# Capítol 3

# Trigonometria

## Continguts



**Exercici 59.**

a) *Si* $\tan(\alpha) = -\frac{1}{4}$ *i* $90° < \alpha < 180°$, *calculeu, sense trobar el valor d'*$\alpha$*, el valor exacte de* $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ *i* $\cos(180° - \alpha)$

b) *Trobeu una fórmula per* $\tan(\alpha + \beta)$*, i feu-la servir per trobar* $\tan(75°)$ *sense fer servir la calculadora (és adir, només fent servir* $30°$, $45°$ *i* $60°$*). Doneu el resultat com a decimal i en forma exacta (amb arrels).*

**Solució.**

a) *Com l'angle es troba al segon quadrant tindrem* $\sin\alpha > 0$ *i* $\cos\alpha < 0$. *Per tal de trobar els valors hem de resoldre el sistema*

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{1}{4} \\ \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1\end{array}\right\}$$

*Elevant al quadrat la primera equació i aïllant* $\sin^2(\alpha)$ *de la segona trobem i substituint trobem*

$$\frac{1-\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{16}$$

*Aïlant* $\cos^2(\alpha)$ *trobem*

$$\cos^2(\alpha) = \frac{16}{17} \Longrightarrow \cos(\alpha) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} = \pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

*Recordant que l'angle es troba al segon quadrant, la solució correcte serà*

$$\cos(\alpha) = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

*De la segona equació trobem el sinus:*

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) &= 1-\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{4^2\cdot 17}{17^2} = \frac{17^2 - 4\cdot 17^2}{17^2} \\ &= \frac{(17-16)17}{17^2} = \frac{1}{17} \\ \sin(\alpha) &= \pm\sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}\end{aligned}$$

*Recordant que l'angle es troba al segona quadrant, la solució correcte serà la positiva:*

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

**Exercici 60: Pg. 71 n$^o$ 15.**
*Sabent que* $\cos(\alpha) = 0.8$ *amb* $0 < \alpha < 90$ *i que* $\sin(\beta) = 0.6$ *amb* $90 < \beta < 180$, *calculeu:*

*a)* $\sin(\alpha + \beta)$

*b)* $\cos(\alpha + \beta)$

*c)* $\sin(\beta - \alpha)$

*d)* $\cos(\beta - \alpha)$

*e)* $\sin(2\alpha)$

*f)* $\cos(2\beta)$

**Solució.**

*Comencem calculant la resta de raons trigonomètriques dels dos angles:*

$$\sin^2(\alpha) + (0.8)^2 = 1 \Longrightarrow \sin(\alpha) = \pm 0.6$$
$$(0.6)^2 + \cos^2(\beta) = 1 \Longrightarrow \cos(\beta) = \pm 0.8$$

*Com $\alpha$ i $\beta$ són al primer i al segon quadrant, respectivament, trobem:*

$$\boxed{\sin(\alpha) = 0.6}$$
$$\boxed{\cos(\beta) = -0.8}$$

*Les igualtats que ens demanen les podem treure de les fórmules de l'angle suma:*

*a)* $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) = 0.6 \cdot (-0.8) + 0.8 \cdot 0.6 = 0$

*b)* $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) = 0.8 \cdot (-0.8) - 0.6 \cdot 0.6 = -1$

*c)* $\sin(\beta - \alpha) = \sin(\beta)\cos(-\alpha) + \cos(\beta)\sin(-\alpha) = 0.6 \cdot 0.8 + (-0.8) \cdot (-0.6) = 0.96$

*d)* $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta)\cos(-\alpha) - \sin(\beta)\sin(-\alpha) = (-0.8) \cdot 0.8 - 0.6 \cdot (-0.6) = -0.28$

*e)* $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.96$

*f)* $\cos(2\beta) = \cos(\beta + \beta) = \cos(\beta)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\beta) = (-0.8)^2 - 0.6^2 = 0.28$

**Exercici 61.**

*Calculeu, sense trobar l'angle,*

*a)* $\cos(2 \cdot \arcsin(0.3))$

*b)* $\sin(\arcsin(0.4) + \arccos(0.5))$

**Solució.**

*a) Notem que* $\arcsin(0.3)$ *es tracta d'un angle,* $\alpha$*, que compleix que* $\sin(\alpha) = 0.3$*. Fent servir que* $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ *trobem que*

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - 0.3^2} = \pm\sqrt{0.91}$$

*Per tant,*

$$\cos(2\arcsin(0.3)) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 0.91 - 0.09 = 0.81$$

*b) Tenim ara dos angles, dels quals sabem:*

$$\sin(\alpha) = 0.4 \Longrightarrow \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - 0.4^2} = \pm 0.916$$
$$\cos(\beta) = 0.5 \Longrightarrow \sin(\beta) = \pm\sqrt{1 - 0.5^2} = \pm 0.866$$

*Per tant tindrem:*

$$\sin(\arcsin(0.4) + \arccos(0.5)) = 0.4 \cdot 0.5 + (\pm 0.916) \cdot (\pm 0.866)$$

*d'on traiem dues possibles opcions:*

$$0.2 + 0.916 \cdot 0.866 = \boxed{0.993}$$
$$0.2 - 0.916 \cdot 0.866 = \boxed{-0.593}$$

**Exercici 62.**
*Sabent que* $\tan(\alpha) = 1.3$ *i que* $180 < \alpha < 270$*, sense trobar l'angle, calculeu:*

*a)* $\sin(\alpha)$

*b)* $\cos(\alpha)$

*c)* $\cos(2\alpha)$

*d)* $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

*e)* $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

**Solució.**
*Per calcular tot el que ens demanen necessitem calcular* $\sin(\alpha)$ *i* $\cos(\alpha)$*. Per fer-ho plantegem el següent sistema d'equacions:*

$$\left.\begin{array}{r}\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\\ \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1\end{array}\right\}$$

*De la primera equació aïllem* $\sin(\alpha)=\tan(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=1.3\cos(\alpha)$ *i ho substituïm a la segona per obtenir:*

$$(1.3\cos(\alpha))^2+\cos^2(\alpha)=1\Longrightarrow 2.69\cos^2(\alpha)=1\Longrightarrow\cos(\alpha)\pm 0.609$$

*I trobem* $\sin(a)$ *fent:*

$$\sin(\alpha)=1.3\cdot\cos(\alpha)=\pm 0.792$$

*Tenint en compte que l'angle és al 3r quadrant, obtenim:*

$$\sin(\alpha)=\boxed{-0.792}$$
$$\cos(\alpha)=\boxed{-0.609}$$

*Amb això ja podem trobar la resta de coses que ens demanen:*

*c)* $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=-0.256$

*d)* $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha)=0.609$

*e)* $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin(\alpha)=0.792$

**Exercici 63: Pg. 82 n$^o$ 12.**
*Un pal...*

**Solució.**
*La situació es resumeix a la figura 3.1 Si sapiguéssim el costat a, trobaríem h fent:*

$$h=a\sin(60)$$

*Per tal de trobar a, apliquem el teorema del sinus, ja que coneixem més angles que costats. Com només coneixem el costat* 20 *caldrà trobar l'angle* $\alpha$ *fent:*

$$\alpha=180-75-60=45^\circ$$

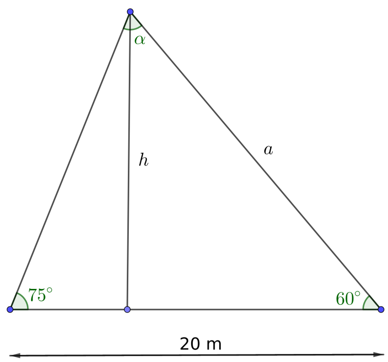


Figura 3.1: Exercici 63

*Per tant, pel teorema del sinus tenim:*

$$\frac{a}{\sin(75)} = \frac{20}{\sin(45)} \Longrightarrow a = 14.64 \ m$$

*Per tant,*

$$h = 12.67 \ m$$

**Exercici 64.**
*A partir de l'angle suma, trobeu una fórmula per calcular*

*a)* $\cos(2\alpha + \beta)$

*b)* $\sin(2\alpha - \beta)$

**Solució.**

*a)*

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha+\beta) &= \cos(2\alpha)\cos(\beta) - \sin(2\alpha)\sin(\beta) = \\ &= \cos(\alpha+\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha+\alpha)\sin(\beta) = \\ &= \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)\cos(\beta) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

*b)*

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha-\beta) &= \sin(2\alpha+(-\beta)) = \sin(2\alpha)\cos(-\beta)+\cos(2\alpha)\sin(-\beta) = \\ &= \sin(2\alpha)\cos(\beta)-\cos(2\alpha)\sin(\beta) = \\ &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\beta)-\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\beta)\right)\sin(\beta)\end{aligned}$$

**Exercici 65.**

*Un vaixell navega paral·lelament a la línia que uneix dos fars $F_1$ i $F_2$, situats a una distància de 10km un de l'altre. En un moment donat, la visual dirigida al vaixell des del far $F_1$ forma un angle de $60°$ amb $F_1F_2$, i la visual des de $F_2$ forma un angle de $50°$ amb aquesta mateixa recta. Al cap de 10 minuts, la visual des de $F_1$ forma un angle de $45°$ amb $F_1F_2$. A quina velocitat navega el vaixell?*

**Solució.**

*La situació es resumeix a la Figura A la figura hi ha representat el punt $P_1$ on es troba*

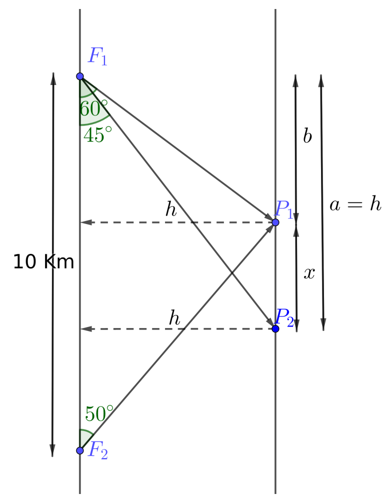


Figura 3.2: Exercici 65

*el vaixell en el moment de la primer a mesura, i $P_2$ en el moment de la segona. Per tal de saber a quina velocitat es mou el vaixell només cal saber la distància $x = P_1P_2$ recorreguda en 10 min. Per tal de conèixer la distància $x$ fixem-nos que*

$$x = a - b$$

*Per tal de trobar $b$ només caldrà trobar la distància $F_1P_1$ i fer*

$$b = F_1P_1\cos(60)$$

*Podem trobar la distància $F_1P_1$ aplicant el teorema del sinus:*

$$\frac{F_1P_1}{\sin(50)} = \frac{10}{\sin(180-60-50)}$$

*d'on*

$$F_1P_1 = 8.152\ Km$$

*i*

$$b = 8.152\cos(60) = 4.076\ Km$$

*Ara, per trobar a, fixem-nos que en ser l'angle corresponent de 45°, tindrem que*

$$a = h$$

*Per tant, només cal trobar h fent servir*

$$h = F_1P_1\sin(60) = 7.06\ Km$$

*Per tant:*

$$x = a - b = 2.983\ Km$$

*i la velocitat serà:*

$$\frac{x}{10\ min}\cdot\frac{60\ min}{1\ h} = \boxed{17.9\ Km/h}$$

**Exercici 66: Exercici d'examen Curs 20-21.**
*Una persona observa un objecte que té davant i a la seva esquerra. L'ull esquerra apunta amb un angle de 7° respecte la frontal (perpendicular sortint del front), mentre que el dret ho fa amb un angle de 10°. Sabent que la distància entre els ulls és de 63mm, a quina distància es troba l'objecte de l'ull més proper?*

**Exercici 67: Algunes identitats trigonomètriques.**
*Comproveu que les següents identitats trigonomètriques són certes*

*a)* $1+\tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

*b)* $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

*c)* $\dfrac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \dfrac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \dfrac{2}{\sin(\alpha)}$

*d)* $\tan(\alpha) + \dfrac{1}{\tan(\alpha)} = \dfrac{1}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$

### Exercici 68: Pg. 264 n$^o$29.

*Resoleu les següents equacions trigonomètriques*

*a)* $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

*b)* $2\cos(x) + 1 = 0$

*c)* $2\sin^2(x) - \sin(x) = 1$

*d)* $2\sin(x) = \tan(x)$

*e)* $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$

*f)* $\cos(x) + \sin(2x) = (\sin(x) + \cos(x))^2$