2.10 Continuïtat

Una funció és contínua en $x = a$ si $f(a)$ existeix i és el mateix valor al que ens apropem en apropar x a a, tant per una banda com per l'altra. Dit d'una altra manera, $f(x)$ és contínua en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Si això no passa, aleshores tindrem un dels següents casos:

- Discontinuïtat **evitable**: Els límits laterals existeixen i són iguals, però no coincideixen amb la imatge de la funció:

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

- Discontinuïtat de **salt**: Els límits laterals existeixen però són diferents

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$
  $$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \pm\infty$$
  $$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \pm\infty$$

- Discontinuïtat **asimptòtica**: Alguns dels límits laterals és + o $-\infty$:

  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o bé} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

2.11 Comportament a l'infinit

I què passa qua x creix? I quan x decreix? Què la funció? Creix? Decreix? S'estanca?

Això ho podem estudiar fent els límits quan $x \to \infty$ (quan x creix, és a dir, mirem què fa la funció cap a la dreta) i quan $x \to -\infty$ (quan x decreix, és a dir, mirem què la funció cap a l'esquerra).

- En fer un límit d'una funció a l'infinit

  $$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

  farem servir els mateixos criteris que hem fet servir per successions: enlloc de fer servir n ara farem servir x, ja que en fer créixer x no importa si mirem només valors enters o no.

- En fer un límit al $-\infty$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

  en el fons farem el mateix, tot i que haurem de vigilar amb els signes (especialment quan tinguem exponents senars), ja que ara x serà negativa. De fet es té la següent propietat:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

Ens podrem trobar amb els següents casos:

$$
\begin{cases}
\bullet \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases}
+\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció ``se'n va amunt''.} \\ \bullet \text{ la funció creix sense límit quan ens la mirem cap a la dreta.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada superiorment quan } x \to +\infty. \end{cases} \\
-\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció ``se'n va avall''.} \\ \bullet \text{ la funció decreix sense límit quan ens la mirem cap a la dreta.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada inferiorment quan } x \to +\infty. \end{cases} \\
\in \mathbb{R} \begin{cases} \bullet \text{ La funció ``s'estanca'', s'apropa a algun valor quan } x \to +\infty \\ \quad \text{(tindrà una asímptota horitzontal per la dreta)} \\ \bullet \text{ El límit existeix} \\ \bullet \text{ La funció està fitada quan } x \to \infty \text{ (superior o inferiorment)} \end{cases}
\end{cases} \\
\bullet \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases}
+\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció ``ve d'amunt''} \\ \bullet \text{ la funció creix sense límit quan ens la mirem cap a l'esquerra.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada superiorment quan } x \to -\infty. \end{cases} \\
-\infty \begin{cases} \bullet \text{ la funció ``ve d'avall''} \\ \bullet \text{ la funció decreix sense límit quan ens la mirem cap a l'esquerra.} \\ \bullet \text{ La funció no està fitada inferiorment quan } x \to -\infty. \end{cases} \\
\in \mathbb{R} \begin{cases} \bullet \text{ La funció ``s'estanca'', s'apropa a algun valor quan } x \to -\infty \\ \quad \text{(tindrà una asímptota horitzontal per l'esquerra)} \\ \bullet \text{ El límit existeix} \\ \bullet \text{ La funció està fitada quan } x \to -\infty \text{ (superior o inferiorment)} \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

2.11.1 Límits a l'infinit de funcions racionals

Considerem una funció racional, és a dir, una funció del tipus

$$
f(x) = \frac{ax^p + \cdots}{bx^q + \cdots} \text{ amb } a, b \neq 0
$$

on p i q són els graus més alts del numeradors i denominadors, respectivament.
Aleshores tenim les següents possibilitats

$$
\begin{cases}
\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases}
\bullet \text{ Si } p > q \begin{cases} \bullet \text{ Si } \frac{a}{b} > 0 \Longrightarrow +\infty \\ \bullet \text{ Si } \frac{a}{b} < 0 \Longrightarrow -\infty \end{cases} \\
\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } p = q \Longrightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \Longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{Asímptota horitzontal per la dreta} \begin{cases} \bullet\ y = \frac{a}{b} \\ \bullet\ y = 0 \end{cases}
\end{cases} \\
\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases}
\bullet \text{ Si } p > q \begin{cases} \text{Caldrà mirar els signes del numerador i denominador quan } x \text{ és gran però negativa,} \\ \text{tenint en compte si els graus són senars o parells i els signes dels coeficients.} \\ \qquad \bullet \text{ Si tenen el mateix signe} \Longrightarrow +\infty \\ \qquad \bullet \text{ Si tenen signe diferent} \Longrightarrow -\infty \end{cases} \\
\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } p = q \Longrightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \Longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{Asímptota horitzontal per l'esquerra} \begin{cases} \bullet\ y = \frac{a}{b} \\ \bullet\ y = 0 \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$