Fraccions algebraiques

1 Simplificació de fraccions algebraiques

Com amb els enters, amb el polinomis podem considerar fraccions de polinomis. Com podem factoritzar, també podem simplificar. Recordem com es fa amb els enters. Si tenim la fracció

$$\frac{70}{420},$$

la podem simplificar factoritzant el 70 i el 420 en factors irreductibles (primers). Així tenim

$$\frac{70}{420} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{7}}{2^{\cancel{2}}\cdot 3\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{7}} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Alerta, tatxem perquè al numerador i denominador hi tenim només productes (no hi ha sumes) i, com el productes i la divisió són l'invers un de l'altre, aleshores es cancel·len. MAI DE LA VIDA podrem cancel·lar una cosa així

$$\xcancel{\frac{\cancel{7}+2}{3\cdot\cancel{7}} = \frac{2}{3}}, \Longrightarrow \text{MAI DE LA VIDA!}$$

ni res semblant, perquè al numerador hi ha una suma que no és la operació inversa de la divisió!!!

Per simplificar fraccions de polinomis farem exactament el mateix, factoritzarem el numerador i denominador i tatxarem els factors en comú.

Exercici 1: Pg 57 n^o 38. *Simplificar les fraccions*

Solució.

a) $\dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \dfrac{\cancel{x}\cdot(x+1)}{\cancel{x}\cdot(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}$

Primer factoritzem numerador i denominador trobant les arrels:

$$x^2-x-20=0 \longrightarrow x=-4,\ x=5$$
$$x^2-25=0 \longrightarrow x=\pm 5$$

Per tant tenim

$$\frac{x^2-x-20}{x^2-25}=\frac{(x+4)\cdot\cancel{(x-5)}}{(x+5)\cdot\cancel{(x-5)}}=\frac{x+4}{x+5}$$

c)

$$\frac{x^3+4x^2-3x-18}{x^2+6x+9}$$

El denominador es veu a vista que és una identitat notable $(x+3)^2=x^2+6x+9$. *Sinó, en trobem les arrels amb la fórmula i surten* $x=-3$ *i* $x=-3$ *(la mateix a dues vegades). Com* -3 *és un divisor de* -18*, provem si* $x=-3$ *també és una arrel del denominador; si no ho fos, ja no cal fer res més perquè no es podria simplificar res. Fent Ruffini obtenim*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -3 & -18 \\ -3 & & -3 & -3 & 18 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

I resulta que sí que és una arrel perquè el residu surt 0. *Per tant per ara tenim*

$$x^3+4x^2-3x-18=(x+3)\cdot(x^2+x-6)$$

Podem seguir factoritzant el quocient que ens ha quedat, tornant a provar amb -3 *per si encara es pogués simplificar més:*

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ -3 & & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

I resulta que sí, que -3 *torna a ser una arrel. Per tant, el denominador de la fracció desapareix i ens quedarà directament l'últim quocient que hem trobat:* $x-2$. *Per veure-ho més clar podem escriure*

$$\frac{x^3+4x^2-3x-18}{x^2+6x+9}=\frac{\cancel{(x+3)^2}\cdot(x-2)}{\cancel{(x+3)^2}}=x-2$$

d) Primer podem treure factor comú

$$\frac{x^4+5x^3+4x^2}{x^4+4x^3} = \frac{\cancel{x^2}\cdot(x^2+5x+4)}{x^{\cancel{3}}\cdot(x+4)} = \frac{x^2+5x+4}{x\cdot(x+4)}$$

Ara factoritzem el que queda per veure si hi ha algun factor comú. Trobem les arrels del factor de grau 2

$$x^2+5x+4=0 \longrightarrow x=-4 \text{ i } x=-1.$$

Per tant tenim

$$\frac{x^2+5x+4}{x(x+4)} = \frac{\cancel{(x+4)}\cdot(x+1)}{x\cdot\cancel{(x+4)}} = \frac{x+1}{x}$$

e)

$$\frac{x-8}{7x^2-54x-16}$$

El numerador no es pot reduir més. Factoritzem el denominador trobant-ne les arrels:

$$7x^2-54x-16=0 \Longrightarrow x=8 \text{ o } x=-\frac{2}{7}.$$

Ara alerta, perquè el coeficient de x^2 *del denominador no és* 1 *sinó* 7*. Per tant, haurem d'afegir un* 7 *multiplicant:*

$$\frac{x-8}{7x^2-54x-16} = \frac{\cancel{x-8}}{7\cdot(x+\frac{2}{7})\cdot\cancel{(x-8)}} = \frac{1}{7(x+\frac{2}{7})} = \frac{1}{7x+2}$$

f)

$$\frac{x^2+4x-60}{x^2-100}$$

Les arrels del numerador són $x=6$ *i* $x=-10$*, i les del denominador són* $x=10$ *i* $x=-10$*. Per tant tenim*

$$\frac{x^2+4x-60}{x^2-100} = \frac{(x-6)\cdot\cancel{(x+10)}}{(x-10)\cdot\cancel{(x+10)}} = \frac{x-6}{x+10}$$

2 Producte i divisió de fraccions algebraiques

El producte i divisió de fraccions algebraiques es fa exactament com el de les fraccions de nombres enters. Recordem el producte de fraccions es fa "en línia" (multiplicant numeradors i denominadors), i la divisió es fa en creu, és a dir, el numerador del divisor passa a multiplicar el denominador del dividend, i el denominador al numerador. Com amb les fraccions de nombres enters, a l'hora d'operar no és una bona estratègia multiplicar-ho tot i després simplificar, sinó que és molt millor factoritzar i simplificar d'entrada. Vegem un exemple, volem fer el següent producte:

$$\frac{14}{9}\cdot\frac{27}{49}=\frac{14\cdot 27}{9\cdot 49}$$

Ara, enlloc de fer els productes, el millor és factoritzar i simplificar allò que es pugui abans de fer els productes:

$$\frac{14\cdot 27}{9\cdot 49}=\frac{\cancel{7}\cdot 2\cdot 3^{\cancel{3}}}{\cancel{3^2}\cdot 7^{\cancel{2}}}=\frac{2\cdot 3}{7}=\frac{6}{7}$$

Doncs amb els polinomis farem exactament el mateix: factoritzem buscant-ne les arrels i després cancel·lem els factors que estiguin en comú al numerador i denominador.

Exercici 2: Pg 57 n^o 39. *Fer les operacions amb les fraccions algebriques.*

Solució.

a) $\frac{x^2-9x+14}{5x+2}\cdot\frac{5x+2}{x^2-49}=\frac{(x^2-9x+14)\cdot\cancel{(5x+2)}}{\cancel{(5x+2)}\cdot(x^2-49)}$ *Factoritzem els polinomis de grau :*

$$x^2-9x+14=0\Longrightarrow x=7\ o\ x=2$$
$$x^2-49=0\Longrightarrow x=\pm 7$$

i quedarà

$$\frac{x^2-9x+14}{x^2-49}=\frac{\cancel{(x-7)}\cdot(x-2)}{\cancel{(x-7)}\cdot(x+7)}=\frac{x-2}{x+7}$$

b)

$$\frac{x^2+6x+9}{x-11}:\frac{x+3}{x^2-19x+88}=\frac{(x^2+6x+9)\cdot(x^2-19x+88)}{(x-11)\cdot(x+3)}.$$

Per factoritzar, fixem-nos que $x^2+6x+9=(x+3)^2$*, ja que és una identitat notable. Sinó ens n'adonem, només cal trobar-ne les arrels i sortirar* $x=-3$ *dues vegades. Per tant aquesta part es cancel·larà amb l'*$(x+3)$ *del denominador. Com l'altre factor del numerador té números molt grossos i potser ens fa mandra fer els càlculs de la fórmula de grau 2, comprovem per Ruffini si* $x=11$ *és arrel:*

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -19 & 88 \\ 11 & & 11 & -88 \\ \hline & 1 & -8 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

I sí que ho és perquè el residu és 0*. Com Ruffini ens dóna el quocient, sabem què quedarà quan cancel·lem el factor* $(x-1)$*:*

$$\frac{(x+3)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(x-11)}\cdot(x-8)}{\cancel{(x-11)}\cdot\cancel{(x+3)}}=(x+3)\cdot(x-8)$$

c)

$$\frac{x^2+11x-12}{x^2-9x}\cdot\frac{x^2-4x-45}{x-1}\cdot\frac{x}{x^2+17x+60}=\frac{(x^2+11x-12)\cdot(x^2-4x-45)\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x^2+17x+60)}$$

on l'únic que hem fet ha estat ajuntar les fraccions en una de sola, treure factor comú a x^2-9x *i cancel·lar-la. Ara caldria factoritzar per veure si podem simplificar. Trobem les arrels dels polinomis de grau 2:*

$$\begin{aligned} x^2+11x-12=0 &\Longrightarrow x=-12 \text{ } i \text{ } x=1 \\ x^2-4x-45=0 &\Longrightarrow x=9 \text{ } i \text{ } x=-5 \\ x^2+17x+60=0 &\Longrightarrow x=-12 \text{ } i \text{ } x=-5 \end{aligned}$$

per tant quedarà

$$\frac{\cancel{(x+12)}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-9)}\cdot\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x-9)}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x+12)}\cdot\cancel{(x+5)}}=1$$

3 Sumes i restes

Com amb les fraccions de nombres enters, les fraccions de polinomis (fraccions algebraiques) només es poden sumar i restar si tenen el mateix denominador. Per tant, haurem de multiplicar numeradors i denominadors de les fraccions "hàbilment" per tal d'aconseguir el mateix denominador. Una estratègia pot ser multiplicar tot els denominadors a sac entre si, però probablement ens quedarà un polinomin de grau massa alt i els càlculs es faran molt farragosos. Optarem doncs per aconseguir un denominador "el més petit possible" (altrament anomenat, mínim comú múltiple dels denominadors). Ho farem factoritzant i afegint els factors que faltin per igualar els denominadors.
Vegem un exemple de com funciona amb les fraccions de nombres enters. Imaginem que volem sumar les fraccions

$$\frac{3}{14}+\frac{5}{21}+\frac{2}{6}$$

Per tal d'aconseguir el mateix denominador podríem escollir $14\cdot 21\cdot 6$. Però aquest nombre és bastant elevat i els càlculs, tot i fer-los amb calculadora, es faran farragosos perquè després haurem de simplificar la fracció resultat. No obstant, si factoritzem els denominadors, potser trobem factors en comú que podem aprofitar:

$$\frac{3}{14}+\frac{5}{21}-\frac{5}{6}=\frac{3}{2\cdot 7}+\frac{5}{3\cdot 7}+\frac{5}{2\cdot 3}$$

Ara només caldria afegir els factors que calguin per tal de tenir el mateix denominador. Al primer li afegim un 3, al segon un 2 i al tercer un 7 per tal de tenir el denominador $2\cdot 3\cdot 7$. Per tant quedarà:

$$\frac{3}{2\cdot 7}+\frac{5}{3\cdot 7}+\frac{5}{2\cdot 3}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 7\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{3\cdot 7\cdot 2}+\frac{5\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{9+10+35}{2\cdot 3\cdot 7}$$

$$=\frac{54}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{\cancel{2}\cdot 3^{\cancelto{2}{3}}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 7}=\frac{9}{7}$$

Doncs, en cas te tenir fraccions de polinomis farem exactament el mateix a l'hora de sumar i restar; factoritzem els denominadors i els completem afegint el mínim possible de factors per tal de tenir el mateix denominador i poder sumar. Sempre intentarem treballar amb els polinomis factoritzats per tal de simplificar el que es pugui abans de desfer els parèntesis.

Exercici 3: Pg 57 n^o 41. *Fer les sumes i restes*

Solució.

a)

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

Trobant les arrels (o bé observant que es tracta d'una identitat notable, diferència de quadrats) trobem que

$$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$$

Com aquests docs factors són precisament els altres dos denominadors, només caldrà afegir $(x-1)$ al segon denominador i $(x+1)$ al tercer:

$$\frac{x^2-5x+4}{(x+1)\cdot(x-1)}+\frac{3\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}+\frac{2\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2-5x+4+3(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-\cancel{5x}+4+\cancel{3x}-3+\cancel{2x}+2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x^2+3}{(x+1)(x-1)}$$

Observeu que la fracció resultant no es pot siplificar, perquè ni $x=-1$ ni $x=1$ són arrels del numerador.

b) *Factoritzant obtenim*

$$x^2+10x+25=(x+5)^2,$$

ja sigui trobant-ne les arrels o bé observant que es tracta d'una identitat notable ($5^2=25$ i $2\cdot5=10$). Per tant tenim

$$\frac{4}{x+5}+\frac{2x+1}{x^2+10x+25}=\frac{4}{x+5}+\frac{2x+1}{(x+5)^2}.$$

Observem que al primer denominador només li falta el factor $(x+5)$ per ser el segon, per tant multipliquem i dividim la primera fraccio per $x+5$:

$$\frac{4\cdot(x+5)}{(x+5)^2}+\frac{2x+1}{(x+5)^2}=\frac{4x+20+2x+1}{(x+5)^2}=\frac{6x+21}{(x+5)^2}$$

Observeu que la fracció resultant no es pot siplificar, perquè $x=-5$ no és arrel del numerador.