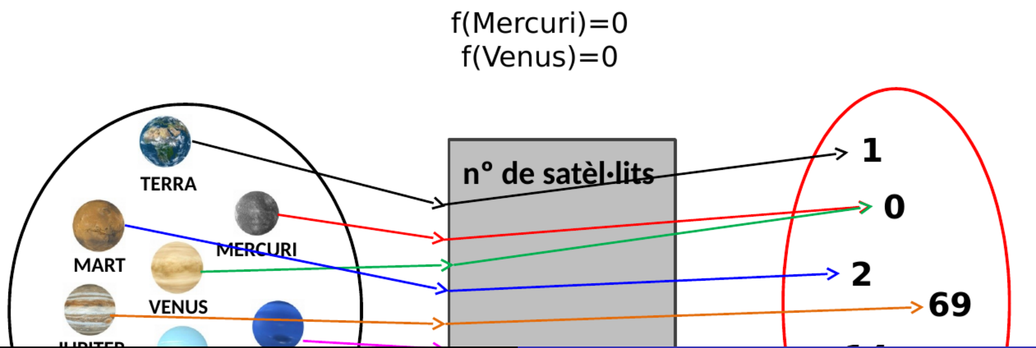
Funcions

Què és una funció?

Definició

Una funció és una "cosa" que assigna "coses" a altres "coses"

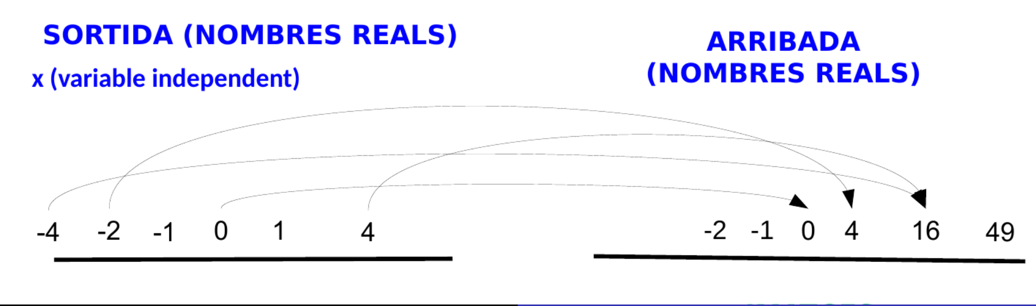


Funcions reals de variable real

Definició

A cada nombre s'hi assigna un altre nombre, mitjançant, en general, una expressió algebraica.

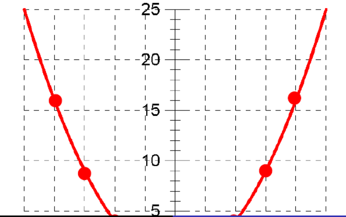
Per exemple, $f(x) = x^2$



Funcions reals de variable real

$$f(x) = x^2$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{2}$
f(x)	9	4	1	0	1	4	9	2



Punts de tall amb els eixos

- **Eix vertical (ordenades)**: ordenada a l'origen o bé imatge del zero: $f(0)$. El punt és de la forma $(0, f(0))$
- **Eix horitzontal (abscisses)**: busquem el valor de x que fa que $f(x) = 0$, són punts de la forma $(x_0, 0)$. Cal resoldre l'equació:

$$f(x) = 0$$

Domini d'una funció

No tots els valors de x tenen perquè tenir imatge.

Definició

Domini: són tots els valors d'x pels quals la funció ens retorna algun valor (tenen imatge)

Motius pels quals una funció no retorna alguna valor:

- Denominadors que s'anul·len: caldrà veure per quins valors d'x el denominador s'anul·la i treure aquells valors del domini.
- Arrels que es fan negatives.
- Funcions definides a trossos: cal assegurar-se que estiguin ben definides als canvis de branca.
- Logaritmes que s'anul·len o són negatius.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

Domini:

$$x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Punts de tall amb els eixos:

- Eix d'ordenades: $f(0) = \frac{0^2-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\left(0, -\frac{1}{2}\right)}$$

- Eix d'abscisses:

Taula de valors

x	$f(x)$
0	$-\frac{1}{2}$
1	0
-1	0
2	$\frac{3}{4}$
-2	$\nexists$

Exemple 2

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$$

Domini: lo de dins de l'arrel (radicand) no pot ser negatiu.

1. Mirem quan val 0: $x^2 - x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -2$ i $x = 3$
2. Mirem quan és negatiu avaluant el radicand:

$+$		$-$		$+$
	-2		3	

3. Ens quedem amb els valors que fan que el radicand sigui positiu o 0:

$$D(f) = (-\infty, -2] \cap [3, \infty)$$

Rectes

Excepte les verticals, són de la forma:

$$y = mx + n$$

- m: pendent de la recta
- n: ordenada a l'origen (punt de talla amb l'eix vertical o d'ordenades), ja que $f(0) = n$

Paràboles

Les que tenen l'eix vertical són de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Si $a > 0$ mira amunt (convexa)
- Si $a < 0$ mira avall (còncava)
- Punt de tall amb l'eix d'ordenades (vertical): $(0, c)$, ja que $f(0) = c$
- Punts de tall amb l'eix d'abscisses. N'hi pot haver un, dos o cap, segons el nombre de solucions de l'equació:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Translació vertical

$$g(x) = f(x) + c$$

- Si $c > 0$ g és com f però amunt
- Si $c < 0$ idem però avall

Translació horitzontal

$$g(x) = f(x + c)$$

- Si $c > 0$ g és com f però moguda cap a l'esquerra: $g(0) = f(c)$, com c està a la dreta del 0, hem mogut f cap a l'esquerra.
- Si $c < 0$ idem però a la dreta

Funcions definides a trossos

Són funcions de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \text{funció 1} & \text{Si } x <, \leq, >, \geq \\ \text{funció 2} & \text{Si } x \cdots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Exercici

Fer la gràfica de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

És contínua la funció?

Exercici

Trobar el domini, els punts de tall amb els eixos i fer la gràfica de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 5x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercici

Domini, punts de tall, vèrtexs i gràfica de les funcions

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{3} + 3x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

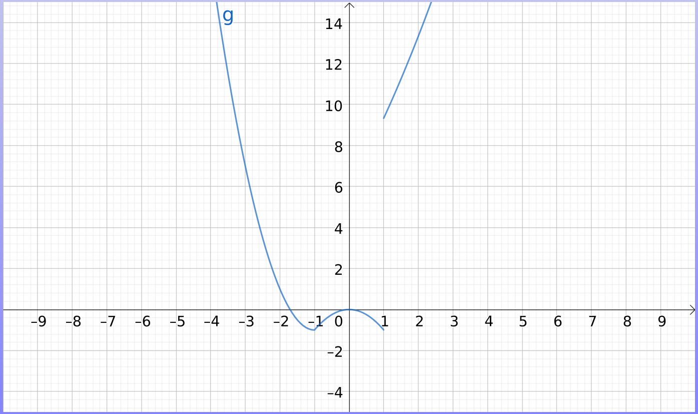
Solució

$D(g) = \mathbb{R}$ perquè les branques no presenten problemes i g està ben definida a $x = -1$ i $x = 1$.
La funció talla l'eix d'ordenades a $(0, g(0)) = (0, 0)$.
Trobem els punts notables de les tres branques

a) Operant: $2(x+1)^2 - 1 = 2x^2 + 4x + 1$ Tall abscisses: $2x^2 + 4x + 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$. Com $x_2 > -1$, a la primera branca només tenim un tall: $\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. El vèrtex es trobarà a $x = -1$, just on es canvia de branca. Aquest punt seria $(-1, -1)$, l'haurem de pintar de blanc.
b) La paràbola mira cap avall perquè $a = -1$. Tall abscisses: $-x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$, i tenim només un tall, el $(0, 0)$, que és el mateix punt de tall que les ordenades. El vèrtex es troba a $x = 0$ i per tant és el $(0, 0)$.
c) Tall abscisses: $\frac{x^2}{3} + 3x + 6 = 0 \Longrightarrow x_1 = -3$, $x_2 = -6$. Cap d'ells compleix $x > 1$, per tant no talla.

Solució

La gràfica quedarà:



Funció valor absolut

La funció "valor absolut" és una funció definida a trossos: cal canviar el signe quan s'avalua en valor negatius:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

Exercici valor absolut

Domini, punts de tall, vèrtexs i gràfica de la funció

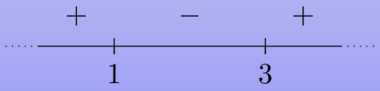
$$f(x) = |2x - 3| \qquad g(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right|$$

Solució

Trobem quan hi ha un canvi de signe:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

Avaluant en algun punt a l'esquerra de l'1, entre 1 i 3 i a la dreta del 3 trobem

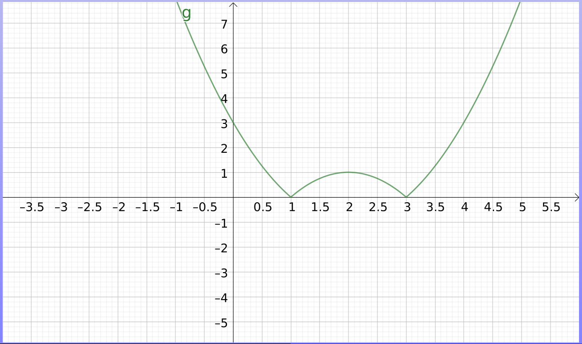


Per tant la funció la podem escriure com:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solució

Per fer la gràfica, com ja tenim el tall amb l'eix x, ens caldrà algun punt i trobar el vèrtex. Aquest es trobarà a la branca del mig: $x = -\frac{b}{2a} = 2 \longrightarrow (2, g(2)) = (2, 1)$. Com a punts extres donem per exemple el $(0, 3)$ (1a branca) i el $(4, 3)$ (3a branca).



Composició de funcions

Composar dues funcions vol dir "ficar-ne una dins l'altra". És a dir, primer fem una i el que ens dóna ho fiquem dins l'altra. Ho escriurem així:

$$(f \circ g)(x) = f\left(g\left(x\right)\right)$$

Exemple:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

aleshores

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{3x+1}{x-1}+2}$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\sqrt{x+2}\right) = \frac{3\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}-1}$$

Propietats de la composició

1. No és commutativa
2. Element neutre: és la funció $Id(x) = x$, és la funció que no fa res
3. Funció inversa. La funció inversa d'una funció desfà la funció: agafa imatges i les associa a les seves antiimatges. És a dir, la seva variable independent passar a ser y, i la dependent la x. S'escriu d'aquesta manera: $f^{-1}(y)$

Inspecció ràpida

Volem veure què fa f quan x **creix molt** (anem a la dreta) o bé quan x la fem **molt petita** (essent negativa, anem a l'esquerra). És a dir, volem veure quan valen els límits

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

A la pràctica fem una primera inspecció substituint x per infinit, i mirem què passa.

"Operant" amb ∞

A la pràctica fem $x = \infty$ o $x = -\infty$ (mentalment!). Coses que poden passar:

a) $\frac{K}{\infty} \to 0$

b) $\frac{K}{0} \to \pm\infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador

c) $\infty + \infty \to \infty$

d) $\infty \cdot \infty \to \infty$ (pot ser $-\infty$ si un dels dos és negatiu)

e) $\frac{\infty}{0} \to \pm\infty$ Dependrà del signes del numerador i denominador

f) $\frac{0}{\infty} \to 0$

g) k^{∞}Això pot donar o bé 0 o bé $\pm\infty$, dependrà de si $|k| < 1$ o no i del seu signe.

Indeterminacions

En alguns casos ens trobarem que no podem dir, a priori, cap on tendeix la successió, perquè el resultat està indeterminat. Aquests són:

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$
2) $\dfrac{0}{0}$
3) $\infty - \infty$
4) $0 \cdot \infty$
5) 0^0
6) 1^∞
7) ∞^0

Límits de funcions racionals: indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

1. Ens quedem només amb el terme de grau més alt, tant al numerador com al denominador
2. Simplifiquem

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\cancel{+1}}{3x^2\cancel{-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-2x+3}{x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x+3x^3}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

Límits de funcions racionals

Podem anar més ràpid:

$$f(x) = \frac{ax^p + \text{grau més baix}}{bx^q + \text{grau més baix}}$$

aleshores només hem de comparar els graus i vigilar amb els signes.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } p = q \Longrightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p < q \Longrightarrow 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Asímptota horitzontal} \\ \text{per la dreta} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \bullet\ y = \frac{a}{b} \\ \bullet\ y = 0 \end{array}\right. \\ \bullet \text{ Si } p > q \left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } a \text{ i } b \text{ mateix signe} \Longrightarrow +\infty \\ \bullet \text{ Si } a \text{ i } b \text{ diferent signe} \Longrightarrow -\infty \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{l}\bullet \text{ Si } p=q \Longrightarrow \frac{a}{b} \\ \bullet \text{ Si } p<q \Longrightarrow 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Asímptota horitzontal} \\ \text{per l'esquerra}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\bullet\ y=\frac{a}{b}\\ \bullet\ y=0\end{array}\right. \\ \bullet \text{ Si } p>q \end{cases}$$

Signe de a i b \ Paritat de p i q	igual	diferent
igual	$+\infty$	$-\infty$
diferent	$-\infty$	$+\infty$

Exercicis:

Trobeu el domini, punts de tall amb els eixos i límits al $+\infty$ i $-\infty$ de les següents funcions

$$f(x) = \frac{x^2+9}{x^3-x} \qquad g(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+3}$$

Pàgina 145 $n^o 2$

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2-x}-5x^2}{3x^2\cancel{+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{5}{3}$ Per tant, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x-5x^2}{3x^2+1} = -\frac{5}{3}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x\cancel{-3}}{4x^2\cancel{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{4x} = \frac{7}{\infty} = 0$ Per tant, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x-3}{4x^2-2} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(-3x^5+3x^3-x+1\right) = \lim_{x\to+\infty} -3x^5 = -\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{\cancel{2}-4x^2}{\cancel{1}-9x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{-4\cancel{x^2}}{-9\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x^2}{5x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^{\cancel{2}}}{5\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{5} = -\infty$

Pàgina 145 $n^o 2$

f) $\lim_{x\to-\infty}(5-3x+2x^2-x^4)=\lim_{x\to-\infty}-x^4=-\infty$

g) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x+7}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{3}=-\infty$

h) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}-\dfrac{2}{x}=0\longrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}-\dfrac{2}{x}=0$

i) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-5x^3+2x^2-3}{2x^3-x^2+2x+7}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{6x^4}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}3x\longrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}3x=\pm\infty$

Exercici:

Trobar el domini, punts de tall amb els eixos i límits de la funció a $\pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-4} & \text{si } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{x^2-5x-6}{2x^2-18} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercici

Raoneu per què una equació de la forma

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots = 0$$

té sempre almenys una solució si n és senar.

Límits laterals

Mirem què li passa a la funció quan x s'apropa a un valor:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

En alguns casos haurem de distingir entre apropar-se per la dreta o per l'esquerra:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \text{Ens apropem a } x = a \text{ per la dreta}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \text{Ens apropem a } x = a \text{ per l'esquerra}$$

Límits laterals

Coses que ens poden passar en fer

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

1. Tenim una funció definida a trossos que canvia justament en $x = a$: per una banda farem servir una branca i per l'altra l'altra
2. En $x = a$ se'ns anul·la el denominador però el numerador no. Això ens donarà ∞ o $-\infty$, haurem de mirar el signe a cada banda
3. En $x = a$ se'ns anul·len tant numerador com denominador: Això ens donarà una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, que resoldrem simplificant.

Límits laterals en funcions definides a trossos

Si tenim

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a \\ h(x) & \text{si} x > a \end{cases}$$

aleshores

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} h(x)$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x)$$

Límits laterals en denominadors que s'anul·len

Si se'ns anul·la el denominador però el numerador no, només caldrà mirar el signe a cada banda. Per exemple:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

S'anul·la el denominador en $x = 0$, però el numerador no.
Mirem el signe del denominador a banda i banda:

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \cdots\cdots\text{———} & | & \text{———}\cdots\cdots \\ & 0 & \end{array}$$

Per tant tindrem

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Si en fer el límit se'ns anul·len tant numerador com denominador, haurem de simplificar. Per fer-ho farem, tant a numerador com denominador:

1. Treure factor comú, si es pot: $x^5 + x^3 - x^2 = x^2\left(x^3 + x - 1\right)$
2. Fer que el coeficient de grau més alt sigui 1: $2x^2 - 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ o $9 - x^2 = -(x^2 - 9)$
3. Busquem les arrels: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ i $x = 2$
4. Factoritzem: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2)$
5. Alternativament podem identificar identitats notables: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ o $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$
6. Simplificar factors repetits al numerador i denominador: $\frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{(x-2)^{\cancel{2}}(x+3)} = \frac{x+5}{(x-2)(x+3)}$

Exemple

Exemple:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

Factoritzant tenim:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

i no cal fer els límits laterals, perquè donen el mateix.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = ?$$

Comencem substituïnt x per 1 aviam què surt:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació: caldrà factoritzar i simplificar}$$

Per factoritzar trobem les arrels del numerador i denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

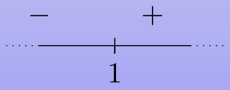
$$x^2 - 2x + 1 \Longrightarrow x = 1 \text{ (arrel doble)}$$

Per tant:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0}$$

$\Longrightarrow$ Cal mirar els límits laterals!

Estudiem el canvi de signe del denominador en $x=1$:



Per tant:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

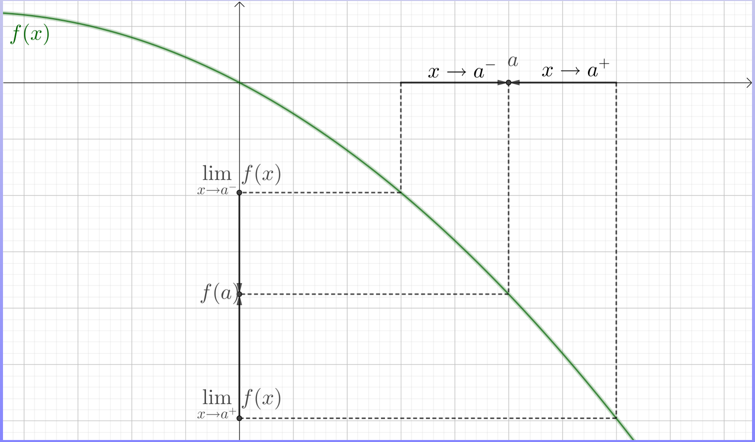
Continuïtat

Definició

Diem que una funció és contínua en $x = a$ si en apropar x a a obtenim el valor de la imatge d'a. És a dir, $f(x)$ és contínua en $x = a$ si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Continuïtat



Continuïtat

Perquè una funció sigui contínua en $x = a$ necessitem que es compleixi:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Tipus de discontinuïtats

Motius pels quals una funció podria no ser contínua

Principalment:

1. Punts que no són del domini:
   1. Denominadors que s'anul·len
   2. arrels d'índex parell que es fan negatives
   3. altres: logaritmes que es fan 0, etc
2. Punts on funcions definides a trossos canvien de branca

Asímptotes

Definició

Una **asímptota** *d'una funció* **és una recta** *a la qual la funció s'hi apropa tant com vulguem.*

Tipus d'asímptotes:

- Verticals: associades a discontinuïtats asimptòtiques
- Horitzontals
- Obliqües

Horitzontals i obliqües: associades a comportament a l'infinit

Asímptotes verticals

Són rectes de la forma

$$x = a$$

on la funció té una **discontinuïtat** asimptòtica. Per tant tenim

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

La funció s'apropa a la recta quan x s'apropa a a.

Asímptotes verticals

Per exemple,

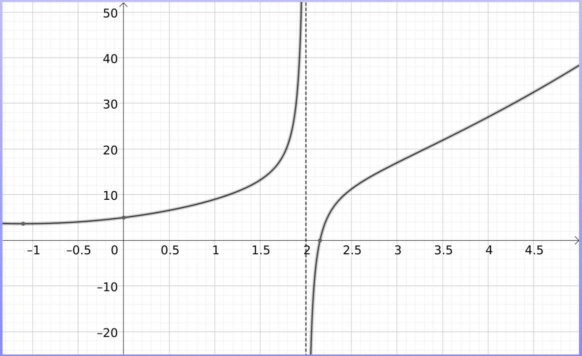
$$f(x) = \frac{x^3 - 10}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{-18}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{-18}{0^+} = -\infty$$

té una asímptota vertical que és la recta $x = 2$.

Asímptotes verticals

La seva gràfica, prop de $x = 2$ és



Asímptotes horitzontals

Són rectes horitzontals, de la forma

$$y = n$$

La funció s'hi apropa en créixer o decréixer x:

$$\text{Asímptota horitzontal} \begin{cases} \text{- Per la dreta si } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = n \\ \text{- Per l'esquerra si } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = n \end{cases}$$

Asímptotes horitzontals

Per exemple,

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{x^3 - 5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

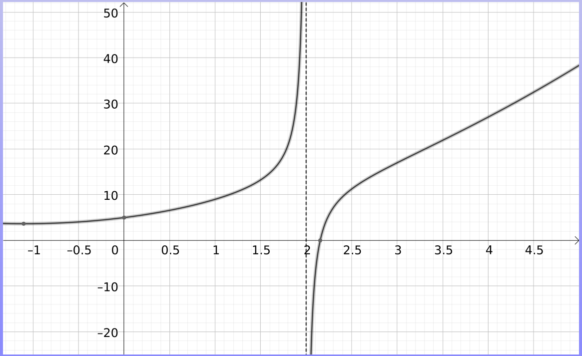
Per tant té una asímptota horitzontal que és la recta

$$y = 3$$

tant per la dreta com per l'esquerra.

Asímptotes horitzontals

La seva gràfica és



Asímptotes obliqües

Són rectes de la forma

$$y = mx + n$$

La funció s'hi apropa en créixer o decréixer x:

$$\text{Asímptota obliqua} \begin{cases} \text{- Per la dreta si } \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(f(x) - (mx + n) \Big) = 0 \\ \text{- Per l'esquerra si } \lim\limits_{x \to -\infty} \Big(f(x) - (mx + n) \Big) = 0 \end{cases}$$

Asímptotes obliqües

Com trobem m i n?

Primer trobem m. Si $f(x)$ té una asímptota obliqua, aleshores s'haurà de complir

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Big(f(x)-(mx+n)\Big)=0 \iff \lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx+n}{f(x)}=1$$

Operant:

$$1=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx+n}{f(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{mx}{f(x)}+\underbrace{\cancel{\frac{n}{f(x)}}}_{\to 0}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx}{f(x)}$$

Per tant,

$$\lim_{x\pm\infty}\frac{mx}{f(x)}=1 \implies \boxed{m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

Asímptotes obliqües

Un cop tenim m ja podem trobar n:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Big(f(x)-(mx+n)\Big)=0\Longrightarrow \boxed{n=\lim_{\pm x\to\infty}\Big(f(x)-mx\Big)}$$

Observació

Si $f(x)$ *té una A.H. aleshores no tindrà A.O (almenys per aquell cantó).*

Asímptotes obliqües

Exemple,

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2 + 2}$$

Com no té asímptota horitzontal, per tant mirem si en té d'obliqües:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3-2}{x^2+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2}{x^2 + 2} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2}{(x^2 + 2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2}{x^3 + 2x} = 2$$

Asímptotes obliqües

Trobem ara n

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2}{x^2+2} - 2x = \infty - \infty \text{ Indeterminació}$$

La resolem ajuntant (fent la resta). Fem que tinguin el mateix denominador:

$$n = \lim_{x\to} \frac{2x^3-2}{x^2+2} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2}{x^2+2} - \frac{2x(x^2+2)}{x^2+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2-2x\left(x^2+2\right)}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2-2x^3-4x}{x^2+4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x-2}{x^2+4} = 0$$

Asímptotes obliqües

Té una asímptota obliqua que és la recta

$$\boxed{y = 2x}$$

tant per la dreta com per l'esquerra.