Geometria analítica al pla

Elements d'$\mathbb{R}^2$

Els elements de $\mathbb{R}^2$ són parelles de nombres reals. Normalment es representen dins un parèntesis i se separen per una coma:

$$(1,2) \in \mathbb{R}^2$$

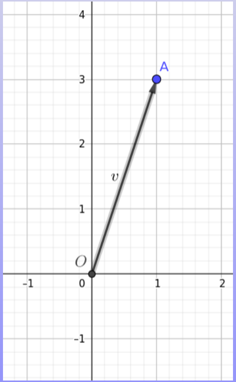
$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 &\Longrightarrow (x,y,z) \\
\mathbb{R}^4 &\Longrightarrow (x,y,z,t) \\
\mathbb{R}^n &\Longrightarrow (x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \\
\mathbb{R}^\infty &\Longrightarrow (a_n)_n
\end{aligned}$$

Punts o vectors?

Un element de $\mathbb{R}^2$ es podem pensar com:

- $A = (1,3)$: punt situat a 1 dreta/ 3 amunt. Normalment es representen amb lletres majúscules.
- $\vec{v} = (1,3)$: vector que va de l'origen $(0,0)$ al punt $(1,3)$. Normalment es representen amb lletres minúscules en negreta o amb una fletxa al damunt.

Punts o vectors?



Suma de vectors

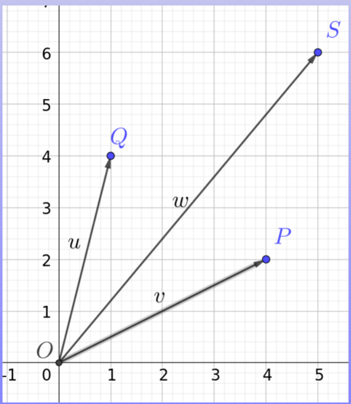
Els vectors/punts es poden sumar de la manera natural:

$$(4,2)+(1,4)=(4+1,2+4)=(5,6)$$

$$P=\vec{v}=(4,2)$$
$$Q=\vec{u}=(1,4)$$
$$S=\vec{w}=(5,6)$$

$S=Q+\vec{v}$: Punt que s'obté en situar $\vec{v}$ sortint de Q

$S=P+\vec{u}$: Punt que s'obté en situar $\vec{u}$ sortint de P



Resta

Geomètricament, què fem quan restem?

$$(1,2) - (2,4) = (-1,-2)$$

Sabem que

$$P + \vec{v} = Q \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} \text{ va de } P \text{ a } Q$$

Aïllant:

$$\vec{v} = Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

Resta: extrem menys origen

En restar dos punts obtenim el vector que va d'un a l'altre:

$$Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

Producte **per** escalar

Els vectors els podem multiplicar per un nombre real (un escalar):

$$2 \cdot (1,3) = (2,6)$$

- En multiplicar un vector per un escalar obtenim un vector amb la mateixa direcció (estan alineat, són **linealment dependents**). El vector resultat pot ser més llarg o més curt.
- Si l'escalar pel qual multipliquem és negatiu, el vector resultant tindrà la **mateixa direcció** però **sentit contrari**, a més de ser més llarg o més curt.

Producte **per** escalar

Resumint:

Si tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ (un escalar) i $\vec{v} = \left(v_x, v_y\right) \in \mathbb{R}^2$ (un vector), aleshores :

- $\vec{v}$ i $\lambda\vec{v}$ tenen la mateixa direcció, perquè $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\lambda v_y}{\lambda v_y}$
- Si $|\lambda| < 1$ el vector s'escurça ja que $|\vec{v}| = \lambda\,|\vec{v}| < |\vec{v}|$
- Si $|\lambda| > 1$ el vector s'allarga ja que $|\vec{v}| = \lambda\,|\vec{v}| > |\vec{v}|$
- Si $\lambda > 0$ $\lambda\vec{v}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció i sentita
- Si $\lambda < 0$ $\lambda\vec{v}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció però sentit contrari

Producte escalar

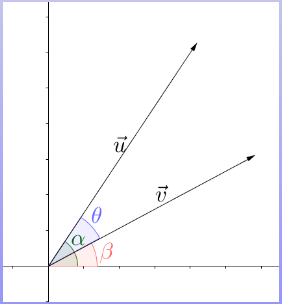
Volem calcular el cosinus de l'angle entre dos vectors $\vec{v} = (v_x, v_y)$ $\vec{u}(u_x, y_y)$
Fent servir les fórmules de l'angle suma trobem que:

$$\cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Recordant què són les coordenades dels vectors fàcilment obtenim:

$$\cos(\alpha) = \frac{u_x}{|\vec{u}|} \qquad \sin(\alpha) = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \qquad \sin(\beta) = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$



Producte escalar

Substituïnt i operant obtenim

$$\cos(\theta) = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Al numerador d'aquest quocient se l'anomena **producte escalar**, i s'escriu:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = < u, v > = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Així, el cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'escriurà:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$$

Vectors perpendiculars

Vectors perpendiculars

Dos vectors $\vec{v} =$ i $\vec{u}$ són perpendiculars si, i només si, el cosinus de l'angle que formen és nul, cosa que passarà quan

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

Vectors amb la mateixa direcció

Vecotrs amb la mateixa direcció

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció si són múltiples. És adir, existeix algun $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Si escrivim $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, això és equivalent a dir que les coordenades han de complir el següent sistema:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \lambda v_1 \\ u_2 &= \lambda v_2 \end{aligned}\right\}$$

Fent igualació obtenim:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{u_1}{v_1} \\ \lambda &= \frac{u_2}{v_2} \end{aligned}\right\} \iff \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \iff \boxed{u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0}$$

Vectors amb la mateixa direcció

L'expressió

$$v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1$$

s'anomena **determinant dels vectors** $\vec{u}$ i $\vec{v}$. De fet, és producte escalar entre els vectors $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u}^{\perp} = (u_2, -u_1)$:

$$v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1 = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}^{\perp} = 0$$

És a dir:

Mateixa direcció

Dos vectors tenen la mateixa direcció si, en girar-ne un 90° serà perpendicular a l'altre.

Baricentre d'un triangle

Baricentre o centre de gravetat d'un triangle

És el punt on es tallen les mitjanes (van des de la meitat d'un costat al vèrtex oposat)

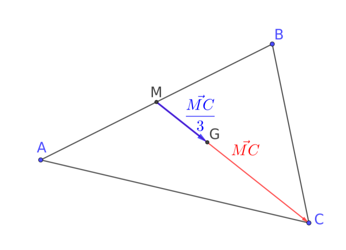
Propietat

Es troba a $\frac{1}{3}$ de la mitjana, a la part propera de la base.

Agafant, per exemple, el costat AB tindrem:

$$M = \frac{A+B}{2}$$

$$G = M + \frac{\vec{MC}}{3}$$



Equacions d'una recta

Equació d'una recta

Estableix una relació entre x i y de manera que el "lloc geomètric dels punts" sigui una recta.

L'equació la podem donar de vàries maneres

- Punt pendent
- Ordenada a l'origen i pendent
- Dos punts de pas
- **Un punt de pas i una direcció** $\longleftarrow$ És la més intuïtiva

Equació vectorial

Podeu ajudar-vos de l'applet de geogebra: `https://www.geogebra.org/m/desvaxjw`

Equació vectorial

Es tracta de donar un punt de pas, P, i un **vector director**, $\vec{v}$: Donats un punt de pas, P, i un **vector director**, els punts de la recta els obtenim allargant i escurçant $\vec{v}$ i posant-lo sortint de P. És a dir:

$$(x, y) = P + \lambda \vec{v}$$

Observació

Si dues rectes tenen vectors directors múltiples, tindran la mateixa direcció (seran paral·lels o bé iguals).

Equació paramètrica

Diem $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $P = (p_1, p_2)$. L'equació vectorial la podem passar a dues equacions reals:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2) \Longrightarrow \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

En variar el paràmetre λ s'obtenenen els valors de x i de y.

Equació contínua

Busquem ara una relació entre x i y directa, sense passar pel paràmetre λ. Per fer-ho ens mirem l'equació paramètrica com un sistema d'equacions i el resolem per λ fent igualació:

$$\left.\begin{aligned} x &= p_1 + \lambda v_1 \\ y &= p_2 + \lambda v_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{x - p_1}{v_1} \\ \lambda &= \frac{y - p_2}{v_2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}}$$

Observació

Les rectes horitzontals o verticals no es poden representar en contínua, ja que o bé $v_2 = 0$ (recta horitzontal) o bé $v_1 = 0$ (recta vertical).

Equació general o implícita d'una recta

L'equació contínua la podem reescriure:

$$\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}\Longrightarrow (x-p_1)\,v_2=(y-p_2)\,v_1\Longrightarrow \underbrace{v_2x-v_1y}_{Ax+By}+\overbrace{p_2v_1-p_1v_2}^{C}=0$$

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

Gradient d'una recta

El vector (A,B) s'anomena **gradient** de la recta, i és un vector ortogonal a la direcció de la recta: $(A,B)=(v_2,-v_1)\perp(v_1,v_2)$.

Equació explícita

De l'equació general podem aïllar y i pensar la recta com una funció afí:

$$Ax + By + C = 0 \Longrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Recordant que $A = v_2$ i $B = -v_1$, ens quedarà:

$$y = \underbrace{\frac{v_2}{v_1}}_{m} \cdot x + n$$

Observació

Observeu que les rectes verticals no es poden escriure en forma explícita, ja que $v_1 = 0$.

Pendent

Com el vector director era $\vec{v} = (v_1, v_2)$, el pendent $m = \frac{v_2}{v_1}$, el pendent de la recta, coincideix amb la tangen de l'angle que forma el vector amb l'eix d'abscises.

Posició relativa de rectes

Al pla dues rectes poden ser:

- Paral·leles: mateixa direcció però diferents punts de pas. **Cap punt en comú**
- Iguals o coincidents: mateixa direcció i un punt de pas en comú. **Infinits punts en comú**
- Secants o incidents: direccions diferents. **Exactament un punt en comú**.

Observació

Això només és cert en geometria Euclidiana. Si es nega el cinquè postulat d'Euclides es creen diferents geometries no-Euclidianes (esfèrica, hiperbòlica, el·líptica) on això no és cert!

Rectes amb la mateixa direcció

En forma vectorial:

$$r:\ (x,y)=P+\lambda\vec{u} \qquad s:\ (x,y)=Q+k\vec{v}$$

Hauran de tenir vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ amb la mateixa direcció, cosa que passarà si:

- Els vectors directors tenen el mateix pendent: $\frac{u_2}{u_1}=\frac{v_2}{v_1}$
- Els vectors directors són proporcionals: $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$
- En girar un vector director 90° el producte escalar és nul: $u_1v_2-u_2v_1=0$

Si, a més a més, el pun P compleix l'equació de s, aleshores seran la mateixa recta.

Rectes amb la mateixa direcció: equació general

En forma general:

$$r: \; Ax + By + C = 0 \qquad s: \; A'x + B'y + C' = 0$$

Raonem igual amb els vectors ortogonals (A, B) i (A', B'):

- Vectors ortogonals amb el mateix pendent: $\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$
- Els vetors ortogonals són proporcionals: $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$
- En girar 90° un vector ortogonal, el producte escalar serà 0: $AB' - BA' = 0$

Si, a més a més, la proporció entre els vectors ortogonals es manté amb C, aleshores seran la mateixa recta:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Rectes secants o incidents

Dues rectes són secants o incidents si es tallen en un punt, cosa que passarà si:

- Tenen direccions diferents:
  - Vectors directors amb diferent pendent: $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$
  - Vectors directors no proporcionals: $\dfrac{u_1}{v_1} \neq \dfrac{u_2}{v_2}$
  - En girar un vector director 90° no queden perpendiculars: $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$
- Els vectors ortogonals tenen direccions diferents:
  - Vectors ortogonals amb diferent pendent: $\dfrac{B}{A} \neq \dfrac{B'}{A}$
  - Vectors ortogonals no proporcionals: $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$
  - En girar-ne un 90° no queden perpendiculars: $A \cdot B' - B \cdot A' \neq 0$

Angle entre rectes

Angle entre rectes

L'angle que formen dues rectes és

- L'angle que formen els seus vectors directors
- L'angle que formen els seus vectors ortogonals

Rectes perpendiculars

Dues rectes secants són perpendiculars si:

- Els seus vectors directors són perpendiculars: $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$
- Els seuse vectors ortonals són perpendiculars: $A \cdot A' + B \cdot B' = 0$

Distància entre un punt i una recta

Es recomana seguir l'explicació juntament amb l'applet de geogebra

`https://www.geogebra.org/m/wd3ret7c`

Considerem una recta $r: Ax + By + C = 0$ i un punt $P = (p_1, p_2)$ (exterior). Ens preguntem quant val $d(P, r)$?

1. Agafem $Q = (x, y)$ un punt qualsevol de la recta. Les coordenades de Q compleixen l'equació $Ax + By + C = 0$.
2. Per trigonometria trobem que
$$d(P, r) = \left\| \vec{QP} \right\| \cdot \cos(\alpha)$$
3. Considerem el vector "gradient" unitari (mòdul 1):
$$\vec{v} = \frac{(A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
Alerta, no sabem si té el sentit que volem o sentit contrari: l'angle que formen $\vec{v}$ i $\overrightarrow{QP}$ podria ser α o $180 - \alpha$.

Distància d'un punt a una recta

4. Si fem el producte escalar entre $\overrightarrow{QP}$ i $\vec{v}$, recordant que $\|\vec{v}\| = 1$, obtenim:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|QP\| \cdot \cos\alpha = d(P,r) & \text{si l'angle és } \alpha \\ \|QP\| \cdot \underbrace{\cos(180-\alpha)}_{-\cos\alpha} = -d(P,r) & \text{si l'angle és } 180-\alpha \end{cases}$$

Per tant, tindrem

$$d(P,r) = \left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v}\right|$$

5. Calculem ara el producte escalar:

$$\left|\vec{QP} \cdot \vec{v}\right| = \left|\frac{(A,B)}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot (p_1 - x, p_2 - y)\right| = \frac{\left|A(p_1-x) + B(p_2-y)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} =$$

$$= \frac{\left|Ap_1 + Bp_2 - \overbrace{(Ax+By)}^{-C}\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Per tant:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

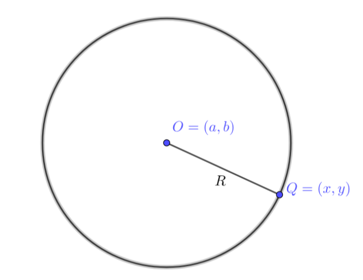
Còniques

Les còniques són les corbes que s'obtenen intersecant un con amb un pla. S'obtenenen 4 tipus de rectes:

- Circumferències
- El·lipses
- Hipèrboles
- Paràboles

Equació d'una circumferència

El conjunt de punts (lloc geomètric) del pla que es troben sobre una circumferència de centre $O = (a, b)$ i radi R compleixen una certa equació.



Considerem un punt qualsevol de la circumferència, $Q = (x, y)$. L'equació que s'ha de complir es deduiex de la següent condició

$$\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| = R$$

Equació d'una circumferència

Si ara escrivim

$$\overrightarrow{OQ} = Q - O = (x - a, y - b)$$

l'equació quedarà:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

Normalment, l'equació es presenta sense l'arrel (elevant al quadrat les dues bandes):

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$