Capítol 1

Funcions

Continguts

1.1 Domini

Exercici 1: Pg. 181 n^o 5[1].
Calculeu el domini de les funcions

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-6x+5}$

b) $g(x) = \sqrt{4+3x}$

c) $h(x) = \dfrac{7x+8}{x^2+5}$

d) $k(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}x+5}$

e) $p(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 - 5x + 2$

f) $t(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x} & si\ x \leq 2 \\ \dfrac{2x}{x-3} & si\ x > 2 \end{cases}$

Solució.*a) Només cal treure els punts on el denominador s'anul·la:*

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \longrightarrow x = 5 \ i \ x = 1$$

Per tant

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$$

b) El radicand ha de ser positiu, per tant

$$4 + 3x > 0 \Longrightarrow x > -\frac{4}{3}$$

El domini quedarà

$$D(g) = \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$$

c) Si busquem els zeros del denominador veurem que no en té (de reals). Per tant el domini d'h són tots els reals:

$$D(h) = \mathbb{R}$$

d) Com es tracta d'una arrel d'índex senar (cúbica) no hi ha cap problema si el radicand és negatiu. Per tant

$$D(k) = \mathbb{R}$$

e) *La funció e és un polinomi, que tenen com a domini tots els reals*

$$D(e) = \mathbb{R}$$

f) *Es tracta d'una funció definida a trossos. Haurem d'estudiar el domini de cadascuna de les branques per separat i després mirar quins valors del domini compleixen la condició per entrar per aquella branca.*
La primera branca té com a domini tots els nombres reals menys el 0*, perquè és on s'anul·la el dominador. Com* $0 \leq 2$ *compleix la condició, l'haurem de treure. Per tant, per ara tenim que el domini de la funció és* $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$.
La segona branca té per domini tots els nombres reals menys $x = 3$*, que és on s'anul·la el denominador. Com* $3 \geq 2$ *compleix la condició, també l'haurem de treure. Per tant, el domini de la segona branca serà* $(2, 3) \cup (3, \infty$.
Si ajuntem tots dos dominis tindrem

$$D(t) = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty).$$

Altrament, com només hem de treure els valors $x = 0$ *i* $x = 3$*, podríem escriure el domini com*

$$D(t) = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\},$$

que són exactament iguals.

Exercici 2: Exercici proposat.
Trobeu el domini de la funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & si\ x \leq 0 \\[2ex] \sqrt{x^2-4} & si\ 0 < x < 4 \\[2ex] \dfrac{x-3}{x^2-16} & si\ 4 \leq x \end{cases}$$

exercici

Solució.
Comencem estudiant la primera branca. El denominador s'anul·la quan $x^2 - 1 = 0$ *d'on* $x = 1$ *o* $x = -1$*. Ara bé, com a la primera branca només hi entrem si* $x \leq 0$*, aleshores només caldrà treure el* $x = -1$*, ja que si* $x = 1$ *entrem per la segona.*
Pel que fa a la segona branca, hem de treure tots aquells valor pels quals el radicand sigui negatiu. Busquem quan val 0*:* $x^2 - 4 = 0$ *si* $x = -2$ *o* $x = 2$*. Com la funció* $x^2 - 4$ *és una paràbola convexa (mira amunt) perquè el coeficient de grau* 2 *és positiu, haurem de treure l'interval central, és a dir, l'interval* $(-2, 2)$*. Ara bé, com a la segona branca hi entre només si* $0 < x < 4$*, és a dir, si* $x \in (0, 4)$*, fent la intersecció d'aquests interval tindrem els punts que haurem de treure, que són*

$$(-2, 2) \cap (0, 4) = (0, 2).$$

Per tant, fins ara haurem de treure el valor $x = -1$ i l'interval $(0, 2)$.
Vegem ara la tercera branca. Mirem quan s'anul·la el denominador:

$$x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow x = -4 \text{ o } x = 4.$$

Com a la tercera branca hi entrem només si $4 \leq x$, només haurem de treure el 4, perquè -4 no està inclòs.
Resumint, hem de treure $x = -1$ de la primera, l'interval $(0, 2)$ de la segona i el punt $x = 4$ de la tercera. Per tant, el domini serà

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup [2, 4) \cup (4, \infty).$$

Exercici 3: Domini de les funcions suma, producte i quocient.
Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

a) *Trobeu $D(f)$, $D(g)$, $Nuc(f)$ i $Nuc(g)$. Recordeu que el nucli d'una funció són els valors pels quals aquesta val 0.*

b) *Trobeu $D(1/g)$, $D(1/f)$, $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ calculant les expressions explícitament.*

c) *Trobeu $D(1/g)$, $D(1/f)$, $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ fent servir només els resultats de l'apartat a).*

d) *Quines diferències trobeu?*

Solució.

a) *Com les dues funcions només tenen denominadors presentaran problemes quan aquests s'anul·lin, cosa que passa quan $x^2 - 1 = 0$ (per f) i $x + 1 = 0$ (per g). Per tant tenim*

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Pel que fa al nucli de les funcions, només cal que miram quan valen 0:

$$f(x) = 0 \longrightarrow \frac{x+2}{x^2-1} = 0 \longrightarrow x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$$

Fixem-nos que hem de comprovar que $x = -2$ sigui del domini, és a dir, que el denominador no s'anul·li per $x = -2$ cosa, que no passa. Dit d'una altra manera, el segon pas només el podem fer si $x^2 - 1$ no és zero, cosa que només passa quan $x = -2$. Per tant,

$$Nuc(f) = \{-2\}.$$

Pel que fa a g:

$$g(x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{x+1} = 0 \longrightarrow 1 = 0$$

i per tant la funció g mai val zero:

$$Nuc(g) = \emptyset$$

b) Trobem les expressions de les funcions que ens denamen:

$$(1/g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{1} = x+1$$
$$(1/f)(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x+2}$$

En principi, d'aquestes expressions deduiríem que $D(1/g) = \mathbb{R}$ i $D(1/f) = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, però, com veurem al proper apartat, això no és correcte!
Per tal de calcular $f+g$ haurem de buscar un denominador comú. Factoritzem els denominadors trobant-ne les arrels:

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm 1$$

i per tant tenim que

$$x^2 - 1 = (x+1)\cdot(x-1)$$

Com $x+1$ és irreductible, ja està factoritzat. Ara sumem $f+g$:

$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{(x+1)\cdot(x-1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{(x+1)\cdot(x-1)} + \frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}$$
$$= \frac{x+2+x-1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{2x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

Per tant, d'aquesta expressió treuríem que

$$D(f+g) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Calculem ara el quocient de les funcions:

$$(f/g)(x) = \frac{\frac{x+2}{x^2-1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{(x+2)\cdot(x+1)}{(x^2-1)\cdot 1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1}$$
$$(g/f)(x) = \frac{1}{(f/g)(x)} = \frac{x^2-1}{(x+2)(x+1)}$$

Tal com estan escrites, els dominis són

$$D(f/g) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$
$$D(g/f) = \mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$$

Ara bé, què hagués passat si fem servir la factorització per simplificar aquestes expressions?

$$(f/g)(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1} = \frac{(x+2)\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$
$$(g/f)(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

I per tant ara obtenim que

$$D(f/g) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$
$$D(g/f) = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$$

i els dominis que han sortit són diferents dels d'abans. Quina és la versió correcta? Doncs com veurem al proper apartat, cap de les dues!

c) *Calculem ara els mateixos dominis que abans però sense calcular les funcions. Recordem com es calcula la imatge de qualsevol punt per la funció $1/g$, per exemple en $x = a$:*

$$(1/g)(a) = \frac{1}{g(a)}$$

Vist així, la funció $(1/g)$ presenta dos possibles problemes:

1 Hem de poder calcular $g(a)$

2 El valor de $g(a)$ no pot ser 0

- *Per tant, el domini de la funció $(1/g)$ serà el resultat de treure al domini de g el seu nucli:*

  $$D(1/g) = D(g)\setminus Nuc(g)$$

  Com el nucli de g és buit, tindrem

  $$D(1/g) = D(g) = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

  Fixem-nos que això no coincideix amb el que havíem obtingut a l'apartat anterior calculant l'expressió exacta!

- *Fem ara el mateix amb $(1/f)$:*

  $$D(1/f) = D(f)\setminus Nuc(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1, -2\}$$

  que tampoc coincideix amb el resultat de l'apartat anterior!

- *Vegem ara la suma $f + g$. Per avaluar la funció suma*

  $$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

  necessitarem poder calcular tant $f(a)$ com $g(a)$ i, per tant, el domini serà el de f intersecat amb el de g:

  $$D(f + g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$$

- *Fem ara els quocients de les funcions. Raonant com abans ens trobem que per tal de calcular $(f/g)(a)$ hem de fer*

$$(f/g)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Per tant ens trobem amb dos possibles problemes

  - *D'una banda hem de poder calcular $f(a)$ i $g(a)$*
  - *de l'altra hem d'evitar que $g(a)$ valgui 0*

Per tant, per trobar el domini de f/g haurem de treure tots els punts que

  - *No siguin del domini de f: els valors $\{-1, 1\}$*
  - *No siguin del domini de g: $\{-1\}$*
  - *Siguin del nucli de g (perquè g està al denominador): cap, perquè $Nuc(g) = \emptyset$*

Per tant, ens quedarà

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \left(\underbrace{\{-1,1\}}_{\textit{No són de D(f)}} \cup \overbrace{\{-1\}}^{\textit{No són de D(g)}} \cup \underbrace{\emptyset}_{\textit{Nuc(g)}} \right) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Això també ho podem escriure de la següent manera:

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \textit{Punts que } \textbf{no} \textit{ són de } D(f) \textbf{ o } \textit{de } D(g) \textbf{ o } \textit{de } Nuc(g) \right\}$$

$$= \underbrace{D(f) \cap D(g)}_{\textit{Punts del domini de } f \textbf{ i } \textit{de } g} \overbrace{\setminus Nuc(g)}^{\textit{Traiem els punts on } g \textit{ val } 0}$$

- *Fem el mateix amb g/f, la funció seria la següent:*

$$(g/f)(a) = \frac{g(a)}{f(a)}$$

per tant hem de **treure** *els punts que*

  - **no** *siguin del domini de f: $\{-1, 1\}$*
  - **no** *siguin del domini de g: $\{-1\}$*
  - *siguin del nucli d'f: $Nuc(f) = \{-2\}$*

Per tant ens quedarà:

$$D(g/f) = \mathbb{R} \setminus \left(\underbrace{\{-1,1\}}_{\textit{No són de D(f)}} \cup \overbrace{\{-1\}}^{\textit{No són de D(g)}} \cup \underbrace{\{-2\}}_{\textit{Nuc(f)}} \right) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, -2\}$$

Això també ho podríem escriure com

$$D(g/f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ \textit{Punts que } \textbf{no} \textit{ són de } D(f) \textbf{ o } \textit{de } D(g) \textbf{ o } \textit{de } Nuc(f) \right\}$$

$$= \underbrace{D(f) \cap D(g)}_{\textit{Punts del domini de } f \textbf{ i } \textit{de } g} \overbrace{\backslash Nuc(f)}^{\textit{Traiem els punts on } f \textit{ val } 0}$$

d) Com hem comentat, els dominis trobats d'una manera i de l'altra no coincideixen. El problema està que, en operar es fan simplificacions que no es poden fer sempre. per exemple, podem dir que

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x?$$

Doncs no sempre, perquè a l'expressió de l'esquerra x no pot ser 0, però a la de la dreta sí. De la mateixa manera, podríem afirmar que

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1?$$

Doncs tampoc, perquè a l'expressió de l'esquerra x tampoc pot ser 0 però en canvi a la dreta x ja no hi apareix.
Resumint, sempre que simplifiquem o canviem de lloc un denominador, ho podrem fer sempre que aquest no sigui 0.

Exercici 4: Exercici proposat.
Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2} \quad g(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

Repetiu l'exercici 3 amb les funcions $f+g$, f/g i g/f. És a dir, calculeu $D(f+g)$, $D(f/g)$ i $D(g/f)$ i compareu-lo amb els dominis que s'obtenen després d'operar i simplificar les expressions $f+g$, f/g i g/f.
Nota: aneu amb compte en calcular $Nuc(g)$.

Solució.
Calculem el domini de les funcions de dues maneres: primer de la manera incorrecte (operant i simplificant) i després de la manera correcta (fent servir els dominis de f i g i els seus nuclis).

- *Trobem primer explícitament la funció suma $f+g$. Per tal de sumar les dues fraccions algebraiques haurem de factoritzar els denominadors i fer el mínim comú múltiple. Trobem les arrels dels denominadors:*

$$x^2+3x+2=0 \longrightarrow x=-2 \text{ i } x=-1$$
$$x^2+x-2=0 \longrightarrow x=-2 \text{ i } x=1$$

Per tant els denominadors factoritzats seran

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2) \cdot (x + 1)$$
$$x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)$$

i el mínim comú múltiple serà $(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$.
Ara sumem les dues funcions

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= \frac{x - 1}{(x + 2) \cdot (x + 1)} + \frac{x + 2}{(x + 2) \cdot (x - 1)} \\
&= \frac{(x - 1)(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} + \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x - 1)(x + 1)} \\
&= \frac{(x - 1)(x - 1) + (x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}
\end{aligned}$$

El denominador s'anul·la en $x = -2$, $x = -1$ *i* $x = 1$ *(que són els mateixos valors on s'anul·laven els denominadors de* f *i* g*). Per tant, després d'haver operat, el domini ens sortirà*

$$D(f + g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

Fixem-nos que podríem haver simplificat $x + 2$ *a la funció* g*, però haguéssim hagut de tornar a incloure aquest factor per tal de fer el m.c.m dels denominadors.*

- *Obtenim ara l'expressió explícita per la funció* f/g*:*

$$\begin{aligned}
(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{x-1}{(x+2)(x+1)}}{\frac{\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}} \\
&= \frac{(x - 1)(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)}
\end{aligned}$$

Com el denominador s'anul·la en $x = -2$ *i* $x = -1$*, el domini que ens hagués sortit per aquesta via seria*

$$D(f/g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

que NO és correcte.

- *Per trobar el domini de la funció* g/f *calculant-la explícitament podem fer l'invers de l'expressió anterior:*

$$(g/f)(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)}$$

Com el denominador s'anul·la en $x = 1$ *(dues vegades!), el domini trobat per aquesta via seria*

$$D(g/f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

la qual cosa TAMPOC és correcte!

Trobem ara els dominis de la forma correcte: sense operar ni simplificar, a partir de dels dominis de les funcions i dels seus nuclis. Trobem-los primer. D'una banda tenim

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$$
$$D(g) = \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$$

que és on s'anul·len els denominadors. Trobem ara els nuclis igualant els numeradors a 0*:*

$$x-1=0 \longrightarrow x=1$$
$$x-2=0 \longrightarrow x=2$$

Però alerta! Resulta que $x=2$ *NO és del domini de* g*! Per tant, en* $x=2$ *la funció no val* 0 *perquè simplement* $g(2)$ *no existeix! Per tant tenim,*

$$Nuc(f) = \{1\}$$
$$Nuc(g) = \emptyset$$

Fixem-nos que de l'anterior reflexio podem deduïr que sempre tindrem

$$Nuc(f) \subset D(f)$$

és a dir, el nucli està contingut en el domini.
Trobem ara els dominis que ens denamen.

- *Per fer la funció suma necessitem avaluar les dues funcions. Per tant, un punt serà del domini de* $(f+g)$ *si és del domini de* f **i** *del domini de* g*. Per tant,*

$$D(f+g) = D(f)\cap D(g) = \mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\}$$

- *Trobem ara el domini de* f/g*. D'una banda necessitem avaluar les dues funcions, però de l'altra, haurem de treure els punts on* g *valgui* 0*. Però com* $Nuc(g)=\emptyset$*, tindrem*

$$D(f/g) = D(f)\cap D(g)\setminus Nuc(g) = \mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\}$$

  Fixem-nos que el punt on ens havia sortir que el numerador de g *s'anul·lava* $(x=-2)$ *està tret igualment del domini perquè el denominador de* g *també s'anul·lava.*

- *Finalment, veiem ara* g/f*. Si fem el mateix tindrem:*

$$D(g/f) = D(f)\cap D(g)\setminus Nuc(f) = \mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\}$$

  Resulta que el nucli de f *ja estava tret perquè* $x=1$ *no era del domini de* g

1.2 Composició i inversa

Exercici 5: Pg. 187 n^o 12[1].
Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x+4}{x+2} \quad g(x) = \frac{3x}{x+1}$$

a) Determineu l'expressió algebraica i del domini de $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1}

b) Comproveu que les funcions f^{-1} i g^{-1} són les inverses de f i g respectivament.

Solució.
Fixem-nos primer que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

a) Hem de tenir en compte que, en operar i trobar les expressions de les composicions en podem trobar que els dominis canviïn. Per tant, trobarem primer les expressions i després els dominis per separat, de la manera correcta com s'ha vist als exercicis 3 i 4.

- *$g \circ f$:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+4}{x+2}\right) = \frac{3\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}+1}$$
$$= \frac{3\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}+\frac{x+2}{x+2}} = \frac{3\frac{x+4}{\cancel{x+2}}}{\frac{2x+6}{\cancel{x+2}}} = \frac{3(x+4)}{2x+6}$$

El domini $D(g \circ f)$ serà el domini $D(f)$ traient els valors que facin que

$$f(x) = -1 \Longrightarrow \frac{x+4}{x+2} = -1$$
$$x+4 = -(x+2) \Longrightarrow \boxed{x = -3}$$

Per tant

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$$

Fixem-nos que $x = -3$ és el valor que anul·la del denominador que havíem trobat, però en canvi el problema en $x = -2$ desapareix de l'expressió en simplificar.

- *$f \circ g$:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x}{x+1}\right)$$
$$= \frac{\frac{3x}{x+1}+4}{\frac{3x}{x+1}+2} = \frac{\frac{3x}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x+1}}{\frac{3x}{x+1}+\frac{2(x+1)}{x+1}}$$
$$= \frac{\frac{7x+4}{\cancel{x+1}}}{\frac{5x+2}{\cancel{x+1}}} = \frac{7x+4}{5x+2}$$

Per veure el domini resolem

$$g(x) = -2 \Longrightarrow \frac{3x}{x+1} = -2$$

$$3x = -2(x+1) \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{5}}$$

Per tant

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{2}{5}\right\}$$

Fixem-nos que $-\frac{2}{5}$ *coincideix amb el valor on s'anul·la en denominador de l'expressió que hem trobat, però que en canvi* $x = -1$ *havia desaparegut en simplificar.*

- $f \circ f$:

$$(f \circ f)(x) = f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(\frac{x+4}{x+2}\right)$$

$$= \frac{\frac{x+4}{x+2} + 4}{\frac{x+4}{x+2} + 2} = \frac{\frac{x+4}{x+2} + \frac{4(x+2)}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} + \frac{2(x+2)}{x+2}} = \frac{\frac{5x+12}{\cancel{x+2}}}{\frac{3x+8}{\cancel{x+2}}}$$

$$= \frac{5x+12}{3x+8}$$

Per trobar el domini haurem de resoldre

$$f(x) = -2 \Longrightarrow \frac{x+4}{x+2} = -2$$

$$x + 4 = -2(x+2) \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{8}{3}}$$

Per tant

$$D(f \circ f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{8}{3}\right\}$$

- $g \circ g$:

$$(g \circ g)(x) = g\left(g\left(x\right)\right) = g\left(\frac{3x}{x+1}\right) = \frac{3\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{9x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} + \frac{x+1}{x+1}} = \frac{\frac{9x}{\cancel{x+1}}}{\frac{4x+1}{\cancel{x+1}}}$$

$$= \frac{9x}{4x+1}$$

Per trobar el domini mirem per quin valor g *val* -1*:*

$$g(x) = -1 \Longrightarrow \frac{3x}{x+1} = -1$$

$$3x = -(x+1) \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}}$$

i per tant

$$D(g \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}$$

Fixem-nos que, altre cop, $x = -\frac{1}{4}$ coincideix amb el valor que fa que el denominador de l'expressió que hem trobat s'anul·li, però en canvi $x = -1$ havia desaparegut en simplificar.

- *Trobem ara l'expressió i el domini de $f^{-1}(y)$. Per fer-ho hem d'aïllar x de l'expressió*

$$y = \frac{x+4}{x+2} \Longrightarrow y(x+2) - x - 4 = 0$$
$$x(y-1) + 2y - 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{4-2y}{y-1}$$

i per tant

$$f^{-1}(y) = \frac{4-2y}{y-1}$$

Mirant l'expressió que hem trobat, el domini de f^{-1} és

$$D\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Fixem-nos que això vol dir que el valor $y = 1$ no té antiimatge. Ho podem comprovar preguntant-nos per quin valor de x la funció f val 1, i no n'hauríem de trobar cap:

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \frac{x+4}{x+2} = 1 \Longrightarrow \cancel{x} + 4 = \cancel{x} + 2$$
$$\Longleftrightarrow 4 = 2??$$

i per tant no trobem solució.

- *Fem el mateix amb g^{-1}, aïllem x de l'expressió*

$$y = \frac{3x}{x+1} \Longrightarrow y(x+1) - 3x = 0$$
$$x\,(y-3) + y = 0 \Longrightarrow x = -\frac{y}{y-3}$$

d'on

$$D\left(g^{-1}\right) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Altre cop, si ens preguntem quina és l'antiiatge de $y = 3$ ens trobarem en què no hi ha cap valor.

b) Comprovem ara que les expressions que hem trobat de f^{-1} i g^{-1} són realment les inverses:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(f(x)\right) &= f^{-1}\left(\frac{x+4}{x+2}\right) = \frac{4-2\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}-1} \\
&= \frac{\frac{4(x+2)}{x+2}-2\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}} = \frac{\frac{2x}{\cancel{x+2}}}{\frac{2}{\cancel{x+2}}} \\
&= \frac{2x}{2} = x \\
g^{-1}\left(g(x)\right) &= g^{-1}\left(\frac{3x}{x+1}\right) = -\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1}-3} \\
&= -\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1}-\frac{3(x+1)}{x+1}} = -\frac{\frac{3x}{\cancel{x+1}}}{\frac{-3}{\cancel{x+1}}} = -\frac{3x}{-3} = x
\end{aligned}
$$

Com en composar-les obtenim la identitat, les funcions són inverses una de l'altra.

Exercici 6: Exercici proposat.
Considereu les funcions

$$
f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3-8} \qquad g(x) = \frac{x^2+7x+6}{x}
$$

Trobeu $D(f\circ g)$ i $D(g\circ f)$.

Solució.
Estudiem primer el domini de cadascuna d'elles per separat. Com són funcions racionals, només caldrà mirar on s'anul·len els denominadors:

$$
\begin{aligned}
x^3-8=0 &\longrightarrow x^3=8 \longrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2 \\
x&=0
\end{aligned}
$$

Per tant tenim

$$
D(f) = \mathbb{R}\setminus\{2\} \qquad D(g) = \mathbb{R}\setminus\{0\}
$$

Això el que ens està dient és que a la funció f no li podem entrar el valor 2, ni a la g el valor 0.
Ens preguntem ara com calculem la imatge de la funció $(f\circ g)(x)$. Primer hem de fer g i després, el que ens doni, ho posem a f. Per tant, hem de vigilar dues coses:

1. *Hem de poder avaluar la funció g. Per tant, $D(f\circ g)\subset D(g)$*
2. *El resultat d'avaluar g no pot ser un valor fora del domini de f*

Com $f(x)$ té problemes en $x=2$, mirem per quin valor de x la funció g ens dóna 2:

$$
g(x)=2 \longrightarrow \frac{x^2+7x+6}{x}=2 \longrightarrow x^2+5x+6=0
$$

d'on $x = -3$ i $x = -2$. Per tant, com $g(-3) = g(-2) = 2$, resulta que aquests dos valors no seran del domini de $f \circ g$. Fixem-nos que si intentem avaluar $f \circ g$ obtindrem

$$f\big(g(-3)\big) = f(2) \nexists$$
$$f\big(g(-2)\big) = f(2) \nexists$$

Per tant el domini serà

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0, -2, -3\}$$

Si fem el mateix amb $g \circ f$, haurem de veure per quins valors de x la funció $f(x)$ val 0, que és el valor que no podem entrar a la funció g:

$$f(x) = 0 \longrightarrow x = -2 \text{ i } x = 1$$

Per tant, si a més tenim en compte que el valor $x = 2$ no el podem entrar a la funció f, tindrem

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$$

1.3 Límits laterals

Exercici 7: Exercici proposat.
De les funcions següents, calculeu-ne el domini i feu els límits laterals als punts on tinguin problemes

$$f(x) = \frac{x+2}{x-4} \qquad g(x) = \frac{x^2}{x+3}$$
$$h(x) = \frac{3x}{x^2+2x-8} \qquad k(x) = \frac{2x-5}{x^2-2x+1}$$

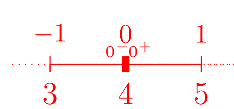
Solució.
Pel que fa als dominis tenim

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\} \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$
$$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\} \qquad D(k) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Per mirar els límits laterals als llocs on els denominadors s'anul·len, mirem el signe d'aquests a cada banda

- *Pel denominador de $f(x)$:*

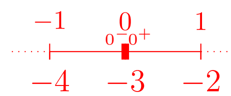
$x - 4 \longrightarrow$



Per tant

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

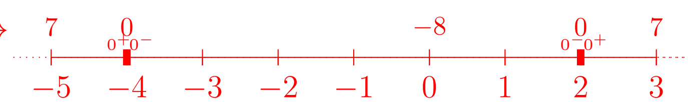
- *Pel denominador de $g(x)$:*

$x + 3 \longrightarrow$ 

Per tant tenim

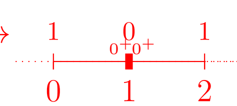
$$\lim_{x \to -3^-} g(x) = \frac{9}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -3^+} g(x) = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

- *Pel denominador de $h(x) = \frac{3x}{x^2+2x-8}$*

$x^2 + 2x - 8 \longrightarrow$ 

$$\lim_{x \to -4^-} h(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -4^+} h(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

- *Pel denominador de $k(x) = \frac{2x-5}{x^2-2x+1}$*

$x^2 - 2x + 1 \longrightarrow$ 

Per tant ens queda

$$\lim_{x\to 1^-} k(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} k(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Exercici 8: Exercici proposat.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-2} & si\ x < -2 \\ \\ \dfrac{1}{x^2-1} & si\ x > -2 \end{cases}$$

a) Trobeu-ne el domini

b) Calculeu els límits laterals en $x=-2$, $x=-1$ i $x=1$

Solució.

a) Aquesta funció té tres possible problemes:

- *Que s'anul·li el numerador de la primera branca.*
  El denominador de la primera branca s'anul·la en $x=2$, però aquest valor correspon a la segona branca i tindrem $f(2) = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$ i per tant la funció no té cap problema en $x=2$.

- *Que s'anul·li el numerador de la segona branca.*
  El denominador de la segona branca s'anul·la en $x=-1$ i en $x=1$. Tots dos valors es troben a la segona branca, per tant els haurem de treure.
- *Que tinguem problemes allà on s'enganxen les dues branques.*
  Quan $x=-2$ no podem entrar per cap de les dues branques, per tant també l'haurem de treure aquest valor.

Així tindrem

$$f(x) = \mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\}$$

b) Calculem ara els límits laterals en aquest valors.

- *En $x=-2$ haurem de tenir en compte que per l'esquerra entrarem per la primera branca, i per la dreta per la segona. Per tant*

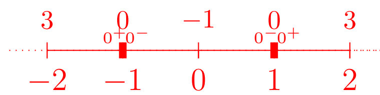
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{2x}{x-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{3}$$

Tots dos límits laterals existeixen, però com no coincideixen podem dir que

$$\lim_{x\to -2} f(x) \nexists$$

- *Per veure els límits laterals en $x = \pm 1$ mirem el signe del denominador a cada banda:*

$x^2 - 1 \longrightarrow$



Per tant tindrem

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Exercici 9.
Calculeu el domini de la funció

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

i feu-ne un estudi local (calculant els límits laterals) als punts que no pertanyin al domini.

Solució.
Resolent l'equació

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

trobem que el denominador s'anul·la en $x = 1$ i $x = 3$. Per tant,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$$

Mirem ara com es comporta la funció que x s'apropa a aquests valors. Si fem el límit

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Ens trobem una indeterminació. És a dir, no sabem quin dels dos es fa petit més ràpid, si el numerador o el denominador. Per solucionar aquest tipus d'indeterminacions factoritzem tant numerador com denominador trobant-ne les arrels:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2 \text{ i } x = 1$$

per tant la funció la podem escriure com

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$$

Fixem-nos que tenen un factor en comú que podem simplificar sempre i quant $x \neq 1$. Com estem fent el límit i no avaluant la funció en $x = 1$, podem simplificar, i obtenim

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{(x-3)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Fixem-nos que no cal fer els límits laterals perquè tots dos donarien el mateix en existir el límit quan $x \to 1$. Per tant podem dir que quan x s'apropa a 1 la funció s'apropa a $-\frac{3}{2}$, però que en canvi quan x val exactament 1 la funció no existeix.
Veiem ara el comportament a prop de $x = 3$. En aquest cas només s'anul·la el denominador, per tant caldrà fer els límits laterals per estudiar el signe i veure si se'n va + o − infinit. Com en apropar-nos a $x = 3$ estem lluny de $x = 1$ podem fer servir la versió simplificada de la funció cosa que ens facilitarà els càlculs:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

perquè el denominador $x-3$ passa de ser negatiu a positiu en $x = 3$. En aquest cas, la funció no està fitada i el límit no existeix, ja que per totes dues bandes la funció se'n va a infinit.

Exercici 10: Domini i comportament local.
Estudieu el comportament de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

prop dels punts que no són del domini.

Solució.
Trobem primer els punts que no seran del domini resolent

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x\left(x^2 - 4x - 4\right) = 0$$

En poder treure factor comú x ja sabem que $x = 0$ és una solució. Les altres les trobarem de resoldre l'equació

$$x^2 - 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Ens trobem que $x = 2$ és una arrel doble del polinomi!
El domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

i per tant haurem d'estudiar els límits

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

Fixem-nos que $x = 0$ és arrel del denominador, però no del numerador, però en canvi $x = 2$ ho és dels dos, ja que si substituim $x = 2$ el numerador també s'anul·la:

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

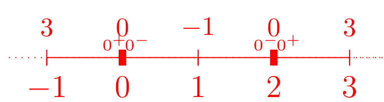
Això d'una banda ens diu que quan fem el límit $x \to 2$ tindrem una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, però de l'altra ens diu que la funció la podem simplificar, perquè numerador i denominador tenen una arrel en comú. Per tant, factoritzem el numerador per tal de simplificar i facilitar-nos els càlculs.
Si trobem les arrels del numerador tenim

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2 \text{ } i \text{ } x = 3$$

Per tant, quan $x \neq 2$, la funció la podrem escriure com

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{x(x-2)^{\cancel{2}}} = \frac{x-3}{x(x-2)} \text{ si } x \neq 2$$

Aquesta darrera expressió és la que farem servir per calcular els límits, cosa que ens simplificarà els càlculs.
Com hem simplificat tot el que es podem simplificar, ara el numerador i denominador no s'anul·laran alhora. Per tant, allà on s'anul·li el denominador tindrem límits del tipus $\pm\infty$.
Mirem els canvis de signe del denominador:

$x(x-2) \longrightarrow$ 

Un cop tenim clars els canvis de signe del denominador, podem fer els límits laterals:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Per tant la funció no està fitada ni a prop de $x = 0$ ni de $x = 2$ (té dues asimptòtes verticals).

Exercici 11: Variant de Pg. 219 n^o 6[1].

Donada la funció

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$$

a) calculeu-ne els límits quan x tendeix a -3^-, -3^+, -2^-, -2^+, 1^- i 1^+.

b) fent servir només els resultats anteriors (sense fer cap alre càlcul), discutiu si els límits

$$\lim_{x \to -3} f(x) \qquad \lim_{x \to -2} f(x) \qquad \lim_{x \to 1} f(x)$$

existeixen o no, i digueu quants valen en cas d'existir.

c) Representeu la funció f amb Geogebra o Wolframalpha (o el que vulgueu) i comenteu els resultats.

Solució.

a) Intentem calcular primer les imatges dels valors que ens proposen per veure si la funció hi té algun problema o no:

- *En $x = -3$ s'anul·la del denominador només: $\Longrightarrow$ ens donrà ∞ i caldrà fer límits laterals per veure el signe*
- *En $x = -2$ s'anul·len tots dos: $\Longrightarrow$ caldrà factoritzar i simplificar*
- *En $x = 1$ s'anul·la només el numerador: $\Longrightarrow$ el límit serà 0, ja sigui per l'esquerra o per la dreta*

Com haurem de factoritzar per resoldre la indeterminació quan $x \to -2$, factoritzem d'entrada per simplificar els càlculs. Trobem les arrels del numerador i denominador:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 = 0 & \\ & \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} \\ & \Longrightarrow x = -2 \text{ i } x = 1 \\ x^5 + 5x + 6 = 0 & \\ & x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} \\ & \Longrightarrow x = -3 \text{ i } x = -2 \end{aligned}$$

Per tant tindrem que, si $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$$

Fem servir aquesta expressió per calcular els límits.

- *Fixem-nos que el denominador passa de ser negatiu a positiu quan $x = -3$:*

$$x + 3 \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & - & 0^-\,0^+ & + & \\ \hline -4 & & -3 & & -2 \end{array}$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

- *En $x = -2$, com en simplificar la funció els factors $(x+2)$ marxen, els límits laterals coincidiran perquè la funció no hi presenta cap problema ara:*

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-3}{1} = -3$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-3}{1} = -3$$

- *Finalment, com el numerador s'anul·la en $x = 1$ però el denominador no, obtenim*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$

b)

- *Com els límits laterals en $x = 3$ no existeixn (el límit dóna infinit), el límit en $x = 3$ tampoc existeix. Fixeu-vos que, a més, no podem dir ni tan sols que el límit sigui ni $+\infty$ ni $-\infty$.*
- *Com els límits laterals en $x = -2$ existeixen i coincideixen podem afirmar que el límit quan $x \to -2$ existeix i val*

$$\lim_{x \to -2} f(x) = -3$$

- *Com els límits laterals en $x = 1$ existeixen i coincideixen, podem afirmar que el límit quan $x \to 1$ existeix i val*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

c) En fer la gràfica ens trobem que, aparentment, la funció no presenta cap problema en $x = 1$ ni $x = -2$, tot i que aquests dos valors no són del domini. En canvi, en $x = -3$ ens trobem que la funció fa un salt infinit*, és a dir, té una asímptota vertical en $x = -3$*

Exercici 12: Pg. 219 n^o 7[1].
Donada la funció

$$f(x) = \sqrt{x-4}$$

trobeu-ne el domini i calculeu els límits quan x tendeix a 4^-, 4^+ i 4.
Exercici 13: Pg. 219 n^{o}8[1].
Trobeu el domini de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{2x^2+2x} & si\ x \leq 1 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{2x-2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

i estudieu els límits quan x tendeix a 0, 1, i 3 (trobant, si cal, els límits laterals).

Solució.
Estudiem primer el domini tenint en compte els possibles problemes:

- *Cal assegurar-nos que la funció estigui ben definida als punts on s'enganxen les branques*
- *Caldrà vigilar amb els punts on s'anul·lin els denominadors i treure aquests valors en cas que es trobin a la branca corresponent*

En $x = 1$ entrem per la primera branca. Per tant, en principi, la funció no té cap problema. Mirem on s'anul·len els denominadors:

$$\begin{aligned} &2x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \ i \ x = -1 \\ &2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Els primers dos valors els haurem de treure, perquè estan inclosos a la primera branca. En canvi, $x = 1$ no caldrà treure'l perquè, per aquest valor, s'entra per la primera branca. No obstant, caldrà fer el límit quan $x \to 1^+$, per saber quin és el comportament de la funció a prop de $x = 1$ (de fet, ens ho demana l'enunciat).
Resumint, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0, -1\}$$

Fem els límits:

- *En apropar-nos a $x = 0$, tant per l'esquerra com per la dreta, entrem per la primer branca. Per aquest valor obtenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$ i per tant caldrà factoritzar i simplificar. Traient factor comú obtenim:*

$$\frac{x^2-x}{2x^2+2x} = \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(2x+2)} = \frac{x-1}{2x+2} \ si\ x \neq 0$$

Com en la versió simplificada de la primera branca no presenta cap problema en $x = 0$ no caldrà fer límits laterals:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{2x+2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

- *Fem ara el límit quan $x \to 1$. En aquest cas, com es canvi de branca percisament en $x = 1$, caldrà fer límits laterals, sí o sí:*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{2x+2} = 0$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{2x-2} = \frac{0}{0}$$

  Com el límit per la dreta ens surt una indeterminació, haurem de factoritzar també la segona branca i simplificar:

$$\frac{x^2-1}{2x-2} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{2} \quad si\ x \neq 1$$

  Per tant tindrem

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

- *Finalment, estudiem el límit quan $x \to 3$. Per aquest valor entrem per la segona branca, i la funció no presenta cap problema:*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

  Fixem-nos que no cal fer límits laterals.

Exercici 14.
Calculeu els límits $x \to -3$, $x \to -2$ i $x \to 2$ de la funció

$$f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^3+x^2-6x}$$

Solució.
Com

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{0}{0}$$

caldrà factoritzar. Trobant les arrels del numerador i denominador obtenim

$$f(x) = \frac{(x+2)\cancel{(x+3)}}{x(x-2)\cancel{(x+3)}}.$$

Per tant obtenim

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{-1}{15},$$

i no depen de si ens apropem per la dreta o per l'esquera al -3.
D'altra banda tenim

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{0}{8} = 0,$$

i tampoc depen dels límits laterals al -2.
Finalment tenim

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{4}{0}.$$

No és una indeterminació, però haurem de mirar els límits laterals per saber si el límit és ∞ o $-\infty$ o cap de les dues. En qualsevol cas, d'entrada ja sabem que el límit no existirà. Si mirem els signes de $x(x-2)$ a l'esquerra i dreta de 2 obtenim que són negatiu i positiu, respectivament. Per tant tenim

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

Per tant, el límit quan $x \to 2$ no existeix perquè els laterals no coincideixen i, a més, aquests tampoc existeixen (perquè són $\pm\infty$).

Exercici 15: Pg. 151 n^o 4[2].
Calculeu els límits

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{3x^2-6x+3} =$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{5x-15}{9-x^2} =$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$

Solució.
El primer que fem és avaluar la funció allà on ens demanen fer el límit, per veure si es tracta d'una indeterminació o no.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{0}{0}$ **Indeterminació**. *Factoritzem. Primer traiem factor comú, si podem, i després trobem les arrels. Així el numerador queda*

$$x^2+x = x(x+1)$$

i el denominador:

$$x^2-4=0 \Longrightarrow x=\pm 2 \Longrightarrow x^2-4=(x+2)(x-2)$$

(cosa que també podríem haver vist amb una identitat notable).
Per tant ens queda:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

Simplificant tenim:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x}{(x-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{3x^2-6x+3} = \dfrac{0}{0}$ **indeterminació**. *El numerador ja el tenim factoritzat, traiem factor comú 3 al denominador i el factoritzem:*

$3x^2-6x+3 = 3\left(x^2-2x+1\right),\ x^2-2x+1=0 \Longrightarrow x=1$ *(arrel doble)* $\Longrightarrow 3\left(x^2-2x+1\right) = 3(x-1)^2$

Per tant tenim

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{3x^2-6x+3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\cancel{3}}}{3\cancel{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3} = 0$$

c) $\lim_{x\to 3}\dfrac{5x-15}{9-x^2} = \dfrac{0}{0}$ *Indeterminació.*
Traient factor comú 5 al numerador i factoritzem el denominador ens queda:

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{9-x^2} = \lim_{x\to 3}\frac{5\,(x-3)}{-(x^2-9)} = \lim_{x\to 3}\frac{5\cancel{(x-3)}}{-(x+3)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3}\frac{5}{x+3} = \frac{5}{6}$$

d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+2}{x^2+2x+1} = \dfrac{0}{0}$ **indeterminació**.
Traient factor comú 2 al numerador i factoritzant el denominador (-1 és una arrel doble) ens queda:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Exercici 16: Pg. 151 n^o 6[2].
Calcular el límit de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & si\ x<0 \\ \frac{3x-9}{x^2-9} & si\ 0\le x\le 3 \\ \frac{3x}{x+3} & si\ x\ge 3 \end{cases}$$

quan x tendeix a $-\infty$, $+\infty$, ∞, -1^-, -1^+, -1, 0^-, 0^+, 0, 3^-, 3^+ i 3.

Solució.

1.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x+1} = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{x+3} = \frac{3}{1} = 3$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \textit{no existeix}$$

2.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1} f(x) = \textit{ no existeix perquè els laterals són diferents}$$

3.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x-9}{x^2-9} = \frac{-9}{-9} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \textit{ perquè tots dos límits laterals conincideixen}$$

4.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3x-9}{x^2-9} = \frac{0}{0} \textit{ Indeterminacio}$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x-9}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x}{x+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) = \textit{ no existeix perquè els laterals són diferents}$$

Exercici 17: Pg. 151 n^o 3[2].
Donada la funció

$$f(x) = \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+x-2}$$

calculeu

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$ *i* $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$, $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$ *i* $\lim_{x\to 3} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$

Solució.
Com ens demanen diferents límits on s'anul·len coses, i simplifiquem la funció directament. Traiem factor comú al numerador

$$f(x) = \frac{x\left(x^2-4x+3\right)}{x^2+x-2}$$

Factoritzem:

$$x^2-4x+3=0 \Longrightarrow x=3 \text{ } i \text{ } x=1 \Longrightarrow x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$$
$$x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1 \text{ } (\textit{arrel doble}) \text{ } \Longrightarrow x^2+x-2=(x-1)^2$$

Per tant tenim

$$f(x)\frac{x(x-3)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{x(x-3)}{x-1}$$

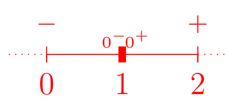
Fem ara els límits:

a)

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x(x-3)}{x-1}=\frac{(-2)(-5)}{-3}=-\frac{10}{3}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{x-1}=\frac{-2}{0}$$

Caldrà fer els límits laterals i estudiar el signe del denominador:

$x-1 \longrightarrow$



Per tant tenim:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-3)}{x-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-3)}{x-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

b) La funció $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{1}{3}\right)(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-4x^2+3x}$$

Per fer els límits farem servir la versió simplificada:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x(x-3)}=\frac{-1}{0}$$

Caldrà mirar els límits laterals i estudiar el canvi de signe del denominador:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x(x-3)}=\frac{-1}{0^-(-3)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x(x-3)}=\frac{-1}{0^+(-3)}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

Per tant, el límit

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$$

no existeix, ja que depèn de per quina banda es faci.
Els altres límits queden:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=0$$
$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{2}{0}$$

Caldrà mirar també els límits laterals:

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{2}{3\cdot 0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{2}{3\cdot 0^+}=+\infty$$

Per tant, el límit

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$$

tampoc existeix.

Exercici 18: Pg. 151 n^o 5[2].
Raoneu per què no existeix el límit quan $x\to 0$ de la funció

$$f(x)=\frac{x+|x|}{x}$$

Solució.
La funció f és de fet una funció definida a trossos:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+x}{x}=\frac{2x}{x}=2 & si\ x\geq 0\\ \frac{x-x}{x}=\frac{0}{x}=0 & si\ x<0\end{cases}$$

Com hi ha un canvi de branca en $x=0$ caldrà fer els laterals:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=2$$

Com els límits laterals són diferents, el límit quan $x\to 0$ no existeix.

1.4 Continuïtat

Exercici 19.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} & \text{si } x < -1 \\ \\ \dfrac{x-2}{x^2+x-6} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) *Trobeu el domini de f*

b) *Feu un llistat dels punts on la funció pugui presentar alguna discontinuïtat*

c) *Estudieu la continuïtat de la funció en aquests punts tot indicant els tipus de discontinuïtats*

Solució.

a) *Els possibles problemes són: denominadors que s'anul·len i que la funció estigui ben definida al canvi de branca.*

- *De la primera branca tenim:*

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1,$$

però cap dels dos valors està inclòs allà on la branca està definida. Per tant, per ara, aquests valors no s'han de treure.

- *De la segona branca tenim*

$$x^2 + x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -3 \text{ i } x = 2$$

El primer valor no està inclòs allà on està definida la branca, però el segon sí. Per tant aquest l'haurem de treure.

- *Pel que fa cal canvi de branca en $x = 1$, s'entra per la segona branca, i aquesta no hi té cap problema, per tant aquest valor no caldrà treure'l.*

Resumint, el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{2\}$$

b) *Els possibles problemes que pot presentar la funció són, d'entrada, els punts que no són del domini, on la funció serà discontínua segur. Però a més a més haurem de veure què fa la funció en $x = -1$ ja que es canvia de branca i la funció podria fer un salt.*

c)

- *Fent el límit en $x = 2$ obtenim*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{0}{0},$$

i obtenim una indeterminació. Com tenim les arrels del denominador, factoritzem i simplifiquem:

$$\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

Si fem ara el límit tindrem

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

No caldrà fer límits laterals ja el límit no depen de si ens apropem a 2 per una banda o per l'altra. Per tant, com $x = 2$ no és del domini però els límits laterals existeixen i coincideixen tindrem una discontinuïtat evitable en $x = 2$.

- *En $x = -1$ tenim un canvi de branca, per tant caldrà fer límits laterals perquè la funció es comporta de maneres diferents segons si ens hi apropem per una banda o per l'altra:*

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Factoritzant obtenim

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}(x-1)} \\ &= \lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0\end{aligned}$$

Per fer el límit per la dreta podem fer servir la versió simplificada per facilitar els càlculs:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Com els límits laterals existeixen però són diferents, tindrem una discontinuïtat de salt en $x = -1$.

Exercici 20: Pg. 222 n^o 11[1].

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \frac{-2x^2+6x-4}{1-x^4}$$

Solució.
Clarament, el domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1, -1\},$$

ja que $1 - x^4 = 0 \iff x = \pm 1$. *Per tant la funció no serà continua ni en* $x = -1$ *ni en* $x = 1$. *Vegem quin tipus de discontinuïtats seran. Haurem d'estudiar els límits*

$$\lim_{x\to -1} f(x)$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Pel primer tenim

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-12}{0},$$

caldrà veure els límits laterals, perquè el denominador podria ser 0^+ *o* 0^-. *Com el denominador s'anul·la només en* $x = 1$ *i* $x = -1$*, donant valor trobem:*

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &< 0 \text{ si } x < -1 \\ 1 - x^4 &> 0 \text{ si } -1 < x < 1 \\ 1 - x^4 &< 0 \text{ si } x > 1 \end{aligned}$$

Per tant els límits laterals quedaran

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty,$$

i la discontinuïtat serà del tipus asimptòtic.
Pel que fa a $x = 1$*, tenim*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0},$$

i caldrà factoritzar per veure què dóna aquest límit. Si trobem les arrels del denominador tindrem $-2x^2 + 6x - 4 = -2(x^2 - 3x + 2) = -2(x-1)(x-2)$. *I si factoritzem el denominador tindrem*

$$1 - x^4 = -(x^4 - 1) = -(x^2 + 1)(x^2 - 1) = -(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Per tant el límit quedarà

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-2\cancel{(x-1)}(x-2)}{-(x^2+1)\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-2)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Per tant, com el límit existeix (els laterals són iguals!) però $f(1)$ *no existeix, la discontinuïtat serà del tipus evitable.*
Nota: Fixem-nos que, per tal de factoritzar correctament, és convenient escriure primer el polinomi de manera que el coeficient de grau més alt sigui 1, ja sigui canviant el signe al polinomi, traient factor comú o les dues coses si cal.

Exercici 21: Pg. 222 n^{o}12[1].
Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ \textit{si} \ x \leq -1 \\ \dfrac{x+3}{2x} \ \textit{si} \ -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{x}{x-2} \ \textit{si} \ x > 1 \end{cases}$$

Solució.
El domini d'aquesta funció és

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}.$$

Ja sabem per tant que la funció no serà contínua en $x = 0$ ni en $x = 2$. D'una banda caldrà estudiar els límits en aquests punts per saber de quin tipus de discontinuïtat es tracta. De l'altra, caldrà veure també si la funció "enganxa bé" allà la funció canvia de branca. Comencem per $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \frac{3}{0^{\pm}} = \pm\infty,$$

i la discontinuïtat serà del tipus asimptòtica.
Per l'altre límit tenim

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \frac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty,$$

i la discontinuïtat també és asimptòtica.
Finalment mirem els punts on la funció canvia de branca:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -2 + 1 = -1 \ \textit{(entrem per la primera branca)}$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \ \textit{(entrem per la segona branca).}$$

Com els límits laterals coincideixen (tots dos valen -1) i coincideixen amb $f(-1) = -1$, la funció és contínua en $x = -1$.
Vegem ara què passa a $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1+3}{2} = 2 \ \textit{(entrem per la segona branca)}$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{1-2} = -1 \ \textit{(entrem per la tercera branca).}$$

Ara els límits laterals no coincideixen però tots dos existeixen. Per tant $f(x)$ tindrà una discontinuïtat del tipus salt en $x = 1$.

Exercici 22: Pàgina 227 n^o 14[1].
Justificar que la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \textit{si} \ x < 1 \\ \dfrac{x+3}{2} & \textit{si} \ x > 1 \end{cases}$$

té una discontinuïtat evitable en $x = 1$. Com es pot evitar la discontinuïtat?

Solució.
Si calculem els límits laterals tenim

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Els límits laterals existeixen i coincideixen. No obstant, $f(1)$ no existeix perquè no hi està definida ($x = 1$ no està inclòs al domini de cap de les branques). Per tant, la discontinuïtat és evitable (la funció té un "forat" en $x = 1$). Per tal d'evitar-la, només cal incloure $x = 1$ en algun dels dominis. Com tots dos límits laterals coincideixen, aquest punt es pot incloure tant a la primera branca com a la segona.

Exercici 23: Pàgina 228 n^o 19[1].
Trobar el domini i estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x+2} & si\ x < -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & si\ -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{x+1}{2-x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Estudieu també les asímptotes horitzontals i oblíqües.

Solució.
La primera branca té un problema en $x = -2$ (s'anul·la el denominador), i està inclòs allà on la branca està definida. La segona branca té un denominador que s'anul·la en $x = 1$, però aquest no està inclòs allà on la branca està definida, per tant el podem ignorar (per ara!). A la tecera branca el denominador s'anul·la a $x = 2$, que altre cop també està inclòs allà on la branca està definida.Per tant, el domini de la funció serà:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Pel que fa a la continuïtat, no només haurem d'estudiar els límits laterals en aquests punts sinó allà on les branques s'enganxen: $x = -1$ i $x = 1$. Comencem pels punts que no són del domini:

$$\lim_{x\to -2^\pm} f(x) = \lim_{x\to -2^\pm} \frac{x^2+3x+1}{x+2} = \frac{-1}{0^\pm} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{0^\mp} = \mp\infty.$$

Per tant, la funció és discontínua en $x = -2$ i $x = 2$, no hi té dues asímptotes verticals. Mirem ara els punts on les branques s'enganxen.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+3x+1}{x+2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

Com els límits laterals existeixen però són diferents, la funció té una discontinuïtat de tipus salt en $x=-1$. Mirem l'altre punt:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0},$$

que és una indeterminació. Factoritzant trobem

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x+1 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 2.$$

Per la dreta trobem:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{2-x} = 2.$$

Com els límits laterals existeixen i són iguals a $f(2)=2$, la funció també és contínua en $x=2$.

Pel que fa a les asímptotes horitzontal i oblíqües, veiem que:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{2-x} = -1,$$

i per tant la funció té una asímptota horitzontal per la dreta: $y=-1$. Per tant d'oblíqües per la dreta no en té. Veiem per l'esquerra:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x+1}{x+2} = -\infty.$$

Podria ser que tingúes una asímptota oblíqua $y=mx+n$ per l'esquerra. De fet és molt probable, perquè el numerador té un grau més que el donominador. Calculem m:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+3x+1}{x^2+2x} = 1.$$

Trobem ara n:

$$n = \lim_{x\to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x+1}{x+2} - x = \infty - \infty.$$

Com és una indeterminació del tipus $\infty - \infty$, només cal que fem la resta:

$$\frac{x^2+3x+1}{x+2} - x = \frac{x^2+3x+1-x(x+2)}{x+2} = \frac{x+1}{x+2} = \!\!\longrightarrow \underset{\rightarrow}{-}\infty\; 1 = n.$$

Per tant, la funció té una asímptota oblíqua per l'esquerra: $y=x+1$.

Exercici 24: Bolzano.
D'una funció sabem que

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 5$$

a) Raoneu què hauria de complir la funció f per tal de garantir que l'equació

$$f(x) = 3$$

té alguna solució entre $x = 1$ i $x = 2$.

b) Doneu un exemple de funció que compleixi les condicions de l'enunciat però que en canvi no valgui mai 3.

1.5 Asímptotes

Exercici 25.
Considereu les funcions següents

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} \qquad g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

a) Estudieu (fent els límits laterals, si cal) el comportament local de la funció als punts que no són del domini de les funcions

b) Feu els límits quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$.

c) Digueu quines són les asímptotes de les funcions, tant verticals com horitzontals (si en tenen)

Solució.

a) Els dominis són

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \qquad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

- *El denominador de f passa de ser negatiu a positiu en $x = -3$, per tant*

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

La funció f presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$.

- *Com el numerador de g també s'anul·la en $x = 2$, factoritzem i simplifiquem abans de fer els límits*
$$g(x) = \frac{x\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{x(x-1)}{x-3}$$
Fixem-nos que la versió simplificada no presenta cap problema en $x = 2$, i el denominador passar de ser negatiu a positiu en $x = 3$. Per tant tindrem:
$$\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{2(2-1)}{2-3} = -2$$
$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$
La funció g tindrà una discontinuïtat evitable en $x = 2$, perquè
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} = -2$$
però en canvi $g(2)$ no existeix perquè $2 \notin D(g)$.
La funció g presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = 3$.

b) *En fer el límits a l'infinit hem de mirar els graus. De la funció f són iguals, per tant els límits seran el quocient de coeficients. En canvi a la funció g el grau del numerador és més alt que el denominador, i per tant sortirà ∞. Però alerta en fer $x \to \infty$ perquè el numerador serà negatiu (grau senar) i el denominador positiu (grau parell).*
Resumint, tindrem:
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$$

c) *Pel que fa a les asímptotes:*

- *Verticals. Són de la forma $x = a$ i es produeixen ens discontinuïtats del tipus asimptòtic, que un denominador s'anul·la i el numerador no. Això ens passa en*
$$f : \longrightarrow x = -3$$
$$g : \longrightarrow x = 3$$

- *Pel que fa a les horitzontals, són de la forma $y = a$. Venen donades pel comportament a l'infinit i, per tant, poden ser per l'esquerra o per la dreta. La funció g no* *en té, perquè en fer $x \to \pm\infty$ la funció no està fitada. Però en canvi la funció f sí que en té:*

$$f :\longrightarrow y = 1 \text{ (per l'esquerra i per la dreta)}$$
$$g :\longrightarrow \text{ no en té}$$

1.6 Continuïtat amb paràmetres

Exercici 26.
Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + kx + 3}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x < 1 \\[2ex] \dfrac{2x + 3}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

on $k \in \mathbb{R}$ és paràmetre. Trobeu

a) El domini de f

b) Els valors de k pels quals la funció té una discontinuïtat de salt

c) Els valors de k pels quals la funció té una discontinuïtat de asimptòtica

d) Existeix algun valor pel qual la funció sigui contínua?

e) Trobeu, si n'hi ha, totes les asímptotes, tant verticals com horitzontals.

Solució.

a)

- *El denominador de la primera branca s'anul·la en $x = 1$ i $x = 2$, però tots dos valors entre per la segona branca.*
- *El denominador de la segona branca s'anul·la en $x = 0$, però per aquest valor s'entra per la primera branca.*
- *El canvi de branca, $x = 1$, està ben definit, ja que s'entra per la segona branca i allà no hi té cap problema.*

Per tant, el domini queda

$$D(f) = \mathbb{R}$$

b) Com el domini de la funció són tots el reals, l'única opció per tal de tenir una discontinuïtat és que aquesta es produeixi allà on es canvia de branca. Fem els límits laterals:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+kx+3}{x^2-3x+2} = \frac{1+k+3}{0^+} = \frac{k+4}{0^+}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x} = 5$$

Per tal que la funció tingui una discontinuïtat de salt, necessitem que el numerador del límit per l'esquerra s'anul·li en fer el límit, perquè en cas contrari el límit serà $+\infty$ o $-\infty$. Per tant, necessitem

$$k+4=0 \Longrightarrow k=-4$$

Escollint $k=-4$, el límit per l'esquerra dóna una indeterminació, caldrà factoritzar i simplificar. Buscant les arrels del numerador obtenim:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$$

Per tant, en fer el límit per l'esquerra obtenim

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Per tant, recapitulant, si $k=-4$ ens queda

$$2 = \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 5$$

Per tant, si $k=-4$, la funció té una discontinuïtat de salt en $x=1$.

c) En cas que $k\neq -4$, en fer el límit $x\to 1^-$, el numerador no s'anul·la i, per tant, la funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica. Fixem-nos que segons si $k<-4$ o $k>-4$ el numerador tindrà diferent signe en $x=-1$. Per tant, els límits laterals donaran $+$ o $-\infty$ segons si $k<-4$ o $k>-4$.

d) La funció no és mai contínua, perquè l'única opció que tenim perquè no hi hagi una asímptota és que $k=-4$, però en aquest cas els límits laterals no coincideixen.

e)

- *Si $k\neq -4$, hi ha asímptota vertical en $x=1$.*
- *Pel que fa a les horitzontals, fem:*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+kx+3}{x^2-3x+2} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{x} = 2$$

Per tant tenim dues asímptotes horitzontals:

$$\begin{array}{ll} y=1 & \textit{per l'esquerra} \\ y=2 & \textit{per la dreta} \end{array}$$

Exercici 27.
Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+k}{x} & \textit{si } x<-1 \\ \\ 2x^2-3 & \textit{si } x\geq -1 \end{cases}$$

a) Trobeu-ne el domini

b) Trobeu, si existeix, el valor de k pel qual la funció sigui contínua en $x=-1$.

c) Pels valors de k pels quals la funció no és contínua en $x=-1$, digueu de quin tipus de discontinuïtat es tracta.

d) Feu els límits laterals en $x=0$. Digueu si és contínua o no en $x=0$, indicant de quin tipus de discontinuïtat es tracta en cas que no ho sigui.

e) Trobeu les asímptotes verticals i hortitzontals, si és que n'hi ha.

Solució.*a)*

- *El denominador de la primera branca s'anul·la en $x=0$, però aquest valor entra per la segona branca.*
- *Al canvi de branca, $x=-1$, s'entra per la segona branca, i no hi té cap problema.*

Per tant:

$$D(f)=\mathbb{R}$$

b) Fixem-nos que el fet que el domini siguin tots els nombres reals no implica que la funció sigui contínua, ja que aquesta podria fer un salt en $x=-1$ si les dues branques "no enganxen bé". Per tal que enganxin bé necessitem que els límits laterals valguin el mateix:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x+k}{x}=1-k$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} 2x^2-3=-1$$

Per tant, f serà contínua si

$$1-k=-1\Longrightarrow k=2$$

c) En $x = 0$ la funció no presenta cap problema, ja que s'entra per la segona branca, i obtenim

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2x^2 - 3 = -3$$

Com $x = 0$ és del domini i els límits laterals existeixen i donen el mateix que $f(0)$, la funció serà contínua en $x = 0$.

d) La funció no té asímptotes verticals. Pel que fa a les horitzontals tenim

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+k}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x^2 - 3 = +\infty$$

Per tant, la funció tindrà una asímptota horitzontal per l'esquerra que serà la recta $\boxed{y = 1}$