Capítol 2

Derivades

Contents

Exercici 5: Pg. 160 n^o 52.
Calcular les derivades de les funcions

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 + x)$

d) $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 - x^2}}$

h) $f(x) = x^2(1 - 3x)^3$

Solució.

b) Aquesta derivada es pot fer (com a mínim) de tres maneres diferents: com un quocient, com una potència o derivant $\frac{1}{x}$.

Opció 1) Si derivem com un quocient tindrem:

$$f'(x) = \frac{\cancel{0 \cdot (\cdots)} - 1 \cdot (2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \boxed{-\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^2}}$$

Opció 2) Derivem com una potència fent servir la regla de la cadena. Si escrvim la funció $f(x)$ com:

$$f(x) = \left(x^2-3x+2\right)^{-1}$$

l'estem pensant com la funció x^{-1} composada amb la funció x^2-3x+2. Per tant, amb la regla de la cadena ens quedarà:

$$f'(x) = (-1) \cdot \left(x^2-3x+2\right)^{-2} \cdot (2x-3) =$$
$$= -\frac{1}{(x^2-3x+2)^2} \cdot (2x-3) = \boxed{-\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}}$$

Opció 3) Finalment, ens podem pensar la funció com la composició de la funció $\frac{1}{x}$ amb x^2-3x+2:

$$f(x) = \frac{1}{x} \circ \left(x^2-3x+2\right)$$

Com la derivada de la funció $\frac{1}{x}$ és $-\frac{1}{x^2}$, ens quedarà:

$$f'(x) = -\frac{1}{\left(x^2-3x+2\right)^2} \cdot (2x-3) = \boxed{-\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^2}}$$

c) Aquest s'ha de derivar com un producte:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+x) + \sqrt{x} \cdot 1 = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

Ara això es podria arreglar una mica. Per tenir el mateix denominador, multipliquem la segona part a dalt i abaix per $2\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1+x}{2\sqrt{x}} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1+x+2x}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \boxed{\frac{1+3x}{2\sqrt{x}}}$$

d) Aquesta la derivem com un quocient. Recordem la funció:

$$f(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

La derivada del numerador serà fàcil, però per calcular la derivada del numerador haurem d'aplicar la regla de la cadena.

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot (x^2-1)^2 - (-2x)\left(\left(x^2-1\right)^2\right)'}{\left(x^2-1\right)^4}$$

Derivem ara el denominador fent servir la regla de la cadena pensant-nos-el com:

$$\left(x^2-1\right)^2 = x^2 \circ \left(x^2-1\right)$$

per tant:

$$\begin{aligned}\left(\left(x^2-1\right)^2\right)' &= 2x \circ \left(x^2-1\right) \cdot (2x)\\ &= 2(x^2-1) \cdot 2x = 4x\left(x^2-1\right)\end{aligned}$$

o sinó directament:

$$\begin{aligned}\left(\left(x^2-1\right)^2\right)' &= 2\left(x^2-1\right) \cdot 2x\\ &= 4x\left(x^2-1\right)\end{aligned}$$

Ara ho substituïm a la nostra derivada i ens quedarà:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-2 \cdot (x^2-1)^2 - (-2x)\left(\left(x^2-1\right)^2\right)'}{\left(x^2-1\right)^4} =\\ &= \frac{-2(x^2-1)^2 + 2x \cdot 4x(x^2-1)}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{\left(x^2-1\right)^4}\end{aligned}$$

Ara això es pot arreglar una mica traient factor comú x^2-1 al numerador:

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x^2-1)}\Big(-2(x^2-1)+8x^2\Big)}{\left(x^2-1\right)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-2(x^2-1)+8x^2}{\left(x^2-1\right)^3} = \boxed{\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}}$$

f) Recordem la funció:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}}$$

Fixem-nos primer que la funció es podria simplificar:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\cancel{1-x}}{(1+x)\cancel{(1-x)}}} = \sqrt{\frac{1}{1+x}}$$

i seria significativament més fàcil de derivar. Fem totes dues versions

- **Derivada de la funció simplificada**. *Ens pensem la funció com la composició de:*

$$f(x) = \sqrt{x} \circ \left(\frac{1}{1+x} \right)$$

Per tant, la derivada serà:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \circ \left(\frac{1}{1+x} \right) \cdot \left(\frac{1}{1+x} \right)'$$

Abans de derivar "lo de dins", arreglem la composició:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x}} \circ \left(\frac{1}{1+x} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x}}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+x} = \frac{\sqrt{1+x}}{2} \end{aligned}$$

Per veure millor el pas intermig, fixem-nos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\left(\frac{1}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1+x} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ = \left(\left(\frac{1}{1+x} \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{1+x} \right)^{-1}} = \sqrt{1+x} \end{aligned}$$

Per tant, ara ja tenim que:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x} \right)'$$

Només cal calcular la derivada de "lo de dins" com un quocient:

$$\left(\frac{1}{1+x} \right)' = \frac{-1 \cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Així la derivada quedarà:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{\sqrt{1+x}}{2\,(1+x)^2}}$$

- **Derivada de la funció sense simplificar**. *Recordem la funció*

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}}$$

Això ho haurem de derivar com una regla de la cadena pensant la funció com

$$f(x) = \sqrt{x} \circ \frac{1-x}{1-x^2}$$

Per tant serà:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \circ \frac{1-x}{1-x^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)'$$

Abans de calcular la derivada de "lo de dins" arreglem la composició:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \circ \left(\frac{1-x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}}} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x}}$$

Aquesta expressió es podria simplificar, però com hem optat per no simplificar la funció, no tindria sentit fer-ho ara.
Calculem la derivada de "lo de dins" com un quocient:

$$\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)' = \frac{(-1)\,(1-x^2) - (1-x)(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$
$$= \frac{-(1-x^2) + (1-x)(2x)}{(1-x^2)^2}$$

Ara això es podria arreglar i simplificar, però seria incoherent fer-ho ara si no ho hem fet abans.
Substituïnt, la derivada ens quedarà:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x}} \cdot \frac{-(1-x^2) + (1-x)2x}{(1-x^2)^2}$$

Podríem intentar arreglar la funció per simplificar ara i veure que ens dóna el mateix que abans. Primer arreglem el segon numerador:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x}} \cdot \frac{-(1-x^2) + (1-x)2x}{(1-x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x}}\frac{-1+x^2+2x-2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x}} \cdot \frac{-x^2+2x-1}{(1-x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x}} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x^2)^2}$$

Per seguir simplificant, necessitem fer servir que $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ *i que*

$$-x^2+2x-1 = -\left(x^2-2x+1\right) = -(x-1)^2 =$$
$$= -(1-x)^2$$

Per tant, ens quedarà:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{1-x}}} \cdot \frac{-(1-x)^2}{((1-x)(1+x))^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+x} \cdot \frac{\cancel{(1-x)^2}}{-\cancel{(1-x)^2}(1+x)^2} = \frac{\sqrt{1+x}}{2} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} = \boxed{-\frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2}}$$

h) Recordem la funció:

$$f(x) = x^2(1-3x)^3$$

Aquesta clarament la farem derivant un producte:

$$f'(x) = 2x(1-3x)^3 + x^2 \cdot 3(1-3x)^2(-3) = 2x(1-3x)^3 - 9x^2(1-3x)^2$$

Per arreglar això traiem factor comú $(1-3x)^2$*:*

$$f'(x) = (1-3x)^2\left(2x(1-3x) - 9x^2\right) = (1-3x)^2\left(2x - 6x^2 - 9x^2\right) =$$

$$= (1-3x)^2\left(-15x^2 - 2x\right) = \boxed{(1-3x)^2 x(-15x-2)}$$

Exercici 6.
Calculeu les derivades de les funcions

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$

c) $f(x) = (1-x^2)^5$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-4}}$

f) $f(x) = \dfrac{5}{(2x+6)^3}$

Solució.

a) Derivem com un quocient:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (3x-2) - 1 \cdot (3)}{(3x-2)^2} = \boxed{-\frac{3}{(3x-2)^2}}$$

b) També com un quocient:

$$f'(x) = \frac{(2x)x - (1+x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2}{x^2} = \boxed{\frac{x^2-1}{x^2}}$$

c) *Fent la regla de la cadena derivem primer "elevar a la 5" i multipliquem per la derivada de "lo de dins":*
$$f'(x) = 5(1-x^2)^4 \cdot (-2x) = \boxed{-10x(1-x^2)^4}$$

d) *Derivem com un quocient:*
$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2)-(x^2-1)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{2x^3-2x^3+1}{x^4} =$$
$$= \boxed{\frac{1}{x^4}}$$

e) *També fem servir la regla de la cadena per derivar primer l'arrel i després "lo de dins":*
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}}} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} \cdot \frac{(2x)\cdot(x^2-4)-x^2(2x)}{(x^2-4)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} \cdot \frac{(2x)(x^2-4-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} \cdot \frac{-8x}{(x^2-4)^2} =$$
$$= -\frac{8}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2-4)^4}} = -4\sqrt{\frac{1}{(x^2-4)^3}} = \boxed{-\frac{4}{\sqrt{(x^2-4)^3}}}$$

f) *Derivant com un quocient i després la regla de la cadena per derivar el denominador:*
$$f'(x) = \frac{\cancel{0\cdot(\cdots)} - 5\cdot 3(2x+6)^2 \cdot 2}{(2x+6)^6} =$$
$$= \frac{-30\cdot \cancel{(2x+6)^2}}{(2x+6)^{\cancel{6}\,4}} = \boxed{-\frac{30}{(2x+6)^4}}$$

Exercici 7.
Derivar:

a) $f(x) = \sqrt{x+\ln(x)}$

b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+3x^2}\right)$

c) $f(x) = e^{3x}\cdot \ln\left(x^2+4\right)$

Solució.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\ln(x)}} \cdot \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\ln(x)}} \cdot \left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \boxed{\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x+\ln(x)}}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+3x^2}} \cdot (3\cdot 2x) = \dfrac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}\cdot\sqrt{1+3x^2}} = \boxed{\dfrac{3x}{1+3x^2}}$

c) $f(x) = e^{3x}\cdot 3\cdot \ln(x^2+4) + e^{3x}\cdot \dfrac{1}{x^2+4}\cdot 2x = \boxed{e^{3x}\cdot\left(3\ln(x^2+4)+\dfrac{2x}{x^2+4}\right)}$

Exercici 8.
Digueu si la següent funció és derivable o no:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & si\ x<1 \\ -2x^2+8x-4 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

Exercici 9.
Digueu si la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2\cdot x & si\ x\leq 2 \\ \ln\left(\frac{1}{x^2-3}\right) & si\ x>2 \end{cases}$$

és derivable en $x=2$.

Exercici 10.
Deriveu la funció

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+2}}}$$

Solució.

$$f'(x) = e^{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+2}}}\cdot \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x^2+2}}}}^{(\sqrt{\quad})'} \cdot \overbrace{\frac{1\cdot(x^2+2)-(x-1)2x}{(x^2+2)^2}}^{\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)'} =$$

$$= e^{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2+2}{x-1}}\cdot\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}$$

Exercici 11.
Considereu la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)(x-a) & si\ x<-1 \\ bx^2-1 & si\ x\geq -1 \end{cases}$$

a) Trobeu els valors de a i b per tal que la funció sigui derivable en $x=-1$

b) Per els valors que heu trobat, feu la gràfica de la funció f

c) Com s'interpreta gràficament el fet que la funció sigui derivable en $x=-1$?

Solució.

a) *Per tal que sigui derivable necessitem primer que* $-1 \in D(f)$*, cosa que es compleix perquè*

$$f(-1) = b - 1$$

En segon lloc necessitem que f *sigui contínua en* $x = -1$*. Per tant imposem que*

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

o el que és el mateix:

$$f(-1^-) = f(-1^+) = f(1)$$

d'on traiem l'equació

$$-(-1+1)(-1-a) = b - 1 \Longrightarrow 0 = b - 1 \Longrightarrow \boxed{b = 1}$$

En tercer lloc imposem que la derivada sigui contínua. Per derivar serà més còmode desfer la primera branca i escriure-la en forma de polinomi:

$$-(x+1)(x-a) = -x^2 + ax - x + a$$

Substituint $b = 1$ *la derivada quedarà:*

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + a - 1 & si\ x < -1 \\ 2x & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

Imposem ara que la derivada sigui contínua en $x = -1$*:*

$$f'(-1^-) = f'(-1^+) \Longrightarrow 2 + a - 1 = -2 \Longrightarrow \boxed{a = -3}$$

La derivada per tant quedarà:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 4 & si\ x < -1 \\ 2x & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

Per tant la funció quedarà:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & si\ x < -1 \\ x^2 - 1 & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

b) *Per fer la gràfica trobem els punts notables de les dues paràboles.*

(1) *El vèrtex de la primera serà:*

$$x_v = -2 \Longrightarrow y_v = 1 \Longrightarrow (-2, 1)$$

La paràbola talla l'eix d'abscisses quan

$$-x^2 - 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 \quad x = -1$$

El segon punt de tall serà just al canvi de branca.
Amb l'eix d'ordenades talla al punt $(0, -3)$ *(que no veurem perquè per* $x = 0$ *s'agafa la segona branca).*

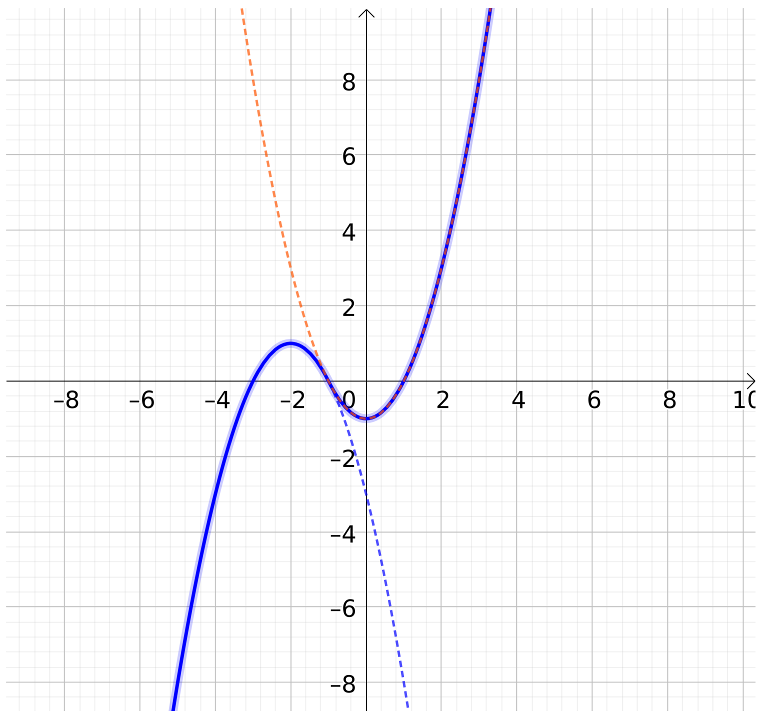
(2) *Pel que fa a la segona paràbola, trobem el seu vèrtex:*

$$x_v = 0 \Longrightarrow (0, -1)$$

que estarà just a l'eix d'ordenades. El tall amb l'eix d'abscisses serà:

$$(-1, 0) \quad (1, 0)$$

El primer tall serà just on hi ha el canvi de branca, i coincideix amb el segon tall de la primera paràbola (ja que f és contínua). La gràfica quedarà:



c) *El fet que sigui derivable en $x = -1$ es tradueix gràficament en el fet que les dues paràboles són tangents en $x = -1$ i, per tant, es pot traçar la recta tangent en aquest punt.*

Exercici 12: Pg. 170 n^o 26.
Explicar per què la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$$

és derivable en $x = 2$.

Solució.
Per tal que sigui derivable necessitem que sigui contínua. Tot apunta a que la primera branca té una discontinuïtat evitable en $x = 2$, i la segona la completa. Vegem-ho.
Necessitem

$$f(2^-) = f(2^+) = f(2)$$

Si fem el límit
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$
Per resoldre la indeterminació només cal factoritzar i simplificar
$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x+2$$
Per tant,
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$
Però com que $4 \neq f(2) = 3$ *la funció no és contínua, i com no és contínua tampoc serà derivable.*

Segurament l'enunciat està equivocat i la funció hauria d'haver estat
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 4 & si\ x = 2 \end{cases}$$
En aquest cas la funció sí que seria contínua i passaríem a veure si és derivable. Per derivar només caldria agafar la funció simplificada, i tindríem, si $x \neq 2$,
$$f(x) = x+2 \Longrightarrow f'(x) = 1$$
per tant tenim
$$f'(2^-) = f(2^+)$$
Per tant, com la funció és contínua i les derivades laterals coincideixen, la funció serà derivable en $x = 2$.

Exercici 13: Pg. 170 n^o 28.
Sabem que la funció
$$f(x) = \frac{3}{4-bx}$$
no és derivable en $x = 2$. *Calcular* b.

Solució.
La funció f*, com és un quocient, és derivable a tot arreu excepte allà on s'anul·li el denominador (i tampoc serà contínua). Per tant* b *haurà de complir*
$$4 - b2 = 0 \Longrightarrow b = 2$$
Podem comprovar que, efectivament, si $b = 2$ *la funció no serà derivable en* $x = 2$:
$$f'(x) = \frac{-3(-b)}{(4-bx)^2} = \frac{6}{(4-2x)^2}$$
La derivada no és contínua en $x = 2$ *i, per tant,* f *no és derivable en* $x = 2$ *(ni contínua).*

Exercici 14.
Representar gràficament la funció $f(x) = |x+2|$ i indicar raonadament en quin punt no és derivable.

Solució.
Els valors absoluts sempre són contínuos, però rarament derivables perquè tenen punts angulosos. Per veure-ho millor escrivim la funció com una funció definida a trossos. Només cal veure quan $x+2$ és positiu o negatiu:

$$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$$
$$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$$

Per tant la funció serà:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2) & si\ x<-2 \\ x+2 & si\ x \geq -2 \end{cases}$$

Fixem-nos que en $x=-2$ la funció val 0 per totes dues banda, perquè és on canvia de signe, i per tant l'"igual" el podem incloure a qualsevol de les dues banda.
Per veure que és derivable mirem primer si és contínua. L'únic possible problema es presenta en $x=-2$, quan es canvia de branca. Per tant fem

$$f(-2^-) = f(-2^+) \Longrightarrow 0 = 0 = f(-2)$$

i per tant és contínua.
Vegem que és derivable també. Derivant obtenim

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & si\ x<-2 \\ 1 & si\ x \geq -2 \end{cases}$$

I clarament no és derivable perquè

$$f'(-2^-) = -1$$
$$f'(-2^+) = 1$$

Exercici 15: Pg. 186 n^o 57.
Calcular les derivades

b) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+3}{e^x}\right)$

Solució.

b)

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{(e^x)^2} - \cancel{(e^x)^2} - e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{-\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{e^x}$$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{e^x+3}{e^x}} \cdot \frac{e^x \cdot e^x - (e^x+3)e^x}{e^{2x}} = \\ &= \frac{e^x}{e^x+3} \cdot \frac{\cancel{(e^x)^2} - \cancel{(e^x)^2} - 3e^x}{(e^x)^2} = -\frac{e^x}{e^x+3} \cdot \frac{3\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \\ &= -\frac{3\cancel{e^x}}{(e^x+3)\cancel{e^x}} = \boxed{-\frac{3}{e^x+3}} \end{aligned}$$

Exercici 16: Pg. 191 n^o 34.
Derivar les funcions

a) $f(x) = 3\ln(x)$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$

d) $f(x) = (2x+1)^3$

Solució.

a)

$$f'(x) = 3\frac{1}{4x} \cdot 4 = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}x} = \frac{3}{x}$$

b) *Escrivim primer*

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}} + 2x$$

Per tant:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} + 2 = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + 2 = \\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} + 2 = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} + 2 \end{aligned}$$

c)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - (x^2+1) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}\Big(2x - (x^2+1)\Big)}{(e^x)^{\cancel{2}}} =$$
$$= \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$$

d)

$$f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$$

Exercici 17: Pg. 190 n^o 24.
Trobar per a quin valor de a i b és contínua i derivable la funció

$$f(x) = \begin{cases} 3x & si\ x \leq 1 \\ ax^2 + b(x-1) & si\ x > 1 \end{cases}$$

Solució.
L'únic problema que pot tenir la funció és en $x = 1$. Per tal que sigui continua imposem

$$f(1^-) = f(1^+) \Longrightarrow 3 = a + b(1-1) \Longrightarrow a = 3$$

Imposem ara que sigui derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & si\ x \leq 1 \\ 2ax + b & si\ x > 1 \end{cases}$$

Imposem que la derivada sigui contínua:

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow 3 = 2 \cdot 3 + b \Longrightarrow b = -3$$

Exercici 18: Pg. 191 n^o 32.
Justifica el motiu pel qual la funció $f(x) = \sqrt{x}$ no és derivable en $x = 0$.

Solució.
El domini de la funció és

$$D(f) = [0, \infty)$$

Clarament, no serà derivable en $x = 0$ perquè, d'entrada, no hi podem dibuixar la recta tangent, perquè la funció "comença de sobte" en $x = 0$. Dit d'una altra manera, el límit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

només el podem fer per la dreta (quan $h \to 0^+$).
Però la funció f encara té un altra problema. Si calculem la derivada trobem que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

i clarament $f'(0)$ no existeix (és infinit). Això vol dir que el pendent de la recta tangent, quan ens hi apropem per la dreta, és infinit (la recta tengent tendeix a ser vertical).

Exercici 19: Pg. 191 n^o 35.
Determineu a i b per tal que la funció següent sigui derivable en tots els reals:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & si\ x \le 0 \\ bx^2 + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Solució.
Imposem que sigui contínua en $x = 0$:

$$f(0^-) = f(0^+) \Longrightarrow e^0 + a = 1 \Longrightarrow 1 + a = 1 \Longrightarrow a = 0$$

Trobem b imposant que sigui derivable. Calculem la seva derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \le 0 \\ 2bx & si\ x > 0 \end{cases}$$

Imposem que la derivada sigui contínua:

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Longrightarrow 1 = 2b \cdot 0 \Longrightarrow b\nexists$$

i la funció mai serà derivable!

Exercici 20.
Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} & si\ x \le 0 \\ 3x - 2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

en $x = 0$, $x = -1$ i $x = -2$.

Solució.
Estudiem primer el domini:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1 \quad x = -2$$

En $x = 0$ tenim $f(0) = -2$ i per tant $x = 0$ és del domini. Així tenim:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$$

Estudiem la continuïtat.

- *En $x = 0$:*

  $$f(0^-) = -2$$
  $$f(0^+) = -2$$

  Per tant, com tenim
  $$f(0^-) = f(0^+) = f(0) = -2$$
  la funció és contínua en $x = 0$.

- *Mirem en $x=-1$. Tenim*

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \frac{-3}{0}$$

  Per tant la funció té una discontinuïtat assimptòtica en $x=-1$. Veiem els límits laterals. La paràbola x^2+3x+2 talla l'eix X en $x=-2$ i després en $x=-1$. Per tant, en $x=-1$ passa de ser negativa a positiva. Per tant:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

- *Finalment estudiem la continuïtat en $x=-2$:*

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

  Factoritant trobem, quan $x\neq -2$:

$$\frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \frac{(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)(x+1)}} = \frac{x-2}{x+1}$$

  Fem ara el límit:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

  La funció tindrà doncs una discontinuïtat evitable en $x=-2$.

Vegem ara la derivabilitat. Com la funció no és contínua en $x=-1$ ni $x=-2$, tampoc serà derivable en aquests punt. Vegem si ho és en $x=0$. Calculem primer la derivada de la primera branca fent servir la versió simplificada:

$$\left(\frac{x-2}{x+1}\right)' = \frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

La segona branca queda

$$(3x-2)' = 3$$

Per tant la derivada, fora de $x=-2$, queda:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{(x+1)^2} & \text{si } x\leq 0 \text{ i } x\neq -2 \\ 3 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Resulta que la derivada és contínua en $x=0$ perquè

$$3 = f'(0^-) = f'(0^+) = 3$$

i, per tant, la funció serà contínua i derivable en $x=0$, però no serà contínua (ni derivable) en $x=-1$ i $x=-2$.

Exercici 21.
Trobeu les asímptotes (verticals, horitzontal i obliqües), si n'hi ha, de la funció

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x}$$

Solució.

- *Assíptotes verticals. Venen donades per valors on s'anul·la el denominador:*

$$x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ } i \text{ } x = 1$$

Per veure si són A.V. o no fem els límits:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre-la factoritzem (traien factor comú):

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - x} = \frac{\cancel{x}(x^2 + 1)}{\cancel{x}(x - 1)} = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \text{ si } x \neq 0$$

Per tant:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -1$$

Per tant, no hi ha A.V. en $x = 0$.
Mirem en $x = 1$. Per fer el límit podem fer servir la versió simplificada de la funció:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{2}{0}$$

Per tant, sí que tindrem una A.V. en $x = 0$. Podem fer els límits laterals. Com el canvi de signe del denominaodr $(x - 1)$ és de negatiu a positiu en $x = 1$, ens quedarà:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Per tant, la funció $f(x)$ té una assímptota vertical que és $\boxed{x = 0}$.

- *Asímptotes horitzontals. Fent els límits:*

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

ja que el grau del numerador és més alt que el del denominador. Per tant, la funció no té assímptotes horitzontal.

- *Com no hi ha assímptotes horitzontals, mirem si n'hi ha d'obliqües.*
  Trobem primer m fent el límit

$$m = \lim_{\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3+x}{x(x^2-x)} = 1$$

Fixem-nos que això és cert tant quan $x \to +\infty$ com $x \to -\infty$. Trobem ara n fent el límit:

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \pm(\infty - \infty)$$

Per resoldre la indeterminació simplement operem:

$$\frac{x^3+x}{x^2-x} - x = \frac{x^3+x-x(x^2-x)}{x^2-x} = \frac{x^3+x-x^3+x^2}{x^2-x} = \frac{x^2+x}{x^2-x}$$

i per tant

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2-x} = 1$$

Per tant la funció té una assímptota oblíqua que és la recta

$$y = mx + n \Longrightarrow \boxed{y = x+1}$$

Exercici 22.
Deriveu les funcions

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x^2+2}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2-3)}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

Solució.

a)

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x^2+2}} \cdot \frac{1\cdot(x^2+2)-(x-1)2x}{(x^2+2)^2} =$$
$$= \frac{\cancel{x^2+2}}{x-1} \cdot \frac{x^2+2-2x^2+2x}{(x^2+2)^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{-x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2)}}$$

b)

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\ln(x^2-3)}} \cdot \frac{1}{x^2-3}\cancel{2}x = \boxed{\frac{x}{(x^2-3)\sqrt{\ln(x^2-3)}}}$$

c)

$$f'(x) = \frac{e^{2x}\cdot 2\cdot e^x - (e^{2x}-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(2e^{2x}-e^{2x}+1)}{(e^x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \boxed{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}$$

d)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x-1) - \sqrt{x+1}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x-1) - \sqrt{x+1}\cdot\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{x-1-2\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}}{(x-1)^2} = \frac{x-1-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2} = \frac{x-1-2x-2}{2\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2} =$$

$$= \frac{-x-3}{2\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2} = \boxed{-\frac{x+3}{2\sqrt{x+1}\cdot(x-1)^2}}$$

Exercici 23.
Trobeu els valors de a i b per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}-1 & si\ x < -1 \\ ax+b & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

sigui contínua i derivable (a tot $\mathbb{R}$).

Solució.
Com les branques per separat no tene cap problema, la funció només presenta un possible problema en $x=-1$, que és quan es canvia de branca. Per tant, imposem que la funció sigui contínua en $x=-1$:

$$f(-1^-) = f(-1^+) \Longrightarrow e^{-2}-1 = -a+b$$

Imposem ara que sigui derivable. Trobem la derivada i imposem que sigui contínua:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & si\ x < -1 \\ a & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

Imposant que la derivada sigui contínua en $x=-1$ obtenim

$$f'(-1^-) = f'(-1^+) \Longrightarrow \boxed{2e^{-2} = a}$$

Recuperant la primera equació, podem trobar b:

$$b = a + e^{-2} - 1 = 2e^{-2} + e^{-2} - 1 = 3e^{-2} - 1 \Longrightarrow \boxed{b = 3e^{-2} - 1}$$

Exercici 24: Pg. 166 n^o 20.
Quin és el punt de la gràfica de la funcio $f(x) = x^2 + 3x$ que té tangent paral·lela a l'eix d'abscisses?

Solució.
Perquè la recta tangent sigui paral·lela el seu pendent ha de ser 0. Per tant, ens demanen que busquem el valor de x pel qual la derivada s'anul·la.
Derivant i igualant a zero obtenim:

$$f'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

que no és més que la coordenada x del vèrtex. Come ens demanen el "punt de la gràfica", faltarà trobar la coordenada y:

$$f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$$

i el punt serà el

$$\boxed{\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)}$$

Exercici 25: Pg. 166 n^o 21.
La gràfica de la funció $f(x) = x^2 + bx + c$ presenta un mínim en el punt $(3-, 1)$.

a) Calculeu b i c

b) Representeu la gràfica i comproveu la resposta

Solució.
Fixem-nos que ens estan donant dues informacions:

1. *Que la funció tingui un mínim en $x = 3$*
2. *Que la funció passi per $(3, -1) \Longrightarrow f(3) = -1$*

Imposem la primera. Necessitem que la derivada s'anul·li en $x = 3$. Per tant:

$$f'(x) = 2x + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{2} = 3 \Longrightarrow b = -6$$

Imposem ara la segona condició:

$$f(3) = -1 \Longrightarrow 3^2 - 6 \cdot 3 + c = -1 \Longrightarrow c = 8$$