Nombres complexos

Què són els nombres complexos?

Quan sorgeixen dels nombres complexos?

Sorgeixen al segle XVI, quan Cardano va haver de fer servir arrels de nombres negatius per trobar les solucions d'una equació de grau 3.

Per a què serveixen els nombres complexos?

- Permeten fer l'arrel quadrada de qualsevol nombre
- Permeten factoritzar qualsevol polinomi en tants factors com grau tingui (Teorema fonamental de l'Àlgebra)
- Aplicacions: infinites, sobretot en tot el que tingui a veure amb ones: electrotècnia (fasors), telecomunicacions, tractament del senyal, acústica, tractament d'imatge (transformada de Fourier).

Com es construeixen els nombres complexos?

La idea fonamental és definir el **nombre imaginari** (Descartes, segle XVII):

$$i = \sqrt{-1} \Longrightarrow i^2 = -1$$

Nombres complexos

Els nombres complexos són nombres de la forma

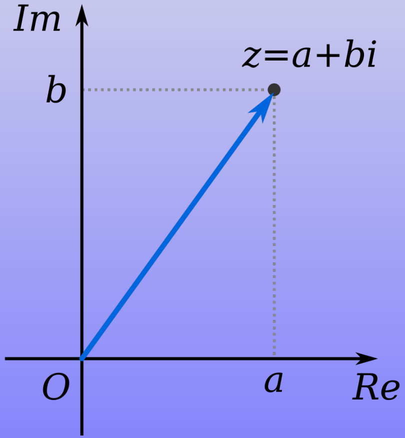
$$z = a + b \cdot i \qquad \begin{cases} a \in \mathbb{R} & \text{Part real de } z\text{: } \mathrm{Re}(z) = a \\ b \in \mathbb{R} & \text{Part imaginària de } z\text{: } \mathrm{Im}(z) = b \end{cases}$$

- Si $a = 0$ el nombre z s'anomena **imaginari pur**.
- Si $b = 0$ el nombre z és un nombre real.
- Els nombres complexos inclouen els reals:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

El pla complex

Els complexos tenen dimensió dos: una dimensió per part real i una altra per la imaginària. Per tant, es poden representar al pla, com a punt o vector:



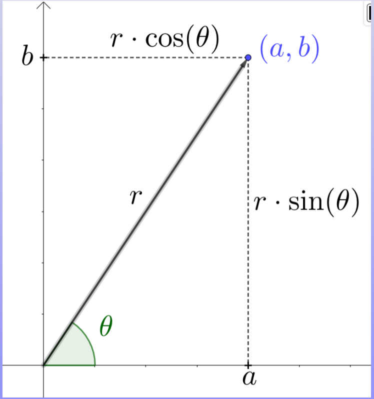
Representació de nombres complexos

- Forma binòmica: $a + bi$ part real més part imaginària
- Forma polar: mòdul i angle (argument) $z = r\angle\theta = r_\theta$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Forma trigonomètrica: $r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$
- Forma exponencial: $z = re^{i\theta}$



Forma exponencial

Recordem:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Si fem $x = i\theta$ ens quedarà:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots$$

Fixem-nos que:

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1 \cdots$$

Per tant la suma queda:

$$1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

Agrupem els termes que tenen i i els que no:

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

Forma exponencial

I ara passa una cosa màgica:

$$e^{i\theta} = \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots}_{\cos\theta} + i \underbrace{\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \right)}_{\sin\theta} =$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

que és la **fórmula d'Euler**. Si ara multipliquem pel mòdul, r, obtenim la igualtat entre la forma binòmica la l'exponencial:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Identitat d'Euler

Si a la fórmula d'Euler substituïm $\theta = \pi$ obtenim la famosa identiat d'Euler:

$$e^{i\pi} = -1 \Longrightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

que uneix tres branques de les matemàtiques: anàlisis (e), àlgebra (i) i geometria (π).

Els nombres complexos tenen estructura de cos (com els racionals i els reals):

- Es poden sumar, i hi ha neutre, 0, i tots tenen invers (oposat).
- Es poden multiplicar, i hi ha neutre, 1, i tots llevat del 0 tenen invers.

Suma de nombres complexos

Suma en binòmica

$$a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$$

Exemple:

$$1 + 2i + (2 - 3i) = 3 - i$$

Suma en polar/exponencial

En general no es pot!

Suma de nombres complexos

Oposat

$$a + bi + (-a - bi) = 0$$

Exemple:

$$1 - 3i + (-1 + 3i) = 0$$

Producte de nombres complexos

En binòmica

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$

Exemple:

$$(1-3i)(2+4i) = 2+4i-6i-3i\cdot 4i = 2-2i+12 = 14-2i$$

En polar/exponencial

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i\theta_1+i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

El resultat és un complex de mòdul $r_1\cdot r_2$ i angle $\theta_1+\theta_2$.

En multiplicar complexos, els mòduls es multipliquen però els angles es sumen!

Divisió de nombres complexos

Divisió en binòmica

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

Divisió en polar/exponencial

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

El resultat és un complex de mòdul $\frac{r_1}{r_2}$ i angle $\theta_1 - \theta_2$.

Els mòduls es divideixen i els angles es resten!!

Alguns productes i divisions interessants

Si $\theta > 0$:

- $z \cdot e^{i\theta} \Longrightarrow$ gir antihorari θ radians
- Multiplicar per i: girar $\frac{\pi}{2}$ antihorari.
- Multiplicar per $-i$: girar $\frac{\pi}{2}$ horari.
- $\frac{z}{e^{i\theta}} = z \cdot e^{-i\theta}$ gir θ en sentit horari de θ radians.

Conjugat d'un nombre complex

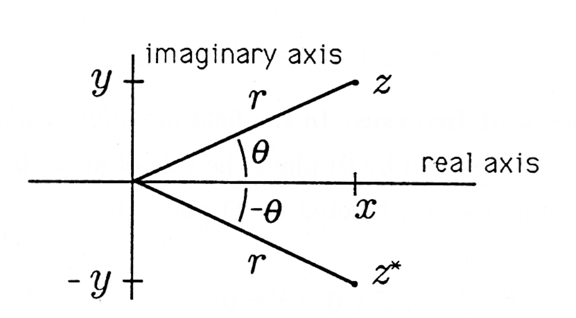
Si

$$z = a + bi = re^{i\theta}$$

aleshores el conjugat de z és

$$\bar{z} = a - bi = re^{-i\theta}$$

Gràficament:



Conjugat d'un nombre complex

Algunes propietats importants:

- $\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{a+bi+a-bi}{2} = \dfrac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \mathsf{Re}(z)$
- $\dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{a+bi-(a-bi)}{2i} = \dfrac{\cancel{2}b\cancel{i}}{\cancel{2i}} = b = \mathsf{Im}(z)$
- $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - bi^2 = \; = a^2 + b^2 = \; |z|^2$

Recordant la fórmula d'Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

aquestes propietats permeten definir els sinus i el consinus mitjançant nombres complexos:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

Conjugat d'un nombre complex

El conjugat també permet calcular la divisió:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{\left|z_2\right|^2}$$