Apunts de matemàtiques: 2^n Batxillerat

Albert Granados

1 Concavitat i convexitat

1.1 Introducció

Dins l'àmbit de l'estudi de funcions, una de les característiques a estudiar és la concavitat i la convexitat o, el que és el mateix, el sentit de la curvatura d'una funció, com a continuació natural de l'estudi del creixement i decreixement. En aquests apunts hi ha resumit una colla de raonaments per tal de relacionar la curvatura amb la derivada primera, segona i tercera d'una funció així com un resum pràctic a mode de recepte.

1.2 Curvatura d'una funció

A la figura 1 hi ha la gràfica d'una recta i d'una paràbola qualssevol. Intuïtiva i fàcilment es pot dir que la recta no té curvatura, o que la seva curvatura és nul·la, i en canvi la paràbola sí que en té, perquè "gira" i la recta no. Però com es podria plasmar aquesta idea intuïtiva de curvatura d'una manera més rigorosa? Doncs definint curvatura com el canvi de pendent. Així, la recta té curvatura nul·la perquè el seu pendent no canvia, és constant, i en canvi la paràbola té curvatura diferent de zero perquè el seu pendent no és constant, és diferent segons al punt on es miri.

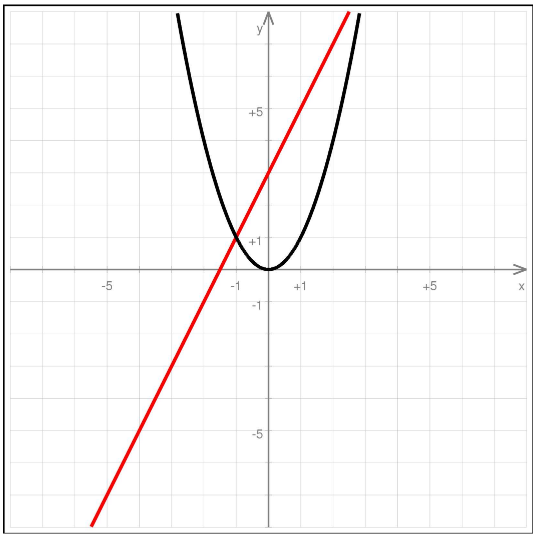


Figura 1: Recta i paràbola

1.2.1 Relació entre la curvatura i la segona derivada

Un cop vista la curvatura com el canvi de pendent d'una funció, el que cal preguntar-se ara és com es pot relacionar això amb les eines que s'han adquirit en la derivació.
En primer lloc, sabem que la derivada d'una funció és una altra funció que ens dóna el pendent d'aquesta en cada punt, doncs preguntar-se pel canvi del pendent d'una funció és el mateix que preguntar-se pel canvi que pateix la seva derivada. Doncs només resta associar la paraula canvi a quelcom no tan ambigu. Es pot dir que una funció no canvia si és constant, i que canvia si creix o decreix; doncs raonant d'aquesta manera es pot associar la derivada d'una funció, $f'(x)$, com una altra funció que es indica com canvia $f(x)$, ja que la derivada ens informa sobre el creixement i decreixement d'aquesta.
Amb els raonaments anteriors podem creure'ns que hem arribat a la conclusió que la derivada de la derivada d'una funció és una altra funció indicativa del canvi de pendent de la funció original, i, com la derivada de la derivada d'una funció no és més que la segona derivada de la funció ($f''(x)$), tenim finalment tenim que la segona derivada d'una funció ens parla sobre la curvatura d'aquesta.

1.3 Concavitat i convexitat

Un cop relacionada la segona derivada d'una funció amb la seva curvatura, ens podem preguntar: i què? Doncs fixem-nos en les gràfiques de la figura 2. Es

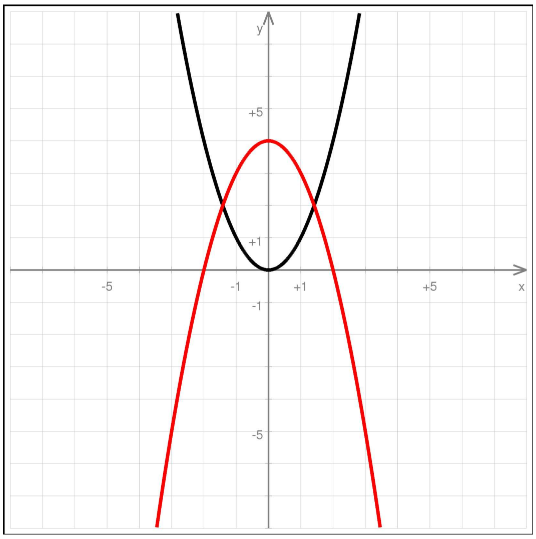
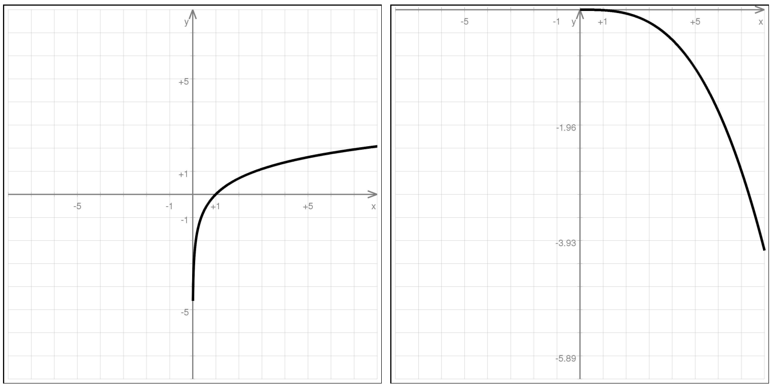


Figura 2: Paràboles: una còncava i l'altre convexa

tracta de dues paràboles, i la diferència bàsica entre elles és que una "mira" cap amunt i l'altra cap avall. Per conveni, direm que això de "mirar" cap amunt ($\smile$) és ser convex, i "mirar" cap avall ($\frown$) és ser còncau [1]. I quina relació hi ha entre la concavitat i convexitat i la curvatura, o el que és el mateix, la segona

[1] Tot i que no hi ha conscens pel que fa aquesta notació o la contrària, nosaltres farem servir aquesta



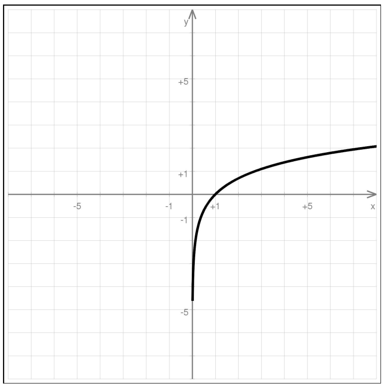
(a) Funció còncava creixent

(b) Funció còncava decreixent

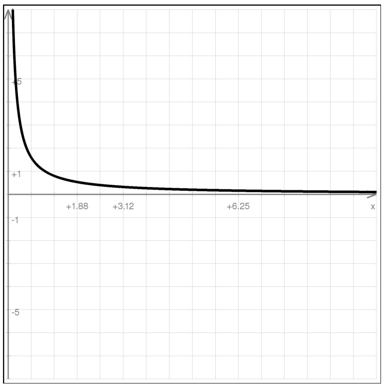
Figura 3: Funcions còncaves

derivada? Doncs primer caldria definir amb més detall què vol dir que una funció sigui còncava i què vol dir que sigui convexa.
A la figura 3 hi ha representades dues funcions còncaves ($\frown$), una creixent (figura 3(a)) i l'altra decreixent (figura 3(b)). La funció de la figura 3(a) creix però cada vegada menys, és a dir, el seu pendent decreix, doncs la derivada decreix, doncs la derivada de la derivada és negativa, doncs la segona derivada també.
Pel que fa a la funció de la figura 3(b), és una funció decreixent i, per tant el seu pendent és negatiu, però cada vegada decreix més o, dit d'una altra manera, el pendent es fa més negatiu i, per tant, el pendent decreix i així la segona derivada és negativa.
Per tal d'ajudar-vos en aquest raonament, a la figura 4 teniu la gràfica d'una funció còncava i les seves derivades primera i segona. Fixeu-vos que, com la funció té pendent positiu, la seva derivada és positiva (ja que la derivada i el pendent són la mateixa cosa), però decreix, amb el que la derivada de la derivada (la segona derivada de la funció) serà negativa. En conclusió, si una funció és còncava, la seva segona derivada és negativa.

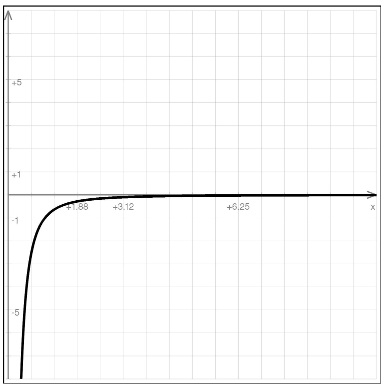
Podem fer ara el mateix raonament pel cas d'una funció convexa. Fixem-nos en la figura 5 on hi ha representades funcions convexes. La funció de la figura 5(a) és una funció creixent i, per tant, el seu pendent és positiu i, a més, aquest creix. Així, la derivada del pendent és positiva i, per tant, la segona derivada de la funció serà positiva.
Pel que fa a la funció de la figura 5(b), és una funció que és decreixent, però el seu pendent creix ja que cada vegada és menys negatiu i, per tant, la derivada de la derivada és positiva, doncs la segona derivada serà també positiva (ja que són la mateixa cosa).
Per ajudar-vos en el raonament anterior, a la figura 6 hi teniu representades una funció convexa decreixent i les seves derivades. Fixeu-vos que, en ser decreixent, la seva derivada és negativa, però com el seu pendent creix, la seva segona derivada és positiva.
En conclusió, una funció serà convexa si la seva segona derivada és positiva.



(a) Funció còncava creixent ($f(x)$)

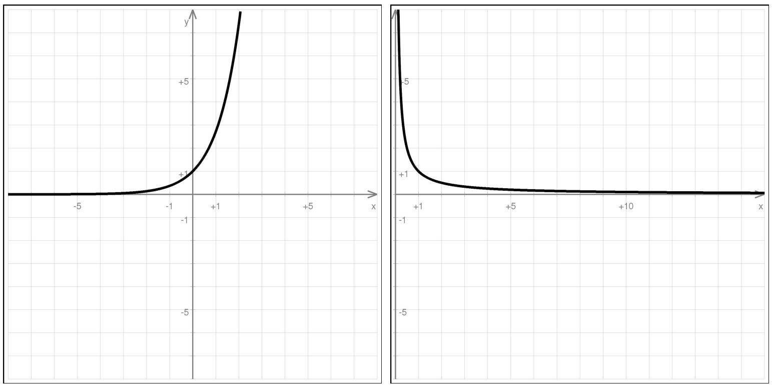


(b) Primera derivada ($f'(x)$)



(c) Segona derivada ($f''(x)$)

Figura 4: Funció còncava creixent i les seves derivades primera i segona



(a) Funció convexa creixent (b) Funció convexa decreixent

Figura 5: Funcions convexes

Finalment, si la segona derivada d'una funció val zero (sempre) aleshores aquesta funció serà una recta, ja que són les úniques que al derivar-les dues vegades s'anul·len, doncs aquesta funció tindrà curvatura nul·la i, per tant, no serà ni còncava ni convexa.

En resum, **si la segona derivada d'una funció és negativa** ($f''(x) < 0$) **la funció serà còncava** ($\frown$), **i si en canvi la segona derivada és positiva** ($f''(x) > 0$), **la funció serà convexa** ($\smile$).

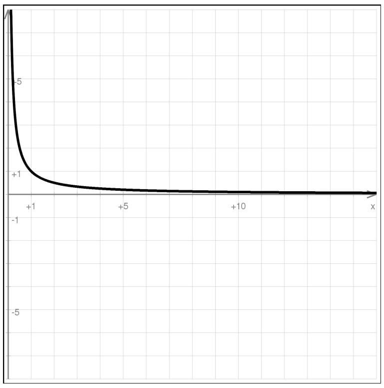
1.3.1 Intervals de concavitat i convexitat

En general, una funció no serà sempre còncava o sempre convexa, sinó que dependrà del valor de x on s'avaluï, tenint així que per certs valors de x la funció serà còncava, i per uns altres, serà convexa. En general, aquests certs valors de x pels quals la funció serà còncava o convexa vindran donats en forma d'intervals, però això no té per què ser sempre així i no en veurem cap exemple.
Com hem vist a l'apartat anterior, la nostra funció $f(x)$ serà còncava en els punts on $f''(x) < 0$, i convexa quan $f''(x) > 0$. Així, la metodologia a seguir per trobar els intervals de concavitat i convexitat serà calcular la segona derivada de la funció per després trobar els punts (valors de x) on és positiva i on és negativa. Vegem-ne un exemple.

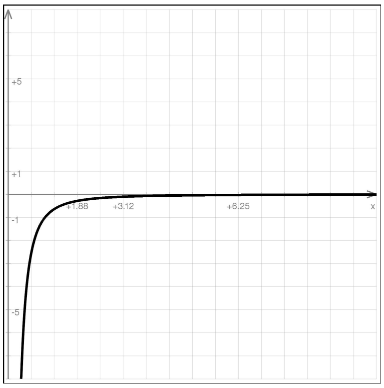
Exemple 1 *Trobar els intervals de concavitat i convexitat de la funció* $f(x) = x^3$.

Resolució:
Calculem primer la segona derivada de $f(x)$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. Ens preguntem ara, quan és positiva i quan negativa $f''(x)$? Doncs:

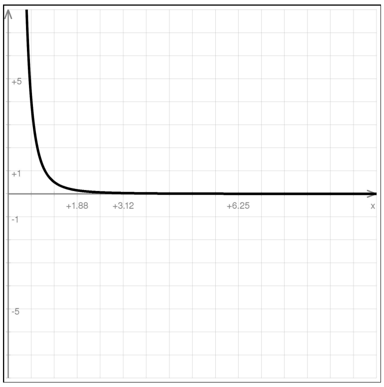
Si $x > 0$, $f''(x) > 0$ i per tant $f(x)$ és convexa.
Si $x < 0$, $f''(x) < 0$, i,per tant, $f(x)$ és còncava.



(a) Funció convexa decreixent ($f(x)$)



(b) Primera derivada ($f'(x)$))



(c) Segona derivada ($f''(x)$))

Figura 6: Funció convexa decreixent i les seves derivades

D'una manera gràfica es pot dir:

$$\frown \qquad\qquad\qquad \smile$$

$$0$$

$$f''(x) < 0 \qquad\qquad f''(x) > 0$$

O, més formalment, $f(x)$ és còncava en $(-\infty, 0)$, i convexa en $(0, +\infty)$.
A la figura 7 hi teniu representades la funció $f(x)$ i la $f''(x)$ per comprovar gràficament el que ha sortit.

Exemple 2 *Determinar els intervals de concavitat i convexitat de la funció* $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - 2x^2 + 3x + 2$.

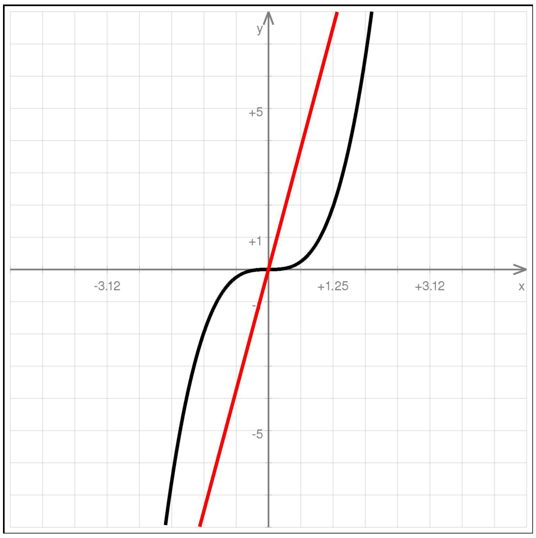


Figura 7: Gràfiques de la funció $f(x) = x^3$ (negre) i de la seva segona derivada (vermell)

Resolució: En primer lloc, calculem la segona derivada: $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + 3$, doncs $f''(x) = x^2 - 4$. Cal veure ara per quins valors de x $f''(x)$ és negativa i per quins positiva. Per trobar això, mirem primer quan $f''(x)$ canvia de signe, si és que canvia, és a dir, quan val zero[2]. Així, resolem l'equació $f''(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$. La segona derivada és doncs sospitosa de canviar de signe en $x = -2$ i $x = 2$. Com $f''(x)$ manté el signe dins els intervals $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ i $(2, +\infty)$, podem avaluar $f''(x)$ en tres punts, un dins cada interval, per saber quin signe té en cadascun d'ells, un a l'esquerra del -2, un entre el -2 i el 2, i un tercer a la dreta del 2. Per exemple calculem:

- $f''(-3) = (-3)^2 - 4 = 5 > 0$
- $f''(0) = -4 < 0$
- $f''(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$

Doncs $f''(x)$ és positiva a $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, i negativa en $(-2, 2)$, i per tant, $f(x)$ és convexa a $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, i còncava a $(-2, 2)$.
Gràficament també es podria fer:

$\smile$		$\frown$		$\smile$
	-2		2	
$f''(x) > 0$		$f''(x) < 0$		$f''(x) > 0$

A la figura 8 hi ha representada la funció $f(x)$ i la seva segona derivada, per fer-se una idea gràfica del resultat obtingut.

[2] Aquí s'està tenint en compte que la funció $f''(x)$ és una funció contínua, i per tant quan canviï de signe passarà pel zero, cosa que en general no tindria per què passar

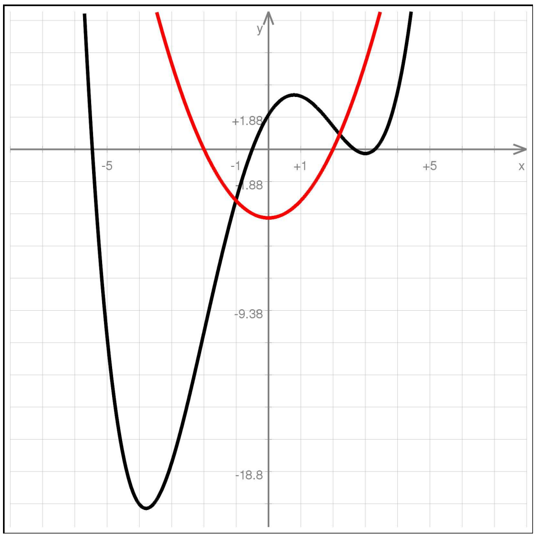


Figura 8: Gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - 2x^2 + 3x + 2$ (negre) i la seva segona derivada (vermell)

1.4 Punts d'inflexió

Què és un punt d'inflexió? Un punt d'inflexió és un punt de la forma $x = c$ on la funció $f(x)$ passa de ser còncava a convexa o de convexa a còncava, i ho fa de manera contínua. Per què de manera contínua? Doncs perquè hi ha funcions que passen de ser còncaves a convexes (o a l'inrevès) o no tenen cap punt d'inflexió, com per exemple la funció representada a la figura 9 passa de ser còncava en $(-\infty, 0)$ a convexa en $(0, +\infty)$ però no té cap punt d'inflexió, perquè aquest canvi es fa de manera "brusca" (fa el canvi de sobte). Així, perquè la funció canviï de ser còncava a convexa o a l'inrevés, la segona derivada haurà de canviar de signe, i, per fer-ho de manera contínua, ho haurà de fer passant pel zero. Així, hi ha just un punt, $x = c$, en aquest canvi de curvatura en que $f''(c) = 0$ que s'anomena punt d'inflexió. Més formalment, tenim la següent:

Definició 1 *Es diu que una funció $f(x)$ té un punt d'inflexió en $x = c$ si, i només si, es compleix que $f''(c) = 0$ i $f'''(c) \neq 0$.*

Fixem-nos que en la definició anterior s'ha demanat que la tercera derivada no fos nul·la enlloc de demanar que $f''(x)$ canviï de signe al voltant de $x = c$, condicions que són equivalents. Vegem-ho. Si $f''(x)$ ha de canviar de signe al voltant de $x = c$, per exemple, passar de ser negativa a positiva, voldrà dir que $f''(x)$ és creixent en $x = c$, i per tant, la derivada de $f''(x)$ ($f'''(x)$) haurà de ser positiva en $x = c$ ($f'''(c) > 0$). I a l'inrevès, si $f''(x)$ passa de ser positiva a ser negativa, voldrà dir que $f''(x)$ és decreixent en $x = c$, i per tant $f'''(c) < 0$. Per tant, demanar que $f'''(c) \neq 0$ és el mateix que demanar que $f''(x)$ canviï de signe al voltant de $x = c$ i, per tant, que la funció $f(x)$ passi de ser còncava a convexa o al revés i ho faci d'una manera contínua.

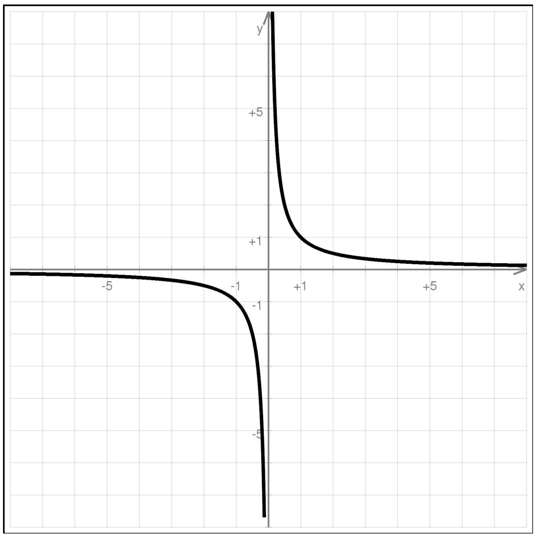


Figura 9: Exemple de funció que canvia de còncava a convexa i no té cap punt d'inflexió

A continuació es mostra un resum esquemàtic del que acabem de dir.

$$\text{Si } f''(c)=0 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f'''(c)>0 \implies f(x) : \frown \longrightarrow \smile \ \text{ en } x=c \\ \text{Si } f'''(c)<0 \implies f(x) : \smile \longrightarrow \frown \ \text{ en } x=c \end{array} \right.$$

D'altra banda, a l'exemple 2 hem trobat primer els punts on $f''(x)=0$ i després hem avaluat aquesta funció a l'esquerra i a la dreta d'aquests per saber-ne el signe. Com a cada interval han sortit signes diferents i la segona derivada s'anul·lava quan $x=\pm 2$, automàticament $x=-2$ i $x=2$ són dos punts d'inflexió i no cal mirar si $f'''(x)$ s'anul·la o no en aquests. Així, tenim dues maneres equivalents de trobar els punts d'inflexió: trobant primer els intervals de concavitat i convexitat, on els punts frontera entre els intervals seran punts d'inflexió si s'anul·la la segona derivada, o buscant els punts on $f''(x)=0$ i mirant si $f'''(x)$ val zero o no en aquests punts.

Per últim, fixem-nos que aquesta metodologia és molt semblant a la de buscar màxims i mínims, ja que, en el fons, trobar punts d'inflexió d'una funció $f(x)$ és equivalent a trobar màxims i mínims de $f'(x)$, és a dir, si $f(x)$ té un punt d'inflexió en $x=c$, aleshores $f'(x)$ té un màxim o un mínim en $x=c$ (penseu-hi).