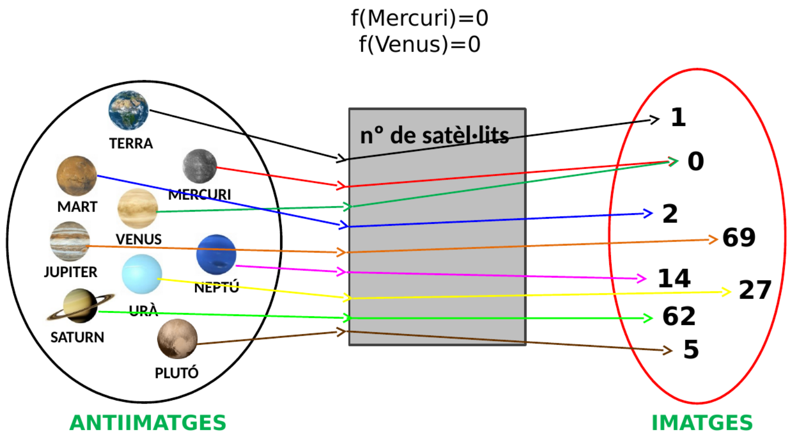
Funcions

Què és una funció?

Definició

Una funció és una "cosa" que assigna "coses" a altres "coses"



Funcions reals de variable real

Nosaltres considerem funcions que van del conjunt dels nombres reals al conjunt dels nombres reals. Aquestes funcions es diuen "funcions reals (perquè tornen un nombre real) de variable real (perquè la variable independent, x, també és un nombre real)".
Això es representa de la següent manera:

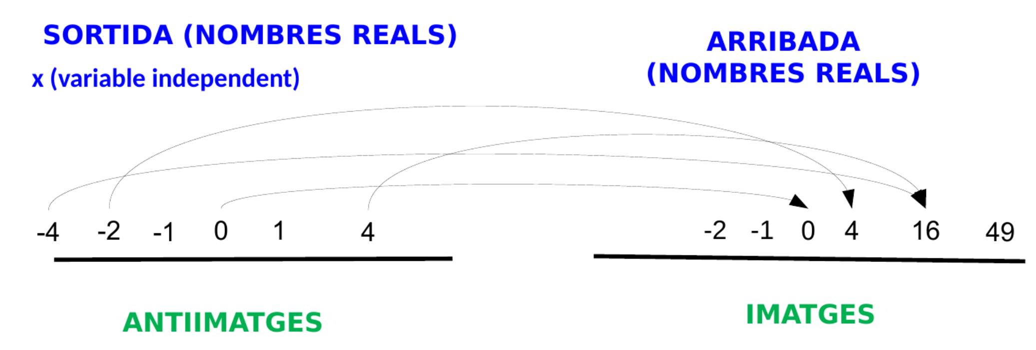
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Funcions reals de variable real

Definició

A cada nombre s'hi assigna un altre nombre, mitjançant, en general, una expressió algebraica.

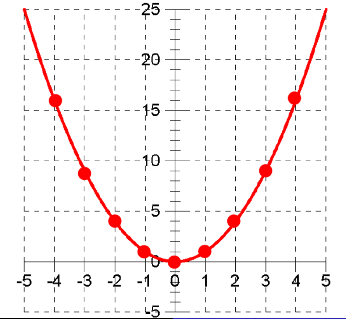
Per exemple, $f(x) = x^2$



Funcions reals de variable real: taula de valors

$$f(x) = x^2$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{2}$
f(x)	9	4	1	0	1	4	9	2



Punts de tall amb els eixos

- **Eix vertical (ordenades)**: ordenada a l'origen o bé imatge del zero: $f(0)$. El punt és de la forma $(0, f(0))$
- **Eix horitzontal (abscisses)**: busquem el valor de x que fa que $f(x) = 0$, són punts de la forma $(x_0, 0)$. Cal resoldre l'equació:

$$f(x) = 0$$

Domini d'una funció

No tots els valors de x tenen perquè tenir imatge.

Definició

Domini: són tots els valors d'x pels quals la funció ens retorna algun valor (tenen imatge)

Motius pels quals una funció no retorna alguna valor:

- Denominadors que s'anul·len: caldrà veure per quins valors d'x el denominador s'anul·la i treure aquells valors del domini.
- Arrels que es fan negatives.
- Funcions definides a trossos: cal assegurar-se que estiguin ben definides als canvis de branca.
- Logaritmes que s'anul·len o són negatius.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$$

Domini:

$$x+2=0 \Longrightarrow x=-2$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Punts de tall amb els eixos:

- Eix d'ordenades: $f(0) = \frac{0^2-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\left(0, -\frac{1}{2}\right)}$$

- Eix d'abscisses:

$$\frac{x^2-1}{x+2} = 0 \Longleftrightarrow x^2-1=0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$

$$\boxed{(-1,0)} \qquad \boxed{(1,0)}$$

Taula de valors

x	$f(x)$
0	$-\frac{1}{2}$
1	0
-1	0
2	$\frac{3}{4}$
-2	$\nexists$

Exemple 2

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$$

Domini: lo de dins de l'arrel (radicand) no pot ser negatiu.

1. Mirem quan val 0: $x^2 - x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -2$ i $x = 3$
2. Mirem quan és negatiu avaluant el radicand:

3. Ens quedem amb els valors que fan que el radicand sigui positiu o 0:

$$D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$$

Exercici

Trobar els dominis i punts de tall de les següents funcions:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1}$$
$$g(x) = \sqrt{x - 10}$$
$$h(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$$

Domini: problemes si el denominador s'anul·la:

$$x^2-2x+1=0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Punts de tall eix abscisses: $x^2-4=0 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow (-2,0) \quad (2,0)$.
Punts det all eix ordenades: $(0, f(0)) = (0, \frac{0-4}{0-0+1}) = (0,-4)$.

$$g(x) = \sqrt{x - 10}$$

Domini: necessitem

$$x - 10 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 10$$

o bé gràficament: busquem quan $x - 10 = 0$ i avaluem en algun valor per mirar els signes:

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \cdots\cdots\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- & \vert & -\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\cdots\cdots \\ & 10 & \end{array}$$

Per tant

$$D(g) = \mathbb{R} \backslash (-\infty, 10) = [10, \infty)$$

Tall eix abscisses: $\sqrt{x - 10} = 0 \Longrightarrow x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 10 \Longrightarrow (10, 0)$.
Tall eix ordenades: $f(0) = \sqrt{-10} \nexists \Longrightarrow$ No talla l'eix y.

$$h(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$$

Domini:

$$x^2+3x+2=0 \Longrightarrow x=-1 \quad x=-2$$

Per tant,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$$

Punts de tall abscisses: $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$.
Però alerta!!!!

$$-1 \notin D(f) \Longrightarrow \text{no talla l'eix } x$$

Tall ordenades: $f(0)=\frac{1}{2} \Longrightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Definicions

- **Recurregut o imatge d'una funció**: són el conjunt de valors pels quals tenim antiimatge. Per exemple, si $f(x) = x^2$ tenim que 2 i -2 són les antiimatges de 4, però en canvi -1 no té cap antiimatge. Per tant $\text{Im}(f) = [0, \infty)$.
- **Injectiva:** una funció és injectiva si cada valor té com a molt una antiimatge. Per exemple, $f(x) = x^2$ no és injectiva, ja que tenim valors amb més d'una antiimatge. Per exemple $f(1) = f(-1) = 1$ (1 té dues antiimatges).
- **Exhaustiva:** una funció és exhaustiva si omple tot l'espai d'arribada. És a dir, tots els valors tenen alguna antiimatge. Per exemple, $f(x) = x^2$ no és exhaustiva, ja que els negatius no tenen antiimatges. També podem dir que f és exhaustiva si

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

- **Bijectiva**: diem que f és bijectiva si és exhaustiva i injectiva. $\Longrightarrow$ correspondència 1 a 1.
- **Nucli**: el nucli d'una funció són els valors que van a parar el zero: $\text{Nuc}(f)$.

Definicions alternatives

- **Recurregut d'una funció**: són els valors de l'eix vertical pels quals, si tracem un recta horitzontal tallem la funció en algun punt.
- Una funció és **injectiva** si qualsevol recta horitzontal la talla **com a molt** un cop (pot no tallar!).
- Una funció és **exhaustiva** si quelvol recta horitzontal la talla **com a mínim** un cop (pot tallar més d'un cop!)
- Una funció és bijectiva si **totes** les rectes horitzontals la tallen **exactament** un cop.
- El **nucli** d'una funció ($\mathrm{Nuc}(f)$) són les coordenades x els punts de tall amb l'eix d'abscises.

Rectes

Excepte les verticals, són de la forma:

$$f(x) = mx + n$$

- m: pendent de la recta:

  $$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

  És la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscises.
- n: ordenada a l'origen (punt de talla amb l'eix vertical o d'ordenades), ja que $f(0) = n$

Funcions lineals

Una funció és lineal si compleix el següent:

1. $f(\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot f(x_1)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Funcions lineals

Les úniques funcions lineals són les rectes que passen per l'origen ($n = 0$):

$$f(x) = mx$$

Vegem-ho:

1. $f(\lambda \cdot x) = m \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \overbrace{m \cdot x}^{f(x)} = \lambda \cdot f(x)$ (Proporcionalitat directa!)
2. $f(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) = \overbrace{m \cdot x_1}^{f(x_1)} + \underbrace{m \cdot x_2}_{f(x_2)}$

Funcions afins

Són funcions de la forma:

$$f(x) = mx + n$$

Són funcions lineals llevat d'un "offset", és a dir, si restem una certa quantita fixa a la funció obtenim una funció lineal:

$$g(x) = f(x) - n = mx$$

La funció $g(x)$ és lineal.

Paràboles

Les que tenen l'eix vertical són de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Si $a > 0$ mira amunt (convexa)
- Si $a < 0$ mira avall (còncava)
- Punt de tall amb l'eix d'ordenades (vertical): $(0, c)$, ja que $f(0) = c$
- Punts de tall amb l'eix d'abscisses. N'hi pot haver un, dos o cap, segons el nombre de solucions de l'equació:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vèrtex d'una paràbola: (x_v, y_v)

Per trobar la coordenada x del vèrtex, x_v, primer escrivim

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Ara, si ho poguéssim escriure com

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + A)^2 + C$$

el vèrtex estarà quan $x + A = 0$, d'on $x_v = -A$.
Si desfem la banda dreta ens queda

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2Ax + A^2 + C$$

Per tant, igualant coeficients trobem

$$2A = \frac{b}{a} \Longrightarrow A = \frac{b}{2a} \Longrightarrow x_v = -\frac{b}{2a} \Longrightarrow y_v = f(x_v)$$

Operacions amb funcions

Si tenim dues funcions $g(x)$ i $f(x)$ podem:

- **Multiplicar per un escalar**: $\lambda \cdot f(x)$, on $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **Sumar**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Multiplicar**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Funció inversa respecte el producte**: $(1/f)(x) = \frac{1}{f(x)}$

La resta i la divisió de funcions no són més que

- **Resta**: suma de l'oposat:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x)$$

- **Divisió**: producte per l'invers (respecte el producte):

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

Dominis d'operacions entre funcions

- **Producte per escalar**:
$$D(\lambda \cdot f) = D(f)$$
- **Suma** o resta:
$$D(f+g) = D(f-g) = D(f) \cap D(g)$$
- **Funció producte**:
$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$
- **Funció inversa respecte el producte**:
$$D(1/f) = D(f) \backslash \mathsf{Nuc}(f)$$
- **Funció quocient**.
$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \backslash \mathsf{Nuc}(g)$$

Nuclis d'operacions entre funcions

Si coneixem Nuc(f) i Nuc(g) coneixem les solucions de

$$f(x) = 0 \quad g(x) = 0$$

Què podem dir de:

- Nuc($f \cdot g$)
- Nuc($f + g$)
- Nuc(f/g)

Nucli del producte: Nuc$(f \cdot g)$

Busquem solucions de l'equació

$$f(x) \cdot g(x) = 0$$

si $a \in$ Nuc(f) i $b \in$ Nuc(g) aleshores

$$f(a) \cdot g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$$
$$f(b) \cdot g(b) = f(b) \cdot 0 = 0$$

sempre i quant... puguem avaluar $g(a)$ i $f(b)$! A més a més

$$f(a) \cdot g(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \text{ o } g(a) = 0$$

Per tant,

$$\text{Nuc}(f \cdot g) = \Big(\text{Nuc}(f) \cap D(g)\Big) \cup \Big(\text{Nuc}(g) \cap D(f)\Big)$$

Nucli de la suma: Nuc$(f+g)$

Busquem solucions de l'equació

$$f(x)+g(x)=0$$

Si $a \in$ Nuc(f) però $a \notin$ Nuc(g) aleshores

$$f(a)+g(a)=0+g(a)=g(a)\neq 0 \Longrightarrow a \notin \text{Nuc}(f+g)$$

En canvi, si $a \in$ Nuc(f) i $a \in$ Nuc(g) és a dir, $a \in$ Nuc$(f) \cap$ Nuc(g),

$$f(a)+g(a)=0+0=0 \Longrightarrow a \in \text{Nuc}(f+g)$$

Per tant:

$$\text{Nuc}(f+g) \supseteq \text{Nuc}(f) \cap \text{Nuc}(g)$$

És a dir, el nucli de $f+g$ conté la intersecció dels nuclis de f i g:
Fixem-nos, si

$$f(a)+g(a)=0 \not\Longrightarrow g(a)=0 \text{ i } f(a)=0$$

Nucli del quocient: Nuc(f/g)

Busquem solucions de l'equació:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

D'una banda necessitem $f(a) = 0$, però també:

- poder avaluar $g(x)$ en $x = a$ ($a \in D(g)$)
- que $g(a) \neq 0$ ($a \notin$ Nuc(g))

Per tant,

$$\text{Nuc}\left(\frac{f}{g}\right) = \Big(\text{Nuc}(f) \cap D(g)\Big) \setminus \text{Nuc}(g)$$

Composició de funcions

Definició (Composició de dues funcions)

Donades dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, definim la funció "f composada amb g" com

$$(f \circ g)(x) = f\left(g\left(x\right)\right)$$

(primer fem g i el que ens dóna ho "fiquem" a f)

$$\begin{array}{ccccc} & g & & f & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & f\big(g(x)\big) \end{array}$$

Composició de funcions: exemple

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$$

aleshores

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{3x+1}{x-1} + 2}$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\sqrt{x+2}\right) = \frac{3\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$$

Composició de funcions: propietats

1. **No és commutativa**: $f \circ g \neq g \circ f$
2. **És associativa:** $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
3. **No és distributiva respecte la suma**: $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$
4. **Element neutre:** . $Id(x) = x$, funció **identitat** (funció que no fa res):

$$(f \circ Id)(x) = f\big(Id(x)\big) = f(x)$$
$$(Id \circ f)(x) = Id\big(f(x)\big) = f(x),$$

   no fa res en operar-la amb la composició.
5. **Funció inversa**: $f^{-1}(y)$ desfà el que fa una funció $f(x)$:

$$(f \circ f^{-1})(x) = Id(x) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = Id(x) = x$$

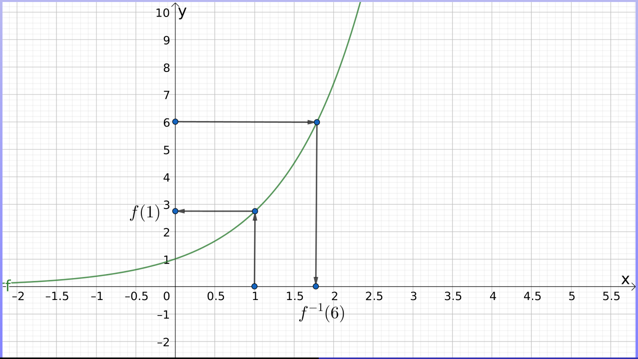
   No sempre existeix!!!

La funció inversa

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

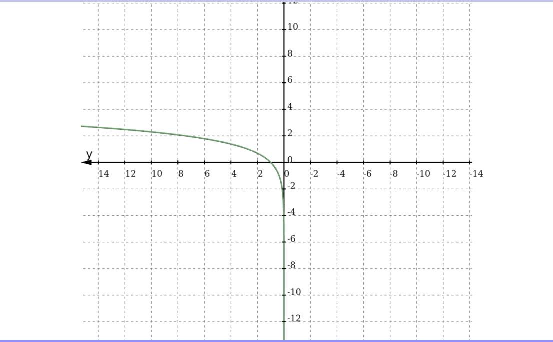
$$x \longmapsto f(x) = y$$

$$x = f^{-1}(y) \longleftarrow\!\!\dashv y$$

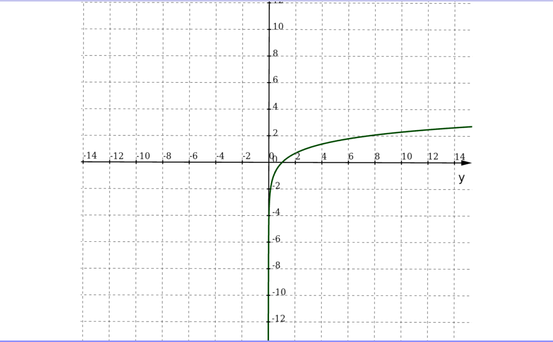


Gràfica de la funció inversa

1. Girar 90° en sentit antihorari
2. Fer una simetria

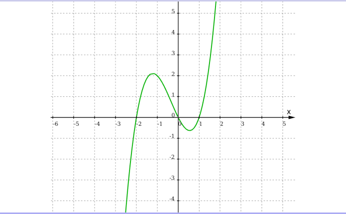


(a) Gràfica girada 90°, l'eix y queda invertit.

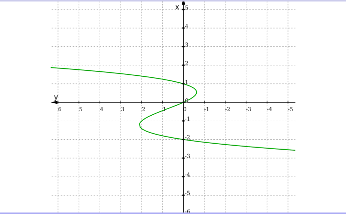


(b) Gràfica girada 90° després de la simetria.

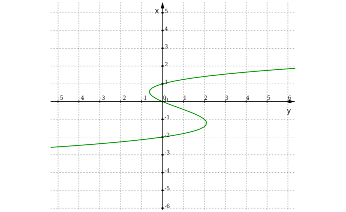
Funció inversa d'una funció no injectiva



(a) Funció no injectiva



(b) Gràfica girada $90°$



(c) Simètrica de la gràfica girada $90°$.

NO és una funció!!!!

Càlcul de la funció inversa

Cal escriure x en funció de y; és a dir, cal aïlar x de l'equació

$$f(x) = y$$

Càlcul de la funció inversa

Exemple

$$f(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

$$y = \frac{x+3}{x-1}$$

$$y(x-1) = x+3 \longrightarrow y(x-1) - x - 3 = 0 \longrightarrow yx - y - x - 3 = 0$$
$$\longrightarrow x(y-1) - y - 3 = 0 \longrightarrow x = \frac{y+3}{y-1}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-1}$$

Avui farem

- Corregir els deures
- Domini de la composició i la inversa
- Exemple
- Funcions a trossos
- Límits laterals
- Exemple gràfic

Domini de la composició i la inversa

Domini de la inversa

Si f és injectiva aleshores:

$$D(f^{-1}) = R(f)$$

Domini de la composició

Per avaluar $(f \circ g)(x)$ ens caldrà:

- Poder avaluar g: $D(f \circ g) \subseteq D(g)$
- Caldrà descartar els valors que facin que $g(x) \notin D(f)$

Domini de la composició i la inversa

Exemple

Exercici 22 dels problemes resolts.

Funcions definides a trossos

Són funcions de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \text{funció 1} & \text{Si } x \dots \\ \text{funció 2} & \text{Si } x \dots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Per exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Infinitat d'aplicacions

- Electrònica (transistors)
- Neurociència (neurones que descarreguen de sobte)
- Robòtica/mecànica (robots que caminen)
- Biologia (alliberació sobtada d'hormones)

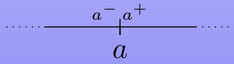
Límits laterals

Què són?

Ens preguntem quant val la funció quan x **s'apropa** a un cert valor (a)

$$\lim_{x \to a} f(x) \to \text{A quin valor s'apropa la funció quan } x \text{ s'apropa a } a?$$

A $x = a$ ens hi podem apropar per la dreta o per l'esquerra:



Límits laterals

Distingim si ens apropem per la dreta o per l'esqeurra fem els **límits laterals**:

Per l'esquerra

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$$

Per la dreta

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$$

Límits laterals

A la pràctica

Els límits laterals en $x = a$ valen el que val la funció en $x = a$ a no ser que $f(x)$ tingui "algun problema" en $x = a$.

Per tant, **en principi**, els límits valen el mateix que $f(a)$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} = f(a)$$

i només caldrà avaluar $f(x)$ en $x = a$.

Límits laterals

Per què fem els límits laterals?

Per estudiar el comportament de la funció allà on hi ha problemes.

Possibles problemes:

- **Punts que no siguin del domini**: volem saber què fa la funció quan ens apropem a un valor que no és del domini.
- **Canvis de branca en funcions definides a trossos**: en canviar de branca, les enganxem bé?

Exemple gràfic

Exemple 2.7.1 dels apunts

Límits laterals en canvis de branca

Si tenim

$$f(x) = \begin{cases} f_e(x) & \text{si } x < a \\ f_d(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Aleshores

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f_e(a^-) \qquad \text{perquè } a^- < a$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f_d(a^+) \qquad \text{perquè } a^+ > a$$

Si f_e i f_d no tenen “cap problema” en $x = a$, aleshores només caldrà subsituir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f_e(a)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f_d(a)$$

Límits laterals en punts on s'anul·la el denominador

Tenim dos casos possibles

1. Que **només** s'anul·li el denominador:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{k(\neq 0)}{0}$$

   Com el denominador segurament canviarà de signe en $x = a$, caldrà fer els límits laterals per veure si valen $+\infty$ o $-\infty$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

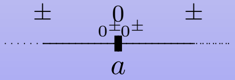
2. Que també s'anul·li el numerador

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Cas $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{k(\neq 0)}{0}$

Caldrà mirar en signe del denominador de f a banda i banda de $x = a$.

Signe denominador$\longrightarrow$



Tenint en compte el signe del numerador i el que ens hagi sortit a banda i banda de $x = a$ decidim si ens dóna $+\infty$ o $-\infty$.

Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Si ens substituir $x = a$ en una funció ens trobem que

$$f(a) = \frac{0}{0}$$

aleshores el numerador i denominador de f tenen factors en comú.

Caldrà

1. Factoritzar numerador i denominador
2. Simplificar al màxim: només quedarà el factor que s'anul·la al numerador o al denominador, però no als dos llocs alhora.
3. Tornar a fer el límit

Com es factoritza un polinomi?

Què és factoritzar?

Factoritzar vol dir convertir en productes (factors): $90 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$

Factorització de polinomis

1. Identificant alguna identitat notable: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.
2. Ens assegurem que el coeficient de grau més alt és 1. Si no ho és traiem factor comú:

$$2x^3 - 4x^2 + 3x + 8 = 2\left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 4\right)$$

Com es factoritza un polinomi?

Factorització de polinomis

3. Trobem les arrels del polinomi amb coeficient de grau més alt igual a 1 resolent:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0$$

- Fins a grau 2 ho sabem fer (de fet 3 i 4 també, per Cardano, però és un embolic)
- A partir de grau 3 haurem de buscar-nos la vida:
  - Traient factor comú x (si es pot) i reduïnt el grau
  - Si és incomplerta potser podem fer alguna cosa (biquadrades i altres trucs de màgia)
  - Si trobem una arrel entera ($x = a$) podem dividir pel binomi $x - a$ (Ruffini)
- Hi ha polinomis sense arrels reals ($x^2 + 2$). Són polinomis irreductibles (als reals!)

Com es factoritza un polinomi?

Factorització de polinomis

4. Un cop tenim totes les arrels el polinomi factoritzat serà

$$a(x-c_1)^{m_1}(x-c_2)^{m_2}\cdots(x-c_n)^{m_n}\cdot\underbrace{(x^2+b)}_{\text{Irreductible si } b>0}$$

L'exponent m_1 s'anomena **multiplicitat** de l'arrel c_1 (el nombre de vegades que l'arrel $x=c_1$ ha aparegut)

Factorització de polinomis

Exemple

Factoritzar

$$x^2 - 3x + 2$$

Busquem les arrels

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \quad x = 2$$

Per tant

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Factorització de polinomis

Exemple

Fracoritzar

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Busquem les arrels

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

És una arrel doble i, per tant,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Factorització de polinomis

Exemple

Factoritzar

$$2x^2 - 3x - 2$$

En busquem les arrels

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Longrightarrow x = 2 \quad x = -\frac{1}{2}$$

Per tant

$$2x^2 - 3x - 2 = 2\,(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Factorització de polinomis

Si el coeficient de grau més alt no és 1, aleshores:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n \left(x - c_1\right)^{m_1} \left(x - c_2\right)^{m_2} \ldots$$

Observació

Això és cert sempre, si el coeficient de grau més alt no és 1, busquem les arrels i només caldrà afegir-lo multiplicant a la factorització. La resta del producte quadrarà perquè la factorització és única llevat del producte per una constant.

Observació

Els nombres (polinomis constants) fan el paper de l'1 ens els enters (són els elements invertibles).

Exemple

Factoritzar

$$x^2 + 4$$

Busquem les arrels

$$x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Com no té arrels reals, el polinomi és irredictuble (a $\mathbb{R}[x]$!)

Observació

Els polinomis irreductibles fan el paper del "nombres primers" en els enters.

Factorització

Exemple

Factoritzar

$$x^3 + 2x^2 - 3x$$

Com és de grau 3, en principi, no sabem trobar-ne les arrels. Però podem treure factor comú:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x\left(x^2 + 2x - 3\right)$$

Podem seguir factoritzant trobant la resta d'arrels:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -3, \quad x = 1$$

Per tant tindrem

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x+3)(x-1)$$

Observació

Fixeu-vos que $x = 0$, $x = -3$ i $x = 1$ són les arrels i, per tant,

$$x^3 + 2x^2 - 3x = (x - 0)(x + 3)(x - 1)$$

Factorització de polinomis

Factoritzar

$$x^3 - 7x - 6$$

No sabem trobar-ne les arrels... però si ens hi fixem, ràpidament veiem que $x = -1$ n'és una! Per tant

$$x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot ?q(x)$$

I com trobem el polinomi $q(x)$??? És el quocient de la divisió

$$\frac{x^3 - 7x - 6}{x+1} = q(x)$$

Factorització de polinomis

En general: si $x = a$ és un arrel del polinomi $p(x)$ aleshores

$$x - a \text{ divideix } p(x) \Longrightarrow p(x) = (x-a)q(x)$$

Trobem el polinomi $q(x)$ fent la divisió tradicional o bé per Ruffini.

Analogia amb els nombres enters

Si d divideix D aleshores existeix q de manera que

$$D = d \cdot q$$

Si d no divideix D aleshores existeixen q i r de manera que

$$D = d \cdot q + r$$

(D: dividend, d: divisor, q: quocient, r: residu)

Exemple

Calcular el límit

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Substituint $x = 1$ trobem

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Factoritzant trobem

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Continguts Examen successions-funcions

- Successions: saber resoldre indeterminacions del tipus 1^∞, $\infty - \infty$ (amb arrels o fraccions).
- Saber calcular dominis de funcions (funcions racionals, arrels i funcions definides a trossos)
- Calcular punts de tall amb els eixos
- Tenir clars els conceptes: funció injectiva, exhaustiva, bijectiva, recurregut i nucli.
- Saber representar rectes. Tenir clars els conceptes de pendent, ordenada a l'origen. Punts de tall amb els eixos.
- Concepte de linealitat
- Saber representar paràboles. Saber trobar les coordenades del vèrtes i dels punts de tall amb els eixos.
- Operacions amb funcions: suma (i resta), producte i quocient. Saber trobar el domini i nucli de les funcions resultat.

Continguts Examen successions-funcions

- Composició de funcions
  - Tenir clar el concepte de composició.
  - Saber trobar l'expressió de la composició
  - Saber trobar el domini de la composició
  - Saber trobar la inversa respecte la composició
- Límits laterals:
  - Càlcul en canvis de branca en funcions a trossos
  - Càlcul en valors on s'anul·la el denominador però no el numerador
  - Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Material per l'examen

Teoria

- Apunts de funcions: fins la secció 2.7 (inclosa)
- Apunts de successions: no hi haurà part teòrica sobre successions, només caldrà saber resoldre indeterminacions del tipus 1^∞, $\frac{\infty}{\infty}$ i $\infty - \infty$.
- Transparències de funcions: tot

Material per l'examen

Exercicis resolts

- Domini: 17-20
- Composició i inversa: 21-22
- Límits laterals amb 0 al denominador: 23, 24
- Indeterminació $\frac{0}{0}$: 25, 26, 27 i 30
- Límits laterals en funcions definides a trossos: 29

Exercicis 20-21

Tots

Exàmens resolts

- Examen B1 geometria i funcions 18-19 (la part de geometria evidentment no entra)
- Examen B1E 20-21