Funcions: continuïtat

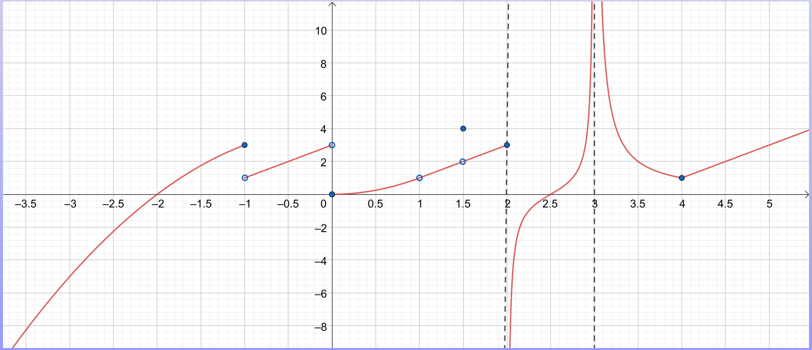
Quan una funció NO és contínua?

Definició naïf

Una funció NO és contínua si per algun valor de x hem d'aixecar el llapis del paper en fer-ne la gràfica.

Exemple gràfic

La funció



no és contínua en $x = -1$ (té un salt), en $x = 0$ (salt), $x = 1$ (evitable), en $x = 1.5$ (evitable), en $x = 2$ (asimptòtica) ni $x = 3$ (asimptòtica).

Què ha de passar perquè una funció sigui contínua?

Una funció és contínua en $x = a$ si

valors infinitament propers a $x = a$ tenen imatges infinitament properes a $f(a)$.

La manera més estàndard d'escriure això és:

Una funció és contínua en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

o, equivalentment,

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

Tipus de discontinuïtats

La condició

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

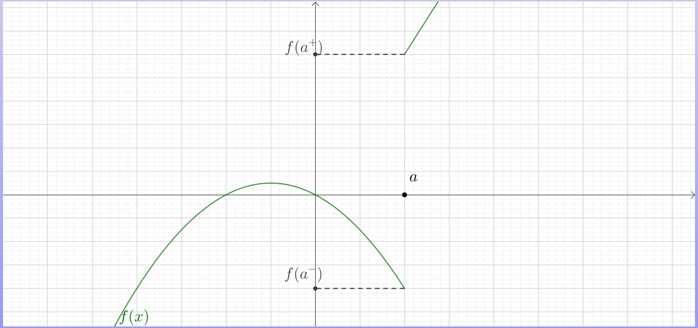
pot no complir-se per tres motius diferents donant lloc a tres tipus de discontinuïtats:

- Discontinuïtat de salt
- Discontinuïtat asimptòtica
- Discontinuïtat evitable

Discontinuïtat de salt en $x = a$

Els límits laterals **existeixen** però són diferents:

$$f(a^-) \neq f(a^+)$$



Observació

No importa el valor de $f(a)$.

Discontinuïtat de salt en $x = a$

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Tenim que

$$D(f) = \mathbb{R}$$

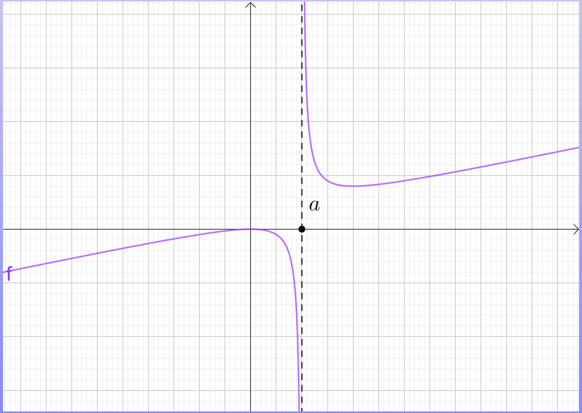
No obstant,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1^-) = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1^+) = 4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(1^-) \neq f(1^+) \Longrightarrow \text{Discontinuïtat de salt}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = a$

La funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica en $x = a$ si algun dels dos (o tots dos) límits laterals són $+\infty$ o $-\infty$:

$$f(a^-) = \pm\infty \quad \text{o} \quad f(a^+) = \pm\infty$$



Discontinuïtat asimptòtica en $x = a$

En una discontinuïtat asimptòtica es compleix:

- Apropant x a a podem fer que $|f(x)|$ sigui tan gran com vulguem.
- La funció no està fitada prop de $x = a$.
- La gràfica de la funció s'apropa a la d'una recta vertical, que s'anomena **asímptota vertical**.

Discontinuïtat asimptòtica en $x = a$

Exemple

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Com

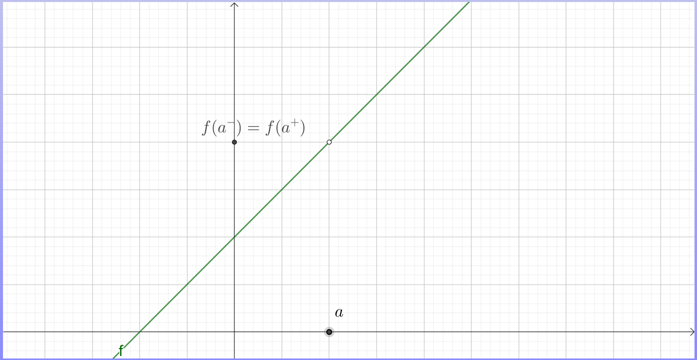
$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \dfrac{7}{0^-} = -\infty \\ f(4^+) = \dfrac{7}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Discontinuïtat asimptòtica en } x = 4$$

Discontinuïtat evitable

Si

$$f(a^-) = f(a^+) \neq f(a)$$

tindrem una discontinuïtat evitable en $x = a$



Discontinuïtat evitable

En una discontinuïtat evitable en $x = a$:

- La funció té un forat
- Es diu evitable perquè es pot evitar, simplement omplint el forat.
- $f(a)$ no existeix o bé té un valor diferent a $f(a^-)$ i $f(a^+)$
- Normalment venen d'espressions que es poden simplificar

Discontinuïtat evitable

Exemple

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

Tenim que

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

En fer el límit obtenim una indeterminació:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

La resolem simplificant:

$$\frac{x}{x} = 1 \text{ si } x \neq 0$$

Per tant:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$f(0^-) = f(0^+) = 1 \neq f(0) \ (\nexists) \Longrightarrow \text{Discontinuïtat evitable}$$

Estudi de la continuïtat d'una funció

Donada una funció, volem saber si és contínua o no. En cas que no ho sigui, quins tipus de discontinuïtats té?

1. Trobar el domini
2. Estudiar el comportament local (fent els límits laterals) als punts que no siguin del domini (principalment denominadors que s'anul·len)
3. Estudiar el comportament local (fent els límits laterals) als canvis de branca en funcions definides a trossos

Estudi de la continuïtat d'una funció

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3x-9}{x^2-9} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \dfrac{3x}{x+3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1) Domini.

1. Canvis de branca: la funció està ben definida en tots ells, per tant ok.
2. Denominadors que s'anul·len.
    1. Primera branca: $\boxed{x=-1}$ i $x=0$. Però $x=0$ s'entra per la 2a branca, només caldrà descartar $x=-1$.
    2. Segona branca: $x=-3$ i $x=3$. Cap d'ells quedarà descartat.
    3. Tercera branca: $x=-3$. Tampoc el descartem

Per tant $\quad D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Estudi de la continuïtat d'una funció

2. Estudi en punts que no són del domini:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x}{x^2 + x} = \frac{-1}{0}$$

Serà una discontinuïtat asimptòtica. Caldrà fer els laterals. Estudiem el canvi de signe del denominador:

$$x^2 + x \longrightarrow \quad + \quad 0^+ \;\big|\; 0^- \quad - \quad 0^- \;\big|\; 0^+ \quad +$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad -1 \qquad\quad 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Estudi de la continuïtat d'una funció

3. Estudi local en canvis de branca
   - En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x^2+x} = \frac{0}{0} \text{ Indet}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x-9}{x^2-9} = \frac{-9}{-9} = 1$$

Resolem la indeterminació factoritzant i simplificant:

$$\frac{x}{x^2+x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{1}{x+1} \text{ si } x \neq 0$$

Per tant:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$$

Com

$$f(0^-) = f(0^+) = f(0)$$

la funció és contínua en $x = 0$.

Estudi de la continuïtat d'una funció

3. Estudi local en canvis de branca
   - En $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3x-9}{x^2-9} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x}{x+3} = \frac{9}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Resolem la indeterminació factoritzant i simiplificant:

$$3x - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3 \qquad \Longrightarrow 3x - 9 = 3(x-3)$$

$$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm 3 \qquad \Longrightarrow x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

Per tant:

$$\frac{3x-9}{x^2-9} = \frac{3\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{3}{x+3} \text{ si } x \neq 3$$

El límit quedarà:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{x+3} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Estudi de la continuïtat d'una funció

3. Estudi local en canvis de branca
   - En $x = 3$: Com que

$$\frac{1}{2} = f(3^-) \neq f(3^+) = \frac{3}{2}$$

     la funció tindrà una discontinuïtat de salt en $x = 3$.

Estudi de la continuïtat d'una funció

Exemple 2

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4}$$

1. Domini:

$$1 - x^4 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

2. Estudi local en punts que no són del domini:
   - En $x = -1$. Comencem fent el límit:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{-12}{0}$$

La funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$.
Cal estudiar els límits laterals per completar l'estudi:

$$1 - x^4 \longrightarrow \begin{array}{ccccc} - & 0^-\,0^+ & + & 0^+\,0^- & - \\ \cdots\cdots & -1 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots \end{array}$$

Per tant ens quedarà:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$

2. Estudi local en punts que no són del domini:
   - En $x = 1$. Comencem fent el límit:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació caldrà factoritzar i simplificar:

$$-2x^2 + 6x - 4 = -2\overbrace{(x^2 - 3x + 2)}^{=0 \Longrightarrow x=1,\, x=2} = -2(x-1)(x-2)$$

Factorització de $1-x^4$. Opció 1: per Ruffini

Sabem que $x=1$ és una arrel. Per tant:

$$1-x^4=(x-1)q(x)$$

Per trobar $q(x)$ hem de dividir $1-x^4$ entre $x-1$. Ho fem per Ruffini. Escrivim

$$1-x^4=-x^4+0x^3+0x^2+0x+1$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

d'on

$$1-x^4=(x-1)\overbrace{\left(-x^3-x^2-x-1\right)}^{q(x)}$$

Factorització de $1 - x^4$. Opció 1: per Ruffini

Tenim que

$$1 - x^4 = (x-1)(-x^3 - x^2 - x - 1)$$

Saben que $x = -1$ és arrel de $-x^3 - x^2 - x - 1$. Per tant:

$$-x^3 - x^2 - x - 1 = (x+1)q(x)$$

Trobem $q(x)$ dividim aquest polinomi entre $x+1$ per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

d'on

$$-x^3 - x^2 - x - 1 = (x+1)(-x^2 - 1)$$

Resumint:

$$1 - x^4 = (x-1)(x+1)(-x^2 - 1)$$

Factorització de $1 - x^4$. Opció 2: identitat notable

Si ens fixem, $1 - x^4$ és una diferència de quadrats. Per tant:

$$1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2)$$

El factor $(1 + x^2)$ és irreductible (grau 2 sense arrels reals). El terme $1 - x^2$ també és una diferència de quadrats:

$$1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$$

Per tant,

$$1 - x^4 = (1 + x)(1 - x)(1 + x^2)$$

Fixem-nos que dóna el mateix que abans, només cal canviar el signe de dos factors:

$$(1 + x)(1 - x)(1 + x^2) = (1 + x)(-1 + x)(-1 - x^2) = (x + 1)(x - 1)(-x^2 - 1)$$

Factorització de $1 - x^4$. Opció 3: divisió euclidiana

Sabem que $1 - x^4$ té arrels -1 i 1. Per tant, es podrà escriure com

$$1 - x^4 = (x+1)(x-1)q(x) = (x^2-1)q(x)$$

Per trobar $q(x)$ només cal dividir $1 - x^4$ entre $x^2 - 1$:

$$\begin{array}{r|l} -x^4 \qquad\quad +1 & x^2 - 1 \\ \hline x^4 - x^2 \qquad & -x^2 - 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ x^2 - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Per tant:

$$1 - x^4 = (x+1)(x-1)(-x^2-1)$$

Resolució de la indeterminació

Retornant al problema, la funció la podem simplificar:

$$\frac{-2x^2+6x-4}{1-x^4} = \frac{-2\cancel{(x-1)}(x-2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}(-1-x^2)}$$

Per tant:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-2(x-2)}{(x+1)(-1-x^2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Per tant, la funció tindrà una discontinuïtat evitable en $x=1$.