2.7 Comença la teca: límits laterals

2.7.1 Intuïció i càlcul gràfic

Hem vist que hi ha punts que no són del domini, és a dir, valors de x pels quals la funció no ens retorna cap valor. Ens preguntem ara, què els passa a les funcions a prop d'aquests punts? Desapareixen de sobte, o fan alguna cosa especial a prop d'aquell valor?
Doncs la manera de saber-ho és "apropar-nos a aquell valor", sense arribar-hi, la qual cosa es fa mitjançant límits a un un cert valor: és a dir, veiem què li passa a la funció quan la variable x s'apropa infinitament a un cert valor. Per exemple, si volem veure què li passa a la funció

$$f(x) = \frac{x-3}{4}$$

quan x s'apropa a 5, escriurem

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$

A la pràctica, la manera de calcular un límit així serà substituir x per 5, i veure què passa. En el cas anterior, la funció no té cap problema quan $x = 5$ i, per tant, en aquest cas, sembla raonable pensar que, quan x s'apropa a 5 el valor que obtenim és proper a $f(5) = \frac{1}{2}$. En aquest cas, això és cert, i direm que

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \frac{1}{2},$$

ja que la funció no té cap problema a prop de $x = 5$.

Observació. Si una funció no té "cap problema" en $x = a$, aleshores sempre tindrem

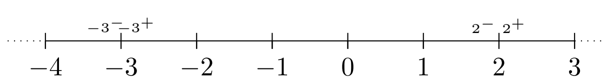
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

i el límit el calcularem simplement substituint x per a.

No obstant, la vida és dura, i de vegades no ho tindrem tan fàcil. De fet, el sentit de fer un límit a un cert valor és precisament quan la funció presenta algun problema en aquell valor.
Sovint ens trobarem en què haurem de distingir per quina banda ens apropem a un determinat valor, per la dreta o per l'esquerra? Per dreta o esquerra ens referirem a valors més grans (dreta) o més petits (esquerra). Això ho simbolitzarem amb el símbol $^+$ (dreta) o bé $^-$ (esquerra). Per exemple

Dreta del 2:	$\longrightarrow$	2^+	$\longrightarrow$	2.00001
Esquerra del 2:	$\longrightarrow$	2^-	$\longrightarrow$	1.9999
Dreta del -3:	$\longrightarrow$	-3^+	$\longrightarrow$	-2.999
Esquerra del -3:	$\longrightarrow$	-3^-	$\longrightarrow$	-3.00001

Gràficament:



De fet, sovint ens trobarem que segons si ens apropem per una banda o per l'altra, la funció farà coses diferents. Això ho distingirem mitjançant el que s'anomenen **límits laterals**. Per exemple, si volem veure com es comporta una funció quan x s'apropa a 1 per la dreta escriurem

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

i si volem veure què li passa quan ens apropem a 1 per l'esquerra:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Vegem alguns exemples.

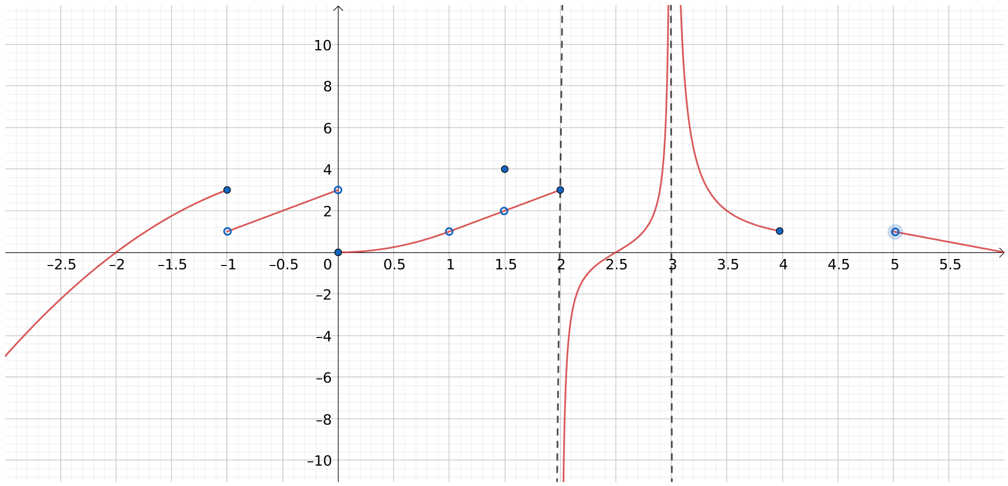


Figura 2.4

Exemple 2.7.1. *Considereu la funció de la Figura 2.4. Es demana*

a) *Trobeu les imatges de* -1, 0, 1, 1.5, 2, 3, 4 *i* 5

b) *Trobeu* $D(f)$

c) *Estudiar els límits laterals de la funció en aquests punts*

d) *Discutir si existeixen o no els límits de la funció en aquests punts*

Solució:

a) *Fixem-nos que als punts on ens demanen estudiar la funció, aquesta fa coses estranyes. Per tal de trobar les imatges, només cal que trobem l'alçada a la que tallem la funció. En cas de no tallar-la no hi haurà imatge, i en cas que ens trobem alguna cosa estranya, manaran els punts "negres", si n'hi ha. Per tant, tenim*

$$
\begin{aligned}
&f(-1) = 3\\
&f(0) = 0\\
&f(1) \nexists\\
&f(1.5) = 4\\
&f(2) \ = 3\\
&f(3) \nexists\\
&f(4) = 1\\
&f(5) \nexists
\end{aligned}
$$

Les imatges de 1 5 *no existeixen perquè hi ha una "bola blanca", i la imatge de* 3 *tampoc existeix perquè la recta* $x = 3$ *no talla la funció.*

b) *Pel que fa al domini, Fem un llistat dels punts pels quals no tenim antiimatge:*

$$\{1\}\,,\ \{3\}\,,\ (4,5]$$

Per tant, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R}\backslash\Big(\ \{1\} \cup \{3\} \cup (4,5]\Big) = (-\infty, 1) \cup (1,3) \cup (3,4] \cup (5,\infty)$$

c) Estudiem ara els límits laterals:

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3 & \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 \\
\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3 & \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0) \\
\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 & \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\
\lim_{x\to 1.5^-} f(x) = 2 & \lim_{x\to 1.5^+} f(x) = 2 \\
\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 & \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \\
\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty & \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \\
\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1 & \lim_{x\to 4^+} f(x) \nexists \\
\lim_{x\to 5^-} f(x) \nexists & \lim_{x\to 5^+} f(x) = 1
\end{array}$$

d) Fixem-nos que ens trobem en coses estranyes:

- *En $x = -1$ els dos límits laterals no coincideixen, perquè la funció fa un "salt". Per tant, segons si ens apropem per l'esquerera o per la dreta obtenim valors diferents (3 i 1, respectivament). A més, la imatge de la funció és 3, que coincideix amb el límit de la funció per l'esquerra. Ens preguntem ara, existeix el límit de la funció quan $x \to -1$? Doncs* **no existeix**, *perquè depèn de si ens apropem per l'esquerra o per la dreta:*

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \nexists$$

- *En $x = 0$ tenim una situació similar. El límit quan $x \to 0$ no existeix perquè depen de per on ens apropem al 0.*
- *En $x = 1$ tenim una situació curiosa. Els límits laterals coincideixen i valen 1, però la imatge d'1 no existeix. No obstant, com els límits laterals coincideixen, podem dir que el límit quan $x \to 1$ sí que existeix, perquè per totes dues bandes obtenim el mateix*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

- *En $x = 1.5$ la situació encara és més estranya. Els límits laterals existeixen i valen el mateix, per tan el límit quan $x = 1.5$ també existeix:*

$$\lim_{x\to 1.5} f(x) = 2$$

  No obstant, la imatge del 1.5 no val 2 sinó 4.

- *En $x = 2$ el límit per la dreta no existeix, perquè val $-\infty$. Per tant, el límit de la funció quan $x \to 2$ no existeix*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \nexists \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \nexists$$

- *La situació en $x = 3$ és curiosa. Hem de tenir clar que cap dels dos límits laterals existeix, perquè ens dóna $+\infty$ per les dues bandes. Per tant, el límit de la funció quan $x \to 3$ no existeix, però en canvi podem dir que*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$$

- *En $x = 4$ i $x = 5$ només tenim funció per una banda perquè la funció "desapareix". Per tant, en cap d'ells podem dir que el límit de la funció quan $x \to 4$ o $x \to 5$ existeixi, perquè per una banda no existeix.*

2.7.2 Càlcul analític de límits laterals

Molt bé, però i si no tenim una representació gràfica de la funció? Com podem calcular-ne els límits laterals? A la pràctica, començarem substituint x pel valor que ens donen, és a dir, intentarem calcular-ne la imatge. Aleshores, ens podem trobar bàsicament en diferents situacions

- **Funcions definides a trossos:** si la funció canvia de branca just on volem calcular el límit haurem d'anar per una branca o per l'altra segons si estem a la dreta o l'esquerra
- En **funcions racionals:** si resulta que el denominador s'anul·la on volem calcular el límit, ens podem trobar en una de les dues situacions següents:
  - si **s'anul·la un denominador i el numerador no**, segurament tindrem que el límit donarà $+\infty$ o $-\infty$. El més probable és que el denominador canviï de signe i que això depengui de si ens apropem per una banda o per l'altra. En aquest cas haurem tenir en compte el següent

$$\frac{\text{Nombre positiu}}{\text{Nombre molt proper a zero però positiu}} = \text{Nombre molt gran i positiu}$$
$$\frac{\text{Nombre positiu}}{\text{Nombre molt proper a zero però negatiu}} = \text{Nombre molt gran però negatiu}$$

    Per exemple

$$\frac{2}{0.00000001} = 2 \cdot 10^8$$
$$\frac{3}{-0.0000000001} = -3 \cdot 10^{10}$$

    Per tant, d'alguna manera podem dir que, si $k > 0$,

$$\frac{k}{0^+} \to +\infty$$
$$\frac{k}{0^-} \to -\infty$$

  - En funcions racionals, ens pot passar que s'anul·lin tant numerador com denominador. En aquest cas ens trobarem amb una **indeterminació del tipus** $\frac{0}{0}$ que haurem de resoldre. Més endavant veurem com, però bàsicament el que farem serà factoritzar i simplificar per tal de calcular el límit.

Més enllà de les funcions racionals i les funcions definides a trossos, hi ha altre funcions que poden portar problemes a l'hora de calcular límits en algun punt, com ara els logaritmes o les arrels d'índex parell.

Vegem algun exemple.

Exemple 2.7.2. *Considereu la funció*

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

i anem a estudiar els límits de la funció als punts on aquesta tingui problemes.
Clarament, l'únic lloc on aquesta funció té problemes és en $x = 2$, perquè s'anul·la el denominador i el numerador no. Per tant tenim

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2}{0}$$

Ara bé, aquest límit és $+\infty$ o $-\infty$? Doncs això dependrà del signe del denominador. Fixem-nos que $x-2$ canvia de signe en $x = 2$, passa de ser negatiu a ser positiu. Per tant, si ens apropem per l'esquerra $x-2$ tendirà a 0 però per la seva esquerra (serà negatiu). En canvi, si ens apropem a 2 per la dreta, $x-2$ també s'apropa a 0, però per la dreta de 0 (és positiu). Per tant, podem escriure

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

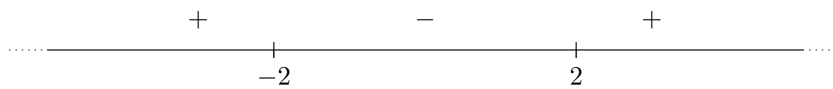
Exemple 2.7.3. *Estudieu el comportament de la funció als punts que no són del domini*

$$\frac{x-1}{x^2-4}$$

El domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$$

perquè el denominador s'anul·la en $x = \pm 2$. *Per estudiar els límits laterals, estudiem el canvi de signe del denominador. Ho podem fer "gràficament". Com el* $x^2 - 4$ *val* 0 *en aquests dos valors, podem avaluar l'expressió en punts a l'esquerra de* -2 *(per exemple en* $x = -3$*), entre* -2 *i* 2 *(per exemple en* $x = 0$*) i a la dreta de* 2 *(per exemple en* $x = 3$*). Així obtenim*



Per tant obtenim:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2.8 Indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$

I què passa si ens trobem que se'ns anul·la el numerador i denominador alhora? Que donarà el límit? Doncs es tracta d'una indeterminació, perquè el límit podria sortir qualsevol cosa perquè això dependrà de qui es faci petit més ràpid, el numerador, el denominador o tots es fan petits igual de ràpid?

1. Si el numerador guanya ens sortirà 0. Per exemple, en apropar x a 0 en la funció

$$f(x) = \frac{x^2}{4x}$$

   l'ordre del numerador és el doble de petit que el denominador. Dit d'una altra manera, el numerador té el doble de zeros que el denominador. Per exemple, si calculem

$$f(10^{-5}) = \frac{10^{-10}}{4\cdot 10^{-5}}$$

   per tant, com el numerador és sempre molt més petit que el denominador, el límit sortirà 0. Evidentment, podríem haver simplificat la funció per veure que ens dóna 0

2. Si el denominador guanya ens sortirà $\pm\infty$. Per exemple, en apropar x a 0 en la funció

$$f(x) = \frac{3x}{x^2}$$

   ens trobem ara que l'ordre del denominador és el doble de petit que el numerador. És a dir, el denominador té el doble de zeros (a la dreta de la coma) que el numerador. Si avaluem f en $x = 10^{-5}$ obtenim

$$f(x) = \frac{3\cdot 10^{-5}}{10^{-10}}$$

   i, efectivament, el denominador és molt més petit que el numerador. Per tant, el límit ens sortirà $\pm\infty$ (caldrà fer límits laterals perquè probablement hi haurà un canvi de signe).

3. Si tots dos empaten, ens sortirà un nombre. Que empatin voldria dir que tots dos són del mateix ordre (tenen el mateix nombre de zeros a la dreta de la coma) i per tant entre ells es manté una proporció (que serà el límit). Per exemple, si avaluem en $x = 10^{-5}$la funció

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2}$$

obtenim

$$f(10^{-5}) = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{10^{-5}}$$

i tant numerador com denominador tenen el mateix nombre de zeros. La proporció entre ells és sempre la mateixa, 3, ja que el numerador és el triple que el denominador. Per tant el límit serà 3.
Evidentment, ja es veu clarament que si simplifiquem la funció obtenim 3

2.8.1 Resolució de la indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

En la majoria de casos en què ens trobarem aquest curs aquesta indeterminació l'obtindrem a través de fraccions algebraiques; és a dir, funcions que són el quocient de dos polinomis.
Si en fer el límit a un nombre ens trobem que tant el numerador com el denominador s'anul·len, ens estarem trobant en què tots dos polinomis (numerador i denominador) tenen una arrel en comú i, per tant, en factoritzar-los ens trobarem algun factor en comú. Dit d'una altra manera, la fracció es podrà simplificar.

Per tal de resoldre aquest tipus d'indeterminacions en fraccions algebraiques farem:

1. Factoritzar numerador i denominador
2. Simplificar tot el que es pugui fins que només s'anul·li un d'ells com a màxim.
3. Aleshores, un cop hem simplificat, podrem tenir 3 casos:
   3.1 Si només s'anul·la el numerador el límit serà 0
   3.2 Si només s'anul·la el denominador, el límit serà $+\infty$ o $-\infty$. Caldrà fer límits laterals (preferentment fent servir la versió simplificada per agilitzar els càlculs) i procedir com amb els límits on només s'anul·la el denominador.
   3.3 Si els factors problemàtics desapareixen tant del numerador com del denominador, aleshores tots dos empataven. En aquest cas, el límit el trobarem simplement avaluant, ja que la versió simplificada de la funció ja no tindrà cap problema en aquell valor de x

2.9 Resum de límits laterals

En fer límits de funcions racionals quan x tendeix un nombre, ens trobarem en alguna de les situacions següents:

- Si el **denominador no s'anul·la**: La funció no presenta cap problema, per tant el límit serà el que resulti de substituir x pel valor del on estiguem fent el límit.
- Si **només el numerador** s'anul·la: És un cas particular del cas anterior, el límit valdrà 0.
- Si **només el denominador** s'anul·la: Caldrà fer límits laterals per saber si tenim 0^+ o 0^- i decidir si al denominador hi tenim tenim $+$ o $-\infty$
- Si **tots dos** s'anul·len: Caldrà factoritzar el numerador i denominador i simplificar tot el que es pugui. Fent servir la versió simplificada ens trobarem en alguna de les dues condicions anteriors.