

Exercicis continuïtat

Exercici 1.

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+2) & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solució.

Discontinuitat de salt en $x = -1$ i en $x = 3$

Exercici 2: PAU.

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solució.

La funció és contínua arreu.

Exercici 3: PAU.

Estudiar la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Solució.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \end{array} \right\} \implies \text{Discontinuitat de salt}$$

Solució (Exercici 4).

a) En $x = 2$, asimptòtica ja que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

b) En $x = 1$, asimptòtica ja que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

c) En $x = 1$ discontinuïtat evitable, ja que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{8} \neq f(1)$$

i en $x = -3$ asimptòtica, ja que

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

d) És contínua, perquè el denominador mai s'anul·la.

e) Evitable en $x = -1$, asimptòtica en $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

f) Asimptòtica en $x = 1$ i $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Solució (Exercici 5).

És contínua en $x = 0$ i en $x = 1$.

Solució (Exercici 6).

És contínua, tant en $x = 0$ i $x = 1$ com en $x = 2$.

Solució (Exercici 7).

Només cal posar-hi un -1 , ja que tots dos límits laterals coincideixen i valen -1 .

Solució (Exercici 8).

a) No és contínua en $x = 5$ perquè

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10$$

i $f(5) = 0$.

b) Sí, la funció $\frac{x^2-25}{x-5}$ coincideix amb f amb tots els valors llevat de en $x = 5$.

Exercici 4.

Trobar el domini i els punts de tall de les funcions

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^3 - x} \quad g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

Solució.

Igualant els denominadors a 0 trobem

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$$

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$$

Els punts de tall amb l'eix d'abscisses el trobem igualant el numerador a 0 i comprovant que després els valors trobats siguin del domini:

$$x^2 + 9 = 0 \text{ No té solució real}$$

$$x - 3 = 0 \implies x = 3 \notin D(g)$$

Per tant cap de les dues funcions talla l'eix d'abscisses.

Els punts de tall amb l'eix d'ordenades seran:

$$0 \notin D(f) \implies f(0) \nexists \implies f \text{ no talla l'eix d'ordenades}$$

$$g(0) = -1 \implies \boxed{(0, -1)}$$