}{n^2+1} = 1 + \frac{n^2+5}{n^2+1} - 1 = 1 + \frac{4}{n^2+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{\frac{n^2+1}{4}}$$

Fem ara el límit entre l'exponent i el denominador

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{\frac{n^2+1}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{20n}{n^2+1} = 0.$$

Per tant el límit quedarà $e^0 = 1$.

Exercici 16: Proposat.

Trobeu els límits de les següents successions:

a) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{2n-1}\right)^{n^2}$

b) $b_n = \left(\dfrac{2n^2+2}{n^2+n} - 1\right)^{3n}$

c) $c_n = \left(2 - \dfrac{n^2-3}{n^2+4}\right)^{n^3-1}$

d) $d_n = \left(1 - \dfrac{n+3}{n-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$

Solució.

a) *El límit surt* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$, *ja que la base és més petita que* 1

b) *Surt una indeterminació del tipus* 1^{∞}. *Reescrivim la base:*

$$\begin{aligned}\frac{2n^2+2}{n^2+n} - 1 = 1 + \frac{2n^2+2}{n^2+n} - 2 &= 1 + \frac{2n^2+2-2\left(n^2+n\right)}{n^2+n} \\ = 1 + \frac{-2n-2}{n^2+n} &= 1 + \frac{1}{\frac{n^2+n}{-2n-2}}\end{aligned}$$

Fem ara el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\frac{n^2+n}{-2n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n(-2n-2)}{n^2+n} = -6.$$

Per tant el límit quedarà

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

c) *Torna a sortir una indeterminació del tipus* 1^{∞}. *Per tant fem el mateix, arreglem la base*

$$\begin{aligned}2 - \frac{n^2-3}{n^2+4} = 1 + 1 - \frac{n^2-3}{n^2+4} &= 1 + \frac{n^2+4-(n^2-3)}{n^2+4} \\ = 1 + \frac{1}{\frac{n^2+4}{7}}.\end{aligned}$$

Fem ara el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{\frac{n^2+4}{7}} = \infty,$$

i, per tant, el límit quedarà

$$\lim_{n\to\infty} c_n = e^{\infty} = \infty.$$

d) El límit surt 0^{∞}, *que és* 0.