Capítol 3

Aplicacions de la derivada

Contents

Exercici 26: Pg. 223 n^o 10.
Estudiar els intervals de creixement i decreixement de les funcións.

Solució.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2+1}$. *Fixem-nos que*

$$D(f) = \mathbb{R}$$

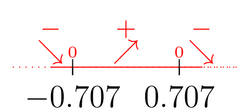
perquè $2x^2 + 1 = 0$ *no té solucions reals.*
Derivant obtenim:

$$f'(x) = \frac{2(2x^2+1) - 2x(4x)}{(2x^2+1)^2} = \frac{4x^2 + 2 - 8x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+2}{(2x^2+1)^2}$$

Igualant a 0 *obtenim*

$$-4x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$f'(x) \longrightarrow$



Per tant,

$$\textit{Decreixient si}\, x \in (-\infty, 0) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$$
$$\textit{Creixent si}\, x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$. *D'entrada a la funció no hi podem posar ni* $x = 0$ *ni nombre negatius. A més, el denominador val* 0 *quan*

$$\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Per tant, el domini de la funció és

$$D(f) = (0,1) \cup (1, \infty)$$

Derivant tenim:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Igualant a zero el numerador tenim:

$$\ln(x) = 1 \Longrightarrow x = e$$

perquè $e^1 = e$. *Estudiem el signe de la derivada:*

$$f'(x) \longrightarrow \quad \overset{}{0} \;\; \underset{-}{\searrow} \;\; 1 \;\; \underset{-}{\searrow} \;\; \overset{0}{2.73} \;\; \underset{+}{\nearrow}$$

Per tant, els intervals de monotonia quedaran:

$$\begin{array}{ll} \textit{Creixent si} & x \in (e, +\infty) \\ \textit{Decreixent si} & x \in (0,1) \cup (1, e) \end{array}$$

Noteu que, la funció té un mínim relatiu quan $x = e$, *i que val* $f(e) = \dfrac{e}{\ln(e)} = e$. *Per tant el mínim està al plunt* (e, e).
En canvi, en $x = 1$ *no hi ha res perquè no és del domini.*

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. *El domini serà*

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Derivant i igualant a 0 tindrem:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x\,(x-1)}{x^2} = 0$$

Per resoldre l'equació agafem el numerador i l'igualemt a 0:

$$e^x(x-1) = 0$$

Com $e^x \neq 0$ *(sempre és positiu), només tindrem una solució que serà* $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. *Estudiem el signe de la derivada avaluant al intervals* $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ *i* $(1, +\infty)$, *i ens queda:*

$$f'(x) \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} \searrow & & \searrow & 0 & \nearrow \\ - & 0 & - & 1 & + \end{array}$$

Els intervals de monotonia quedaran:

$$\begin{array}{ll} \textit{Decreixent si} & x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \\ \textit{Creixent si} & x \in (1, +\infty) \end{array}$$

La funció té un mínim quan $x = 1$, *i el mínim serà* $(1, f(1)) = (1, e)$

Exercici 27.
Tobeu els màxims i mínims i punts d'inflexió amb tangent horitzontal de les funcions.

Solució.

a) $f(x) = 3x^4 - 6x^2$. *El domini són tots els nombres reals. Per tant només caldrà derivar i igualar a 0:*

$$f'(x) = 12x^3 - 12x = 12x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ } i \text{ } x = \pm 1$$

Avaluem la derivada en punts dels intervals $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ *i* $(0,1)$ *i* $(1, \infty)$:

$$f'(x) \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} \searrow & 0 & \nearrow & 0 & \searrow & 0 & \nearrow \\ - & -1 & + & 0 & - & 1 & + \end{array}$$

Per tant, els intervals de monotonia quedaran:

$$\begin{array}{ll} \textit{Creixent si} & x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty) \\ \textit{Decreixent si} & x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \end{array}$$

Com tenim un canvi de signe als valors on la derivada s'anul·la, podem afirmar que la funció

- *Té un mínim relatiu en* $(-1, f(-1)) = (-1, -3)$
- *Té un màxim relatiu en* $(0, f(0)) = (0, 0)$
- *Té un mínim relatiu en* $(1, f(1)) = (1, -3)$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3$. *El domini és* $D(f) = \mathbb{R}$. *Per tant només cal mirar el signe la derivada:*

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = x^2(4x + 6) \Longrightarrow x = 0 \;\; i \;\; x = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Avaluant en algun valor dels intervals $(-\infty, -1.5)$, $(-1.5, 0)$ *i* $(0, +\infty)$ *trobem que:*

Creixent si	$x \in (-1.5, 0) \cup (0, +\infty)$
Decreixient si	$x \in (-\infty, -1.5)$

Per tant la funció tindrà:

- *Un mínim en* $x = -1.5$
- *Un punt punt d'inflexió amb tangent horitzontal en* $x = 0$

c) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. *Com* $e^x \neq 0$ *per qualsevol valor de* x, *el domini de la funció és*

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivem doncs i igualem a zero:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x\,(2x + 2 - x^2 - 2x - 1)}{(e^x)^2} = \frac{e^x\,(-x^2 + 1)}{(e^x)^2} = 0$$

Com $e^x > 0$ *per qualsevol valor de* x, *no val mai* 0. *En canvi,* $-x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$. *Estudiem el canvi de signe de la derivada:*

		-1		1	
$f'(x) \longrightarrow$	↘ $-$	0	↗ $+$	0	↘ $-$

Per tant, la funció:

- *Té un mínim relatiu quan* $x = -1$, *que és el punt* $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$.
- *Té un màxim relatiu quan* $x = 1$, *que és el punt* $(1, f(1)) = \left(1, \dfrac{4}{e}\right)$.

d) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$. *El domini serà els valors que fan que* $x^2+8>0$. *Si resolem* $x^2+8=0$ *veurem que no té cap solució real i, per tant, sempre és positiu. Per tant,*

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivem ara i igualem a 0. *Per fer-ho serà més còmode escriure la funció com*

$$f(x) = 4\left(x^2+8\right)^{-\frac{1}{2}}$$

i derivar com una potència, o bé derivar com un quocient. Fem la segona opció (no necessàriament més fàcil ni ràpida):

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x^2+8}}\cdot(2x)}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2} = -\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+8}}}{x^2+8} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}\cdot(x^2+8)} = 0$$

D'on traiem que $x=0$. *Estudiem ara el canvi de signe del denominador:*

$$f'(x) \longrightarrow \quad \underset{+}{\nearrow} \quad \underset{0}{|} \quad \underset{-}{\searrow}$$

Per tant,

- *La funció té un màxim relatiu en* $x=0$, *que és el punt* $\left(0,\dfrac{4}{\sqrt{8}}\right) = \left(0,\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left(0,\sqrt{2}\right)$

e) $f(x) = 4x^3-6$. *Clarament* $D(f)=\mathbb{R}$. *Derivem i igualem a zero:*

$$f'(x) = 12x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Estudiemt el canvi de signe de la derivada:

$$f'(x) \longrightarrow \quad \underset{+}{\nearrow} \quad \underset{0}{|} \quad \underset{+}{\nearrow}$$

Com la derivada no canvi de signe però s'anul·la, podem afirmar que la funció té un punt d'inflexió de tangent horitzontal en $x=0$.

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. *Altra cop* $D(f)=\mathbb{R}$. *Per tant només cal derivar i igualar a 0:*

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Estudiem el canvi de signe de la derivada:

$$f'(x) \longrightarrow \quad \overset{\nearrow}{+} \quad \underset{0}{|} \quad \overset{\searrow}{-}$$

Per tant, la funció té un màxim relatiu en $x = 0$, que és el punt $(0, f(0)) = (1, 1)$.

Exercici 28: PAU.
Calcula l'equació les equacions de les tangents a la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en els punts punts d'inflexió

Exercici 29: PAU.
Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Troba a i b perquè la corba $y = f(x)$ tingui en $x = 1$ un punt d'inflexió amb tangent horitzontal.

Exercici 30: PAU.
La corba $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ talla l'eix d'abscisses en $x = -1$ i té un punt d'inflexió en $(2, 1)$. Calcula a i b.

Exercici 31: PAU.
Busca els valor de b i c perquè la croba $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ tingui una inflexió en el punt $(0, 1)$ i el pendent de la recta tangent valgui 1.

Exercici 32: PAU.
Quins valors han de prendre b i c perquè $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ tingui un punt extrem en $x = 1$ i un punt d'inflexió en $x = 0$?

Exercici 33.
Feu un esbós de la gràfica de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$