Factorització de polinomis

Què vol dir factoritzar?

Factoritzar vol dir "escriure com a producte".
Recordem, els nombres enters podem factoritzar, és a dir, els podem escriure com a producte de nombres més petits. Per exemple,

$$420 = 7 \cdot 4 \cdot 15$$

ja que 7, ,4 i 15 són divisors de 420.
Resulta que podem fer el mateix amb polinomis: escriure'ls com a producte de polinomis de grau més petit. Per exemple,

$$x^8 + 4x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 17x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x - 24 =$$
$$(x^2 + 5x + 6) \cdot (x^3 + 4) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

Podeu comprovar aquesta factorització a mà (i molta paciència) o bé amb un manipulador algebraic com ara el del *wolframalpha.com*.
Com sabeu, en el cas dels enters, existeixen algunes regles per saber si un nombre és divisible entre un altre, i per tant podem trobar divisors a vista. Però, com podem trobar els divisors d'un polinomi? Si el grau és molt alt, doncs no podem, aquesta és precisament la base dels sistemes d'encriptació moderns (com per exemple el famós WPA2 que encripta el password del wifi). Inclús amb graus petits, pot ser un problema difícil. De fet, aquest problema també el tenim amb els nombres enters: és molt difícil comprovar si un nombre molt (molt) gran és primer o no. Però amb els polinomis no cal pujar massa el grau...

Si observeu l'exemple anterior, la factorització del nombre 420 no està feta en **factors primers**, perquè el factors 4 i 15, al mateix temps, es poden escriure com a producte de dos factors:

$$4 = 2^2$$
$$15 = 3 \cdot 5$$

Per tant, el nombre 420 el podem escriure de manera única com a producte de factors primers (llevat de l'ordre i el factor 1):

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Doncs el mateix ens passa amb la factorització del polinomi anterior; hi ha alguns factors que, al mateix temps, potser es podrien escriure com a producte de factors més petits. No obstant, n'hi ha alguns que no es poden "fer més petits", com són els polinomis de grau 1: un polinomi de primer grau no es pot escriure com a producte de dos polinomis (llevat que un d'ells sigui només un nombre). Aquests polinomis s'anomenen **irreductibles**, i fan el paper de *polinomis primers*: només són divisible entre ells mateixos i entre un nombre.
Però, com podem descomposar polinomis en factors primers? Doncs "fàcil", trobant-ne les arrels, és a dir, les solucions d'igualar el polinomi a 0. Recordeu, si $x = a$ és una arrel d'un polinomi $p(x)$, aleshores el polinomi $x - a$ (fixeu-vos que es canvia el signe!) és divisor de $p(x)$ i, per tant, podem escriure

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$

on el grau de $q(x)$ és més petit que el de $p(x)$. Ara, la resta d'arrels de $p(x)$ seran les arrels de $q(x)$. Vegem uns exemples.

Exemple 1. *Factoritzeu el polinomi* $x^2 - x - 2$.

Solució.
Com és de grau 2, podem fer servir la fórmula per trobar-ne les arrels resolent l'equació

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

que són $x = 2$ *i* $x = -1$. *Per tant, el polinomi el podem factoritzar com*

$$x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1)$$

Fixeu-vos que

1) *Si desfeu el producte fent servir la propietat distributiva, obteniu de nou el polinomi*

2) *Els factors són* x *"menys l'arrel", és a dir*

$$\begin{aligned} x = 2 &\longrightarrow x - 2 \\ x = -1 &\longrightarrow x + 1 \end{aligned}$$

Exemple 2. *Factoritzeu el polinomi* $x^4 - 5x^3 + 6x^2$.

Solució.
Com és de grau 4, en principi no sabem trobar les seves arrels. No obstant, si ens hi fixem, el polinomi no té terme independent (és 0). Per tant, una arrel és $x = 0$ i podem factoritzar simplement traient factor comú:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x \cdot \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)$$

Fixem-nos que el factor x també és de la forma x "menys l'arrel", com aquesta és 0 tenim que $x = x - 0$.
Ara volem trobar les arrels del polinomi que ha quedat. Tot i ser de grau 3, tampoc té terme independent. Per tant, $x = 0$ torna a ser una arrel i podem tornar a treure factor comú x:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2 \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right)$$

Fixeu-vos que això ho podríem haver fet d'entrada, traient factor comú x^2.
Ara, el polinomi que ens ha quedat és de grau 2, i podem trobar-ne les arrels amb la fórmula de sempre, que surten $x = 3$ i $x = 2$. Per tant, la factorització del polinomi serà:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2 \cdot (x-2) \cdot (x-3) \tag{1}$$

Exemple 3. *Factoritzeu el polinomi* $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Solució.
Volem trobar les arrels d'aquest polinomi, és a dir, resoldre l'equació

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

En aquest cas ens trobem un polinomi de grau 3, sense que puguem treure factor comú. Podríem fer servir les fórmules de Cardano per trobar-ne les arrels. Però abans, mirem si té alguna arrel entera.
Com sabem de teoria, si tingués una arrel entera, aquesta hauria de dividir el terme independent, -6. Provem doncs si algun dels divisors de -6 és arrel. Aquests són 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 i -6. Ho podem provar fent Ruffini ja que computacionalment no és més costós, i, en cas de trobar l'arrel, ja tindrem el quocient de fer la divisió entre x "menys l'arrel".
Provem amb $x = 1$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ 1 & & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -8 \end{array}$$

Com el residu és -8, $x = 1$ no és arrel.
Provem amb $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Ara sí, $x = -1$ és arrel, i el quocient de la divisió és $x^2 + x - 6$. Per tant, fins ara tenim la factorització

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot \left(x^2 + x - 6\right).$$

Com el quocient és de grau 2, podem trobar les arrels mitjançant la fórmula, que surten $x = 2$ i $x = -3$. Per tant, la factorització del polinomi serà

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3).$$

Ara bé, què passaria si ens trobéssim un polinomi de grau 2 sense arrels reals? Per exemple, com podem factoritzar el polinomi $x^2 + 1$? Noteu que, si en busquem les arrels, l'equació

$$x^2 + 1 = 0$$

no té arrels reals, ja que hem de calcular l'arrel d'un nombre negatiu. Per tant, als reals, aquest polinomi és irreductible.
Aleshores, tots els polinomis que no tenen arrels reals són irreductibles? Doncs no, per exemple, el polinomi $x^4 + 4$ no té cap arrel real, però en canvi el podem escriure com a producte de dos polinomis de grau 2

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2),$$

on cap dels dos factors té cap arrel real.

Per sort, aquest últim cas no els trobarem a 4rt d'ESO, però és interessant tenir clar que els únics polinomis irredicutibles als reals són els de grau 1 i els de grau 2 que no tenen arrels reals. Com a curiositat final, com amb els nombres complexos podem fer arrels de nombres negatius, als nombres complexos, tots els polinomis es poden factoritzar com a producte de polinomis de grau 1. Això es coneix com a *Teorema fonamental de l'àlgebra.*

Dit això, feu els següents exercicis.

Exercici 1: Pg. 55 número 32. *Factoritzeu, traient factor comú, els següents polinomis:*

a) $4x^3 - 5x^2 = x^2\,(4x-5)$

b) $6x^3 - 2x^2 + 4x = x\,(6x^2 - 2x + 4)$

c) $3x^5 + 6x^4 - 9x^3 = 3x^3(x^2 + 2x - 3)$

d) $x^5 - x^4 + 2x^3 - x = x(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)$

Exercici 2: Pg. 55 número 33. *Factoritzeu els polinomis, si és possible*

a) $x^2 - 17x + 52 = (x-4)(x-13)$ *perquè les arrels són* $x = 4$ *i* $x = 13$

b) $4x^2 + 5x - 9$ *Si trobem les arrels són* $x = 1$ *i* $x = -\frac{9}{4}$*. Ara bé, si factoritzem com* $(x-1)\cdot(x+\frac{9}{4})$ *el coeficient del terme de grau* 2 *no quadra. Per tant hem d'afegir un* 4 *multiplicant, i la factorització serà* $4(x-1)(x+\frac{9}{4})$

c) $x^2 + 12x + 36 = (x+6)(x+6) = (x+6)^2$

d) $x^2 - 4x + 29 =$ *És irreductible perquè les seves arrels no són reals.*

Exercici 3: Pg. 55 número 34. *Factoritzeu els següent polinomis com a producte de polinomis irreductibles*

a) $x^3 - 2x^2 - 63x = x(x^2 - 2x - 63) = x(x-9)(x+7)$

b) $x^4 + 19x^3 = x^3(x + 19)$

c) $x^4 - 4x^3 - 37x^2 + 40x$
Primer traiem factor comú: $x \cdot (x^3 - 4x^2 - 37x + 40)$*. Ara ens ha quedat un polinomi de grau 3 per factoritzar amb terme independent diferent de zero i per tant no podem treure factor comú. Provem si té alguna arrel entera, que ha de dividir el terme independent, per tant els candidats seran* $1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5\ldots$*, la llista continua. Si provem amb* $x = 1$ *resulta que tenim sort:*

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -4 & -37 & 40 \\
1 & & 1 & -3 & -40 \\
\hline
 & 1 & -3 & -40 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

i el residu és 0 *i el quocient és* $x^2 - 3x - 40$*. Per tant per ara tenim la següent factorització*

$$x(x-1)(x^2-3x-40)$$

Si busquem ara les arrels del polinomi de segon grau, resulta que són $x = -5$ *i* $x = 8$*, per tant la factorització en factors irreductibles és*

$$x(x-1)(x+5)(x-8)$$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

Com no podem treure factor comú provem si el polinomi té arrels enteres, que han de dividir el terme independent. Per tant els candidats seran 1, -1, 2, -2, 3 *i* -3*. Si provem amb* $x = 1$ *tenim sort. Per Ruffini obtenim*

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

i el residu és 0 *i el quocient* $x^2 + 5x + 6$*. Podem provar si aquest últim polinomi també el podem factoritzar i resulta que sí, ja que les seves arrels són* $x = -3$ *i* $x = -2$*. Per tant, la factorització en factors irreductibles serà*

$$(x-1)(x+3)(x+2)$$

e) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

Igual que abans, provem els divisors del terme independent. Provem amb $x = 1$*,*

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & -9 & -5 \\ 1 & & 1 & -2 & -11 \\ \hline & 1 & -2 & -11 & -16 \end{array}$$

i el residu no és zero, per tant $x = 1$ *no és arrel. Podríem provar amb el* -1*, però provem el* 5*:*

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & -9 & -5 \\ 5 & & 5 & 10 & 5 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

ja que el residu és 0 i quocient surt x^2+2x+1. Les arrels d'aquest últim polinomi són $x=-1$ i $x=-1$, **ALERTA**, *surt dues vegades la mateixa arrel! Per tant, a la factorització, aquest terme* **s'ha d'incloure dues vegades**. *Així obtindrem*

$$(x-5)(x+1)(x+1)=(x-5)(x+1)^2$$

f) $3x^4-22x^3+60x^2-72x+32$
Volem resoldre l'equació

$$3x^4-22x^3+60x^2-72x+32=0$$

per trobar-ne les arrels.
Aquest sembla complicat. Tenim grau 4 i sense poder treure factor comú... Doncs provem si té alguna arrel entera. Com el terme independent és 32, els seus divisors són les potències de 2 (positives i negatives) fins a 2^5. Si provem $x=1$ i $x=-1$ no tenim sort. Però amb $x=2$ sí, i, fent Ruffini, obtenim

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 3 & -22 & 60 & -72 & 32 \\
2 & & 6 & -32 & 56 & -32 \\
\hline
 & 3 & -16 & 28 & -16 & 0
\end{array}$$

ja que el residu és 0. La factorització que tenim, per ara, és la següent

$$(x-2)(3x^3-16x^2+28x-16).$$

El quocient que ens ha quedat és de grau 3 i tampoc podem treure factor comú. Haurem de seguir provant amb divisors de 16. L'1 i el -1 no cal que els provem, perquè si fossin arrels ja ho haurien estat del polinomi original. Per tant, seguim amb $x=2$, perquè és divisor de 16 i encara que ja hagi sortit abans, podria tornar a sortir perquè les arrels es poden repetir. I resulta que sí, que torna a sortir, i fent Ruffini obtenim

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -16 & 28 & -16 \\
2 & & 6 & -20 & 16 \\
\hline
 & 3 & -10 & 8 & 0
\end{array}$$

La facorització que tenim fins ara és

$$(x-2)^2 \cdot (3x^2 - 10x + 8).$$

Ara l'últim factor és de grau 2 i podem fer servir la fórmula per trobar-ne les arrels, que són $x = 2$ (altre cop) i $x = \frac{4}{3}$. Ara bé, si ens fixem, aquest polinomi de grau 2 no el podem factoritzar com

$$3x^2 - 10x + 8 \neq (x-2) \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right),$$

ja que el coeficient de grau 2 no quadra: a l'esquerra és 3 i a la dreta 1. Per tant, haurem d'afegir un 3 multiplicant a la dreta. Recordem que, la factorització d'un polinomi és única llevat del producte de polinomis constants (és a dir, sense termes en x). Això és equivalent a multiplicar per 1 quan factoritzem nombres enters. Resumint, la factorització quedarà, tenint en compte que l'arrel 2 ha aparegut tres vegades i que hem de multiplicar per 3 perquè quadri el terme de grau més alt,

$$3(x-2)^3 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)$$