Successions

Definició (Successió)

Conjunt d'elements ordenats on en tenim tants com **nombres naturals***: n'hi ha un de primer i* **sempre** *n'hi ha un després.*

$$
\begin{aligned}
a &\longrightarrow 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \\
b &\longrightarrow 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

- a, b: nom de les successió
- Cada element s'anomena **terme** de la successió. Es fa servir un subíndex (normalment les lletres n, i, j, k, l, m) per indicar de quin terme es tracta.
  - a_1: primer terme
  - a_4: 4rt terme
  - a_{1000}: terme mil·lèsim

- a_n: terme n-èssim.

Definicions bàsiques

- **Terme general**: expressió que permet trobar qualsevol terme sense trobar els anteriors. Per exemple:

$$a_n = 2 \cdot n$$
$$b_n = ???$$

- **Relació de recurrència**: defineix la successió mitjançant un relació entre un terme i *alguns* anteriors:

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$$

En aquest cas hem de donar un valor als dos primers termes.

Successions aritmètiques

Cada element s'obté sumant una certa quantitat (**diferència**, d) a l'anterior:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Terme general:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Tenim una fórmula per la suma dels n primers termes:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Successions geomètriques

Cada element s'obté multiplicant l'anterior per una certa quantitat (**raó**, r):

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Dit d'una altra manera, una successió geomètrica ha de complir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \; \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

és una geomètrica de raó $r = 2$ perquè $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \cdots = 2$.
El terme n-èssim l'obtenim multiplicant el primer terme, a_1, $n-1$ vegades per la raó, per tant, el terme general serà:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Fixem-nos que, en cas que el primer terme sigui la raó, $a_1 = r$, el terme general ens quedarà

Successions geomètriques

Exercici resolt: dir si són o no geomètriques les següents successions, trobar-ne la raó en cas afirmatiu.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = 3^{-1}$. Geomètrica, $r = \frac{1}{3}$ i $a_1 = r$

b) $a_n = 2^{n+3}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-(n+3)} = 2$. Geomètrica, de raó $r = 2$ i $a_1 = 2^4$.

c) $a_n = 3^{2n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}} = 3^{2(n+1)-2n} = 3^2$. Geomètrica, de raó $r = 3^2$ i $a_1 = 3^2$

d) $a_n = 5^{2n-3}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{2(n+1)-3}}{5^{2n-3}} = 2^{2(n+1)-3-(2n-3)} = 5^2$. Geomètrica, de raó 5^2 i $a_1 = 5^{-1}$

e) $a_n = 3^{-n+2}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)+2}}{3^{-n+2}} = 3^{-(n+1)+2-(-n+2)} = 3^{-1}$. Geomètrica, de raó $r = \frac{1}{3}$ i $a_1 = 3$.

Successions geomètriques

f) $a_n = 2^{n^2}$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = 2^{(n+1)^2-n^2} = 2^{2n+1}$. No és geomètrica, ja que el quocient de termes consecutius no és constant (depen de n).

Successions geomètriques

També tenim una fórmula per sumar els n primers termes:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Observació: si $|r| < 1$ els podem sumar fins l'infinit

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \cdots = \frac{a_1}{1 - r}$$

La successió de Fibonacci

Cada element s'obté sumant els dos anteriors i començant per 1 i 1:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Relació de recurrència:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Molt famosa perquè

- "Apareix" a la natura, a l'art, a l'arquitectura
- Està molt relacionada amb el **nombre d'or** o **raó àuria**:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

que és el nombre "més irracional de tots".

Terme general de la successió de Fibonacci

Resulta que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Bigg(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\varphi}\Bigg)^n - \Bigg(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\bar{\varphi}}\Bigg)^n\right]$$

Successions creixents

Definició

Una successió a_n és **creixent** *tot element de la successió és més gran que l'anterior.*

És a dir

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ és creixent:

$$0 < 1 < 4 < 9 < 16 < 25 < \dots$$

Ho podem demostrar:

$$a_n < a_{n+1} \Longleftrightarrow n^2 < (n+1)^2 \Longleftrightarrow \cancel{n^2} < \cancel{n^2} + 2n + 1 \Longleftrightarrow 0 < 2n + 1$$

cosa que és certa per tot $n \geq 0$.

Successions decreixents

Definició

Diem que la successió a_n és **decreixent** *si tot element és més petit que l'anterior.*

És a dir,

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ és decreixent:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

De fet també ho podríem demostrar:

$$a_n > a_{n+1} \Longleftrightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2},$$

cosa que és certa si $n > 1$.

Successions monòtones

Definició

Diem que una successió és **monòtona** *si és creixent o decreixent.*

Per exemple, les dues successions anteriors són monòtones, però la successió $a_n = (-2)^n$ no ho és, perquè és oscil·lant:

$$1 > -2 < 4 > -8 < 16 > -32 < 64 \ldots$$

Màxim d'una successió

Definició

Diem que M és **el màxim** *(valor més gran) d'una successió hi ha algun valor de la successió que iguala M però en canvi tota la resta de termes de la successió és més petita o igual.*

És a dir, si M és el màxim es compleix

$$\exists\, j \text{ t.q. } a_j = M \text{ i } a_n \leq M,\ \forall n \neq j.$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no té màxim perquè cada element és més gran que l'anterior (és creixent), però la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que en té, i és $M = 1$.

Mínim d'una successió

Definició

Diem que m és el **mínim** *(valor més petit) d'una successió si existeix un valor de la successió que iguala a m però en canvi tots els altres termes són més grans o iguals que m.*

És a dir, m és el mínim si

$$\exists\ j \text{ t.q. } a_j = m \text{ i } a_n \geq m, \forall n \neq j$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ té com a mínim $m = 0$ (el primer valor de la successió), però la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ no té mínim, perquè és decreixent.

Fita superior

Definició

Diem que K és una **fita superior** *si tots els termes de la successió són més petits o iguals que K.*

És a dir, K és una fita superior si

$$K \geq a_n, \forall n \geq 1$$

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no té cap fita superior,i en canvi la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que en té, per exemple $K = 1$ és una fita superior, i $K = 2$ també.
Fixem-nos que la fita superior **no és única**. De fet, si n'existeix una, qualsevol valor més gran també serà un fita superior.

Fita inferior

Definició

Direm que k és una **fita inferior** *si tots els termes de la successió són més grans o iguals que k.*

És a dir, k és una fita inferior si es compleix

$$k < a_n, \forall n \geq 1$$

La successió $a_n = n^2$ té 0 com a fita inferior, i -1 també, i $a_n = \frac{1}{n+1}$ té com a fita inferior $k = 0$, i $k = -10$.
En canvi, la successió $a_n = -n^2$ no té fita inferior.
Fixem-nos també que la fita inferior **no és única**, ja que, si n'existeix una, qualsevol valor més petit també serà una fita inferior.

Successions fitades

Definició

Diem que una successió **està fitada** *si té fita inferior i superior.*

Per exemple, la successió $a_n = n^2$ no està fitada perquè no té cap fita superior, però $a_n = \frac{1}{n+1}$ sí que ho està.

Suprem d'una successió

Definició

Diem que S és el **suprem** *d'una successió si S és la més petita de les fites superiors.*

Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$, amb $n \geq 1$, té $S = \frac{1}{2}$ (que coincideix amb el seu màxim), i la successió $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ té $S = 2$ (tot i que no té màxim). Però en canvi la successió $a_n = n^2$ no té suprem, perquè no té cap fita superior.

Ínfim

Definició

*Diem que I és l'**ínfim** d'una successió si I és la més gran de les fites inferiors.*

Per exemple, la successió $a_n = \frac{1}{n+1}$ té ínfim $I = 0$, ja que és decreixent i els elements de la successió s'apropen a 0 tant com es vulgui. Observeu que en canvi no té mínim, i que qualsevol nombre > 0 no pot ser ínfim perquè, fent n prou gran, segur que el passem: per quelsvol $I > 0$ existeix n_0 tal que $a_n < I$ si $n > n_0$.

Algunes propietats de les successions en general

- Si una successió té màxim, aleshores està fitada superiorment i té suprem.
- Si una successió té mínim, aleshores està fitada inferiorment i té ínfim.

Algunes propietats de les successions monòtones

- Una successió creixent no té màxim
- Una successió decreixent no té mínim
- Una successió creixent fitada superiorment té suprem i, a més, aquest és el seu límit
- Una successió decreixent fitada inferiorment té ínfim i, a més, aquest és el límit

Límit d'una successió

Definició

Diem que ρ és el límit d'una successió a_n si, a partir d'un valor de n prou gran, els termes queden sempre tant a prop de ρ com vulguem.

Límit d'una successió

Dit d'una manera més rigorosa:

Definició

Diem que ρ *és el límit de la successió* a_n *si, per* $\forall \varepsilon > 0$ *(per petit que sigui)* $\exists n_0$ *tal que*

$$|a_n - \rho| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Ho escriurem

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \rho,$$

i es llegeix de la següent manera: el límit de la successió a_n *quan* n *tendeix a infinit és* ρ *(ro).*

Convergència

Definició

Diem que una successió és **convergent** *si té límit. Diem que és* **divergent** *si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \textit{o} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Altrament, diem que no és ni convergent ni divergent.

"Operant" amb ∞

A la pràctica fem $n = \infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

a) $\frac{K}{\infty} \to 0$

b) $\frac{K}{0} \to \pm\infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador

c) $\infty + \infty \to \infty$

d) $\infty \cdot \infty \to \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)

e) $\infty^\infty \to \infty$

f) $\frac{\infty}{0} \to \pm\infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador

g) $\frac{0}{\infty} \to 0$

h) $0^\infty \to 0$

i) k^∞. Això pot donar o bé 0 o bé $\pm\infty$, dependrà de si $|k| < 1$ o no i del seu signe.

j) $0^{-\infty} \to \infty$

Exemples

a) $\lim \dfrac{10}{-n^3} = \dfrac{10}{-\infty} = 0$

b) $\lim \dfrac{10^{-10}}{\frac{3}{n^2}} = \dfrac{10^{-10}}{0^+} = \infty$

c) $\lim \dfrac{3}{-\frac{1}{n^2}} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

d) $\lim n^2 + n^3 = \infty + \infty = \infty$

e) $\lim n^2 \cdot (-n^3) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim n^{n^2} = \infty^{\infty} = \infty$

Exemples

g) $\lim \dfrac{-n^3}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

h) $\lim \dfrac{\frac{1}{n^2}}{-n^4} = \dfrac{0}{-\infty} \to 0$

i) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3} = 0^{\infty} \to 0$

j) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} = 0^{\infty} = 0$

k) $\lim \left(\dfrac{1}{n}\right)^{-n^3} = \lim \dfrac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{n^3}} = \dfrac{1}{0^{\infty}} = \dfrac{1}{0} = \infty$

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$

2) $\infty - \infty$

3) $0 \cdot \infty$

4) $\dfrac{0}{0}$

5) 0^0

6) 1^∞

7) ∞^0

Exercicis

Trobeu els següents límits i indiqueu els que donguin lloc a una indeterminació.

a) $\lim n^4 + n = \infty + \infty = \infty$

b) $\lim \frac{2}{\frac{-1}{n}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

c) $\left(-\frac{1}{n}\right)^4 = (0^-)^4 = 0$

d) $\lim \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{0^+}{1+0} = 0$

e) $\lim \left(n^{-2}\right)^{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = (0^+)^{\infty} = 0$

f) $\lim n^{-\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{\infty^0}$
Indeterminació

g) $\lim 2^{-n} = \lim \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

h) $\lim \frac{1}{n} \cdot n^n = \lim \frac{n^n}{n} = \lim n^{n-1} = \infty^{\infty} = \infty$

i) $\lim \left(-\frac{1}{3}\right)^{-n} = \lim \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$

Pàgina 208 n^o 5

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 \cancel{+n}}}{2n + \cancel{3}} = \lim \frac{2n}{2n} = 1$

d) $\lim \left(\frac{5}{n} - \sqrt{n}\right) = 0 - \infty = -\infty$

Pàgina 208 n^o 7

c) $\lim \dfrac{n+1}{\sqrt{n}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminació. $\rightarrow$

$$\lim \frac{n+\cancel{1}}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} = \lim n^{\frac{1}{2}} = \lim \sqrt{n} = +\infty$$

d) $\lim \dfrac{\sqrt{5n^3+3n^2}}{\sqrt{n^3+5n+1}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminació

$$\rightarrow \lim \frac{\sqrt{5n^3+\cancel{3n^2}}}{\sqrt{n^3+\cancel{5n}+\cancel{1}}} = \lim \frac{\sqrt{5n^3}}{\sqrt{n^3}} = \lim \sqrt{5}n^{3-\frac{3}{2}} = \lim \sqrt{5}n^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

f) $\lim \left(\dfrac{3n^2}{n+1} - \dfrac{3n^2-2}{n-1}\right) = \infty - \infty$ Indeterminació (veure més endavant)

g) $\lim \left(\sqrt{3n} - \sqrt{n}\right) = \infty - \infty$ Indeterminació (veure més endavant)

h) $\lim 300^{-n} = \lim \dfrac{1}{300^n} = 0$

Pàgina 208 n^o 7

i) $\lim \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^n = 1^{\infty}$ Indeterminació (veure més endavant)

j) $\lim \left(\dfrac{5n^2+3}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 5^0 = 1$

Límits de successions racionals: indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

1. Ens quedem només amb el terme de grau més alt perquè és el que "mana", tant al numerador com al denominador
2. Simplifiquem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2-3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminació.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\cancel{+1}}{3n^2\cancel{-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n^2}}{3\cancel{n^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4-2n+3}{n^3+2n^2-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminació}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4\cancel{-2n+3}}{n^3\cancel{+2n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4}{n^3} = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

Límits de successions racionals: demostració

Per veure-ho de manera rigororosa, només cal que dividim numerador i denominador pel terme de grau més alt. Veiem un parell d'exemples

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^3+3n-2} = \lim \frac{\frac{n^2+2n+1}{n^3}}{\frac{n^3+3n-2}{n^3}}$$

$$= \lim \frac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{2n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{3n}{n^3}-\frac{2}{n^3}} = \frac{0+0+0}{1+0-0} = 0$$

Límits de successions racionals: demostració

Un altre exemple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2-3n+1} = \lim \frac{\frac{n^2-1}{n^2}}{\frac{2n^2-3n+1}{n^2}}$$

$$= \frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{2-0+0} = \frac{1}{2}$$

Límits de successions racionals

Podem calcular el límit de manera més ràpida:

$$a_n = \frac{an^p + \text{grau més baix}}{bn^q + \text{grau més baix}}$$

aleshores només hem de comparar els graus i vigilar amb els signes.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \bullet\ \text{Si } p > q \begin{cases} \bullet\ \text{Si } a \text{ i } b \text{ mateix signe} \Longrightarrow +\infty \\ \bullet\ \text{Si } a \text{ i } b \text{ diferent signe} \Longrightarrow -\infty \end{cases} \\ \bullet\ \text{Si } p = q \Longrightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet\ \text{Si } p < q \Longrightarrow 0 \end{cases}$$

Pg. 208 n^o 7

a) $\lim \left(\frac{1}{5}\right)^{5n} = 0$ perquè la base compleix $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$. De fet, és una geomètrica de raó $r = \frac{1}{5^5}$.

b) $\lim \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^5 - 2n} = 0$ perquè el grau del denominador $>$ grau numerador

e) $\lim \left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{2n}{n+1}} = \infty^2 = \infty$ perquè a la base tenim grau numerador $>$ grau denominador, i a l'exponent els graus s'igualen (quocient de coeficients).

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Bàsicament, aquestes indeterminacions es resolen operant i convertint-les al tipus $\frac{\infty}{\infty}$.

- Diferència (resta de polinomis: operem ajuntant termes
- Diferència de successions racionals: operem fent que el denominador sigui el mateix
- Diferència d'arrels: intentem operat traient coses de les arrels o bé multipliquem i dividim pel conjugat

Alerta!!

No simplifiqueu els termes de grau més petit abans d'operar i fer la resta!!!

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de polinomis

Exemple:

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 - 2n + 1\right) - \left(n^2 - 3n - 2\right) = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Si simplifiquem ens quedaria:

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cancel{- 2n} + \cancel{1}\right) - \left(n^2 \cancel{- 3n} - \cancel{2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 - n^2 = 0 \; \boxed{\textbf{MALAMENT!!}}$$

Però en canvi, si operem ens queda:

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 - 2n + 1\right) - \left(n^2 - 3n - 2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n^2 - 2n + 1 - n^2 + 3n + 2\right) = \lim_{n\to\infty} n + 3 = \infty$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de successions racionals

Un altre exemple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2-1}{3n} - \frac{4n+1}{2} = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Si simplifiquem ens surt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2\cancel{-1}}{3n} - \frac{4n\cancel{+1}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{3n} - \frac{4n}{2} = \lim 2n - 2n = 0 \ \boxed{\textbf{MALAMENT!!}}$$

Però en canvi, si operem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2-1}{3n} - \frac{4n+1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(6n^2-1)\cdot 2}{3n\cdot 2} - \frac{(4n+1)\cdot 3n}{2\cdot 3n} =$$

$$= \lim \frac{12n^2-2-12n^2-3n}{6n} = \lim \frac{-3n-2}{6n} = -\frac{1}{2}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència de successions racionals

Exemple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n^2-1}{n^2-n} - \frac{n^3-3n+10}{n^2+n} = \lim \frac{n^3-2n^2-1}{n(n-1)} - \frac{n^3-3n+10}{n(n+1)} =$$

$$\lim \frac{\left(n^3-2n^2-1\right)(n+1) - \left(n^3-3n+10\right)(n-1)}{n(n-1)(n+1)} = \frac{n^4+\cdots-n^4+\cdots}{n^3+\cdots}$$

Els termes de grau 4 al numerador marxen, per tal caldrà mirar el grau 3:

$$\lim \frac{-2n^3+\cdots+n^3+\cdots}{n^3+\cdots} = \lim \frac{-n^3+\cdots}{n^3+\cdots} = -1$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència d'arrels

Exemple:

$$\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

Multipliquem i dividim pel conjugat per passar al tipus $\frac{\infty}{\infty}$ (Indet) o $\frac{0}{\infty} = 0$:

$$\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \overbrace{\boxed{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}}}^{\text{Conjugat}}$$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència d'arrels

Exemple:

$$\lim \sqrt{n^2-2n} - \sqrt{n^2+3n} = \lim \sqrt{n^2-2n} - \sqrt{n^2+3n} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+3n}}} =$$

$$\lim \frac{\left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2 - \left(\sqrt{n^2+3n}\right)^2}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+3n}} = \lim \frac{n^2-2n-\left(n^2+3n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n}} =$$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Simplificant els termes de grau més baix:

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+\cancel{2n}}+\sqrt{n^2+\cancel{3n}}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \lim \frac{n}{n+n} = \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$: diferència d'arrels

Un altre exemple:

$$\lim \sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1} = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

$$= \lim \sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1} \cdot \frac{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}} =$$

$$\lim \frac{\left(\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1}\right)^2 - \left(\sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}\right)^2}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}}$$

$$= \lim \frac{(3n^3 - 2n^2 + 1) - (3n^3 + n^2 + n - 1)}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}} = \lim \frac{-3n^2 - n + 2}{\sqrt{3n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{3n^3 + n^2 + n - 1}}$$

Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Ara, com tenim una fracció i al denominador ja no tenim $\infty - \infty$, podem simplificar els termes de grau més petit:

$$\lim \frac{-3n^2 \cancel{-n+2}}{\sqrt{3n^3 \cancel{-2n^2+1}} + \sqrt{3n^3 \cancel{+n^2+n-1}}} = \lim \frac{-3n^2}{\sqrt{3n^3}+\sqrt{3n^3}}$$

$$= \lim \frac{3n^2}{2\sqrt{3n^3}} = \lim \frac{3n^2}{2\sqrt{3}n^{\frac{3}{2}}} = \lim \frac{3n^{2-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \lim \frac{3n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{3}} = \lim \frac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{3}} = \infty$$

Alerta!!!!!

Quan tinguem una indeterminació del tipus $\infty - \infty$, no podem simplificar MAI els termes de grau més petit, perquè podria ser que els de grau més alt es cancelessin en restar.
Per exemple:

$$\lim \left(n^2 - 2\right) - \left(n^2 - 2n + 3\right) = \infty - \infty$$

La podem resoldre simplement operant:

$$\lim \left(n^2 - 2\right) - \left(n^2 - 2n + 3\right) = \lim n^2 - 2 - n^2 + 2n - 3 = \lim 2n - 3 = \infty$$

En canvi, si haguéssim simplificat els termes de grau més petit:

$$\lim \left(n^2 \cancel{- 2}\right) - \left(n^2 \cancel{- 2n + 3}\right) = \lim n^2 - n^2 = 0$$

que NO ÉS CORRECTE!!!

Exercici

Què hagués passat si haguéssim simplificat els termes de grau més petit a l'exemple de les arrels??

Exercici

Calculeu els següents límits

a) $\lim \dfrac{2n^3-1}{n^2} - \dfrac{3n^2+1}{2n} =$

b) $\lim \dfrac{n^3+n}{n^2+n} - \dfrac{n^3-1}{n^2-1} =$

c) $\lim \dfrac{n^4-n^3+2n+2}{n^2-1} - \dfrac{n^2+5n-1}{n+2} =$

d) $\lim \dfrac{2n^2-3}{n+2} - \dfrac{-n^2+5}{n-2} =$

e) $\lim \dfrac{n^5-n^4+2n^2-1}{n^3+2n^2-6n+2} - \dfrac{n^4-3n^2+1}{n^2+3} =$

f) $\lim \sqrt{2n^2-n+1} - \sqrt{n^2+n} =$

g) $\lim \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2+3n+2} =$

h) $\lim \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}} =$

Indeterminació del tipus 1^∞

D'un resultat de Leonhard Euler (que es pronuncia "Oiler") sabem que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = e$$

on $e = 2.71828\ldots$ és un nombre irracional anomenat "e" o "nombre d'Euler"

Indeterminació del tipus 1^∞

De fet, tenim el següent resultat

Proposició

Si

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \qquad o \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

aleshores

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

Fàcilment podem veure que, també tenim la següent propietat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{a_n} = e^{\lim \frac{a_n}{b_n}}$$

Resolució de la indeterminació del tipus 1^∞

Tenim una successió de la forma

$$a_n = b_n^{c_n} \quad \text{complint} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty \end{cases}$$

aleshores tenim una indeterminació del tipus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1^\infty$$

Normalment tindrem que la base és una successió racional tendint a 1:

$$b_n = \frac{d_n}{e_n}$$

Resolució de la indeterminació del tipus 1^{∞}

Per resoldre-la l'hem d'escriure en forma

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\ }\right)$$

1. Sumem 1 i restem 1 a la base per tenir $b_n = 1 + b_n - 1$ i, operant, ajuntem $b_n - 1$. Si la base és una successió racional, aleshores ens quedarà:

$$1 + b_n - 1 = 1 + \frac{d_n}{e_n} - 1 = 1 + \frac{d_n - e_n}{e_n}$$

2. Un cop ajuntat, posem un l'invers al denominador per deixar un 1 al numerador:

$$b_n = 1 + b_n - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b_n - 1}} = 1 + \frac{1}{\frac{e_n}{d_n - e_n}}$$

Resolució de la indeterminació del tipus 1^∞

3. Ara només caldrà resoldre el límit del quocient de l'exponent i el denominador:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{e_n}{d_n - e_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(d_n - e_n)}{e_n}$$

i el límit serà:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = e^\rho$$