Derivades

Pendent d'una recta

Imaginem que tenim una magnitud que ve donada per una recta

$$y = mx + n$$

imaginem que x és el temps, i y una certa magnitud (un preu d'alguna cosa per exemple). Ens preguntem quant ràpid varia y en funció de x. Això ens ho diu el pendent:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{mb + n - (ma + n)}{b - a} \\ &= \frac{mb - ma}{b - a} = \frac{m\cancel{(b - a)}}{\cancel{b - a}} = m\end{aligned}$$

El pendent ens dóna la "velocitat" de creixement d'una recta, i no depèn de l'interval a i b!!!!

Taxa de variació mitjana

I si no tenim una recta? Podem fer el mateix?
I tant, mirem quant varia la funció en un cert interval. Això s'anomena **Taxa de Variació Mitjana** (o diferències finites o velocitat mitjana):

$$\mathsf{TVM}[a,b] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Això ens diu, en promig, la velocitat de canvi de la funció entre a i b.

TVM i pendent de la recta secant

La taxa de variació mitjana d'una funció en un interval coincideix amb el pendent de la recta secant. De fet, seria aproximar la funció per una recta i calcular-ne el pendent.

Exemple

$$f(x) = x^2$$

Calcular TVM$[0, 2]$ i TVM$[-2, 0]$ i TVM$[-1, 1]$:

$$\text{TVM}[0,2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$\text{TVM}[-2,0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{0 - (-2)^2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{TVM}[-1,1] = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)^2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Deures

Pàgina 157, números 2 a 5.

Variació instantània

Com més gran sigui l'interval $[a, b]$ més gran és l'error que cometem. Quant més petit és l'interval $[a, b]$ amb més exactitud podem mesurar la variació de la funció en aquell interval, fins al punt de poder parlar de la variació instantània de la funció: velocitat de canvi en un instant donat.

Derivada d'una funció en un punt

La velocitat de canvi en un instant determinat s'anomena **derivada de la funció en un punt**. S'obté fent l'interval infinitament petit, cosa que podem fer de dues maneres equivalents:

- Apropant infinitament b a a:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- fent infinitament petita l'amplada de l'interval. Si l'amplada és h tindrem $b = a + h$, per tant:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Recta tangent

La derivada d'una funció en un punt coincideix amb el pendent de la recta tangent en aquell punt.
Això és equivalent a aproximar la funció en un punt per la seva recta tangent, i mesurar-ne la variació.

Exemple

Calculem la derivada de la funció

$$f(x) = x^2 - 1$$

en $x = 1$, $x = 0$ i $x = -4$:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(1+h)^2 - 1}^{f(1+h)} - \overbrace{(1-1)}^{f(1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2 + h = 2$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(0+h)^2 - 1}^{f(0+h)} - \overbrace{(0^2 - 1)}^{f(0)}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 1 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

$$f'(-4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(-4+h)^2 - 1}^{f(-4+h)} - (\overbrace{(-4)^2 - 1)}^{f(-4)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16 - 8h + h^2 - 1 - (16-1)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{-8h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-8+h)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -8 + h = -8$$

Derivada de la funció exponencial

Considerem la funció

$$f(x) = e^x$$

Recordem:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Alternativament:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

on ! és el factorial:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$
$$0! = 1$$

Derivada de la funció exponencial

Doncs resulta que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Si derivem:

$$(e^x)' = \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \frac{5x^4}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2x}{2 \cdot \underbrace{1}_{1!}} + \frac{3x^2}{3 \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{2!}} + \frac{4x^3}{4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3!}} + \frac{5x^4}{5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!}} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot 1} + \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3} \cdot 2!} + \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4} \cdot 3!} + \frac{\cancel{5}x^4}{\cancel{5} \cdot 4!} + \cdots$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x$$

Derivada de la funció exponencial

Per tant:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

A més, com

$$a^x = \frac{e^x}{\ln(a)}$$

trobem

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x}$$

Derivada del logaritme

Recordem, el logaritme serveix per aïllar una incògnita en un exponent. És a dir, a quin nombre hem d'elevar $a > 0$ per tenir y?

$$a^y = x \Longleftrightarrow y = \log_a(x)$$

La funció

$$f(x) = \log_a(x)$$

compleix:

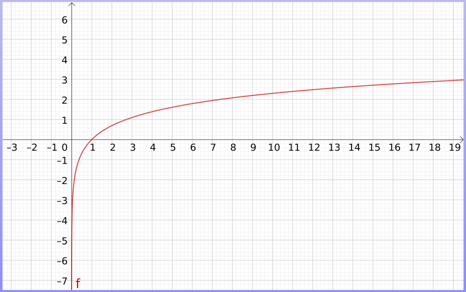
- $D(f) = (0, \infty)$ perquè com $a > 0$ aleshores a^y sempre és positiu
- $\log_a(a) = 1$ perquè $a^1 = a$
- $\log_a(1) = 0$ perquè $a^0 = 1$

Logaritme neperià

$$f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$$

Compleix:

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ "ja que"
  $e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = 0$
- Asímptota vertical $x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ "ja que " $e^{\infty} = \infty$



Derivada del logaritme

Resulta que

- $\Big(\ln(x)\Big)' = \dfrac{1}{x}$
- $\Big(\log_a(x)\Big)' = \dfrac{1}{\ln(a)}\dfrac{1}{x}$

Derivabilitat d'una funció

Definició

Diem que una funció és derivable en $x = x_0$ *si podem traçar la recta tangent al punt* $(x_0, f(x_0))$. *Di d'una altra manera, si existeix el límit*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Per poder traçar la recta tangent (i que la funció sigui derivable) necessitem:

1. Que la funció sigui contínua
2. Que no hi hagi punxes (no hi hagi punts angulosos)

Derivabilitat d'una funció

Alternativament:

Definició

Una funció és derivable si ella i la seva derivada són contínues en $x = x_0$.

Exemple

És derivable en $x = -1$ la funció?

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 4 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Mirem si és contínua:

$$f(-1) = 1$$
$$f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 2x^2 + 5x + 4 = 1$$
$$f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 = 1$$

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Longrightarrow \text{És contínua en } x = -1$$

Exemple

Com és contínua en $x = -1$, mirem ara si és derivable.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+5 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Calculem

$$f'(-1^-) = -4 + 5 = 1$$
$$f'(-1^+) = -2$$

Com

$$f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$$

No és derivable en $x = -1$.

Exercici

Trobeu els valors de a per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ ax - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sigui contínua i derivable en $x = 1$.

Continguts examen

- Assímptotes verticals, hortitzontals i oblíqües
- Continuïtat: assímptòtica (límits laterals), evitable (factoritzar i simplificar) i de salt (funcions definides a trossos)
- Representació de funcions a trossos amb paràboles i rectes
- Càlcul de derivades: quocient, producte, regla de la cadena, etc
- Derivabilitat de funcions. Saber decidir si una funció és derivable o no (continuïtat + continuïtat de la derivada)
- Càlcul de paràmetres per discutir continuïtat i derivabilitat
- Discutir la continuïtat i derivabilitat de funcions donada la seva gràfica: saber calcular-ne els límits laterals (gràficament) i distingir si és derivable o no (contínua + no punts angulosos)