

Projecte de Fi de Carrera
Enginyer Industrial

Aplicació de la teoria del promig a convertidors de potència

MEMÒRIA

Autor : Albert Granados Corsellas
Director : Enric Fossas Colet
Convocatòria : Desembre 2007 (pla 96)



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resum

La Teoria del Promig ha estat un mètode d'aplicació clàssica pel disseny del control de sistemes periòdics, en particular pel disseny de circuits electrònics basats en modulació d'amplada de polsos (PWM).

A la segona meitat del segle XX es van justificar rigorosament els mètodes que ja feia anys que s'aplicaven, permetent així, arribat el moment, el seu ús a convertidors de potència en llaç obert.

Malgrat existeixen resultats més moderns que permeten l'aplicació del promig en el cas de llaç tancat, aquests només garenteixen parcialment el que els resultats clàssics aconseguixen, com per exemple estabilitat i proximitat de solucions. Ara bé, l'existència d'òrbites periòdiques estables, que és de vital importància, no és garantida.

No obstant, el resultat de les simulacions fa pensar que, certament, els resultats clàssics de la Teoria del Promig són aplicables, gairebé en la seva totalitat, a sistemes com els que s'obtenen en modelar convertidors de potència regulats per modulació d'amplada de polsos.

En aquest projecte es presenta un anàlisi relativament profund dels resultats clàssics de la Teoria del Promig. S'enfatitza sobre qüestions de vital importància i que sovint creen confusió, com ara relacionar les solucions del sistema promitjat amb les solucions promitjades del sistema original. Es donen també condicions suficients perquè així sigui. S'apliquen els Teoremes i resultats clàssics al disseny en llaç obert de convertidors de potència. S'apliquen també al cas de llaç tancat, amb el recolzament dels pocs resultats existents, i es reconduïx el problema de l'existència d'òrbites periòdiques a un altre problema, també obert, però més general. Finalment, es donen simulacions que justifiquen aquests resultats.



Índex

Resum	1
Índex	3
Glossari	5
1 Introducció	7
1.1 Objectius del projecte	7
1.2 Abast del projecte	7
2 Teoria del promig: alguns resultats	9
2.1 Introducció	9
2.2 Definicions prèvies	10
2.3 Promig Clàssic	12
2.4 Promig General	21
3 Aplicació del promig al control de sistemes de la forma $\dot{x} = Ax + bh$ no autònoms i discontinus	27
3.1 Introducció	27
3.2 Sistema d'equacions: la funció h	28
3.3 Aplicació del promig	28
3.4 Disseny en llaç obert	30
3.5 Promig General en llaç obert	32
3.6 Disseny en llaç tancat	34
4 Òrbites periòdiques en llaç tancat per a sistemes de la forma $\dot{x} = Ax + bh$	37
4.1 Introducció	37
4.2 Extensions del promig per a sistemes de la forma $\dot{x} = Ax + bh$	38
4.3 Aproximació del sistema original per sistemes de Lipschitz en x	41

4.3.1	Aproximació de la funció graó per funcions de Lipschitz	41
4.3.2	Successió d'òrbites periòdiques	42
5	Aplicació del promig per un convertidor Buck	45
5.1	Introducció	45
5.2	Equacions del sistema	46
5.3	Control en llaç obert	47
5.4	Control en llaç tancat	47
5.5	Òrbites periòdiques en llaç tancat	49
6	Pressupost i impacte ambiental	57
6.1	Recursos humans	57
6.2	Recursos materials	57
6.3	Resum de costos	58
6.4	Impacte Ambiental	58
	Conclusions i futur treball	59
	Agraïments	61
A	Promig General a sistemes de la forma $\dot{x} = \epsilon(Ax + bh)$	63
A.1	Obtenció de les funcions $G_i(y)$	63
A.2	Càlcul de $\Psi_1(y, t)$ per a sistemes de la forma $\dot{x} = \epsilon(Ax + bh)$	65
B	Demostració del Teorema del promig pel cas de llaç tancat	67
B.1	Lemes previs	67
B.2	Demostració del Teorema	68
C	Aproximació del sistema original per sistemes de Lipschitz	71
C.1	Càlcul del promig del sistema ϵf_δ	71
C.2	Fita de $\frac{\partial f_\delta}{\partial x}$	72



Glossari

Termes matemàtics generals

Compacte: Un conjunt A és compacte si per a cada recobriment obert n'existeix un subrecobriment finit. Equivalentment, si A pertany a un espai euclidià, A és compacte si és tancat i fitat.

Conjunt obert: Un conjunt U contingut en un espai mètric és obert si per a cada $x \in U$ existeix un $\epsilon > 0$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ implica que $y \in U$.

Difeomorfisme: Una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és un C^k -difeomorfisme si ella i la seva inversa són funcions C^k .

Entorn: Un entorn d'un punt x és un conjunt U que conté x al seu interior.

Funció C^k : Es diu que una funció és C^k si és k vegades diferenciable.

Global: Aquest terme s'aplica a propietats que no poden ser aplicades a entorns d'un punt arbitràriament petits.

Interior: L'interior d'un conjunt A és el conjunt obert més gran contingut a A .

Local: Una propietat és local si pot ser aplicada en un entorn arbitràriament petit d'un punt.

Mesura: Una mesura μ en un conjunt A és una funció contablement additiva i no negativa definida en una σ -àlgebra de subconjunts de A .

Vector propi: Un vector v és un vector propi d'una matriu A $n \times n$ si existeix $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Av = \lambda v$. λ s'anomena *valor propi* del vector propi v .

Varietat: Una varietat n -dimensional $M \subset \mathbb{R}^N$ és un conjunt tal que cada punt $x \in M$ té un entorn U pel qual existeix un difeomorfisme $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ ($n < N$).

Notació usual

$(f_\delta)_\delta$	Successió de funcions.
$Df(x_0), Df _{x=x_0}$	Diferencial d' f avaluada a x_0 .
$\frac{\partial f}{\partial x}, D_1f(x, t), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	Derivades parcials d' f .
$\frac{\partial f}{\partial x} \Big _{x=x_0}$	Derivada parcial d' f respecte x avaluada en x_0 .
$\dot{x}, \frac{dx}{dt}$	Derivades d' x .
z_s, x^*	Punt hiperbòlic.
$x^*(t)$	Òrbita periòdica.
\bar{f}, G, G_1	Promig temporal de la funció f .
G_i	Promig temporal d'ordre i d'un cert sistema.
Ψ_i	Rissat d'ordre i d'un cert sistema.
$O(\epsilon)$	Ordre ϵ .
$t \sim 1/\delta(\epsilon)$	Temps d'ordre o escala $\delta^{-1}(\epsilon)$.
$ \cdot $	Norma euclidiana.
$W^s, W^u, W_{loc}^s, W_{loc}^u$	Subespais (subvarietats) estables i inestables globals i locals.
I	Matriu identitat.
\cap	Intersecció.
\cup	Unió.
\in	Membre de.
\forall	Per tot.
$:=$	Definició.
\ll	Molt més petit.



Capítol 1

Introducció

1.1 Objectius del projecte

En general, l'anomenat disseny en llaç tancat o realimentació en funció de les variables d'estat és de vital importància en enginyeria, ja que permet un control més acurat d'un sistema que el disseny en llaç obert.

Tot i que s'ha fet des de fa molts anys, els resultats clàssics de la Teoria del Promig no són aplicables al disseny de convertidors de potència regulats per modulació d'amplada de polsos en llaç tancat, perquè el sistema esdevé discontinu en les variables d'estat. L'objectiu d'aquest projecte consisteix en la investigació de la literatura existent per tal d'esbrinar condicions, si és que existeixen, en les quals l'aplicació del promig a convertidors de potència, tant en llaç obert com en llaç tancat, dóna garanties sobre el seu comportament, i quines són aquestes.

1.2 Abast del projecte

L'abast d'aquest projecte consisteix en l'aportació d'arguments, basats en proves numèriques, aproximacions analítiques i literatura existent, que justifiquen la sospita de l'existència d'òrbites periòdiques del sistema original en llaç tancat quan el seu promitjat té un punt crític hiperbòlic estable. Així mateix, es donen possibles línies d'investigació futura per tal de provar la seva existència.

D'altra banda, s'analitza també l'aplicació del promig en llaç obert, relacionant les solucions del sistema promitjat amb els promitjos de les del sistema original.

Assumint l'existència d'òrbites periòdiques en llaç tancat, es veu clarament que aquestes no oscil·len al voltant del punt crític del sistema promitjat, tant per les simulacions exposades com pels resultats analítics existents. Aquesta qüestió és vital en el disseny del control, doncs precisament un dels seus objectius és estacionar, potser amb un cert rissat, el sistema a un cert valor. Mitjançant l'ús del promig general, es discuteix com es pot aconseguir, calculant el promig de segon ordre, que el sistema en llaç tancat oscil·li al voltant d'un cert punt crític.



Capítol 2

Teoria del promig: alguns resultats

2.1 Introducció

Els inicis de la teoria del promig es remunten a la segona meitat del segle XVIII quan Laplace i Lagrange intentaven simplificar les equacions que obtenien en modelar el problema dels dos cossos o resoldre problemes de perturbacions al sistema solar.

La justificació dels seus mètodes es basava en pura intuïció, ja que no va ser fins a mitjans del segle XX quan, a la Unió Soviètica, Bogoliubov i Mitropolsky van començar a formalitzar el que ha esdevingut la teoria del promig.

En general, la teoria del promig pretén treure conclusions d'un sistema dinàmic, T -periòdic, no autònom i potser també no lineal però que varia “lentament” amb el temps, a partir d'un altre sistema anomenat promitjat del primer i que és autònom.

El fet de variar “lentament” es tradueix en l'existència d'un paràmetre petit, ϵ , que apareix a les equacions diferencials multiplicant el camp, és a dir, les equacions prenen la forma

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x), \quad \epsilon \ll 1,$$

i el seu sistema promitjat es defineix com

$$\dot{z} = \epsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(t, z) dt := \epsilon \bar{f}(z).$$

L'estudi de la relació d'ambdós sistemes es coneix com a promig clàssic, i el resultat bàsic conegut com Teorema del Promig diu, a grans trets, que, sota certes condicions, les solucions d'ambdós sistemes són, durant un cert temps, tan properes com es vulgui si ϵ és prou petit. A més, si el sistema promitjat posseeix un punt crític estable, aleshores el sistema original tindrà una òrbita periòdica estable que, tot i no tenir perquè

oscil·lar al voltant d'aquest punt, hi serà prou propera si ϵ és prou petit.

La demostració dels resultats obtinguts va donar lloc a una generalització del mètode, coneguda com a promig general, consistent en anar obtenint successius sistemes tot enviant la part no autònoma del sistema a ordres superiors del paràmetre ϵ , millorant així la relació entre l'original i el promitjat.

En aquest capítol es donen algunes definicions prèvies per tal de revisar amb detall els principals resultats existents en teoria del promig clàssic, i, finalment, s'exposa la teoria del promig general.

2.2 Definicions prèvies

Com ja s'ha comentat, la teoria del promig és aplicable a camps periòdics. Ara bé, gairebé tots els resultats es poden estendre a funcions *quasiperiòdiques*; així doncs serà necessari definir prèviament aquest concepte.

Definició 2.1. *Es diu que una funció és quasiperiòdica si es pot expressar com a suma de funcions periòdiques tals que almenys dos dels seus períodes són incommensurables, és a dir, tenen quocient irracional.*

Alguns resultats de proximitat entre les trajectòries solucions del sistema original i el promitjat són vàlides “durant un cert temps” anomenat *temps d'ordre* $1/\epsilon$, o, equivalentment, $t \sim 1/\epsilon$.

La següent definició formalitza aquest concepte.

Definició 2.2 (Temps d'escala $1/\delta(\epsilon)$). *Es diu que $\phi_\epsilon = O(\delta_0(\epsilon))$ quan $\epsilon \rightarrow 0$ en una escala de temps $\delta^{-1}(\epsilon)$ ($t \sim 1/\delta(\epsilon)$), si l'aproximació es manté per $0 \leq \delta(\epsilon)t \leq L$, essent L una constant independent d' ϵ .*

És de gran interès l'estudi de la relació entre les solucions del sistema original i el promitjat quan aquest últim té un punt crític (estable o no) no degenerat. Dit d'una altra manera, quan el sistema promitjat té un punt *hiperbòlic*.

Així, és necessària la següent

Definició 2.3 (Punt hiperbòlic). *Es diu que x_0 és un punt hiperbòlic d'un sistema $\dot{x} = f(x)$ si*

- $f(x_0) = 0$



- Tots els valors propis de la matriu $Df|_{x=x_0}$ tenen part real no nul·la.

En el marc de l'estudi de l'existència d'òrbites periòdiques d'un sistema a través del seu promitjat en la seva formulació més moderna, es requereixen els conceptes de *varietats estables*, tant d'un punt hiperbòlic com d'una òrbita periòdica. Les següents definicions estableixen aquests conceptes.

Definició 2.4 (Variatats estables d'un punt hiperbòlic). *Donats un sistema $\dot{x} = f(x)$ definit en un obert U i un punt hiperbòlic x_0 , es defineix el conjunt local estable de x_0 com*

$$W_{loc}^s(x_0) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow x_0 \text{ quan } t \rightarrow \infty, \text{ i } \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0\},$$

on $\phi_t(x)$ és el flux de f en x .

Anàlogament, es defineix el conjunt local inestable de x_0 com

$$W_{loc}^u(x_0) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow x_0 \text{ quan } t \rightarrow -\infty, \text{ i } \phi_t(x) \in U \forall t \leq 0\}.$$

Es defineixen els conjunts global estable i inestable de x_0 com

$$W^s(x_0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_0))$$

$$W^u(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(x_0)).$$

Es pot veure que els conjunts W_*^s i W_*^u són varietats, tan diferenciables com ho és $f(x)$.

Definició 2.5 (Variatat estable d'una òrbita tancada). *Sigui γ una òrbita tancada i $U \supset \gamma$ un obert. Aleshores, es defineix la varietat local estable de γ com*

$$W_{loc}^s(\gamma) = \{x \in U \text{ tal que } \text{dist}(\phi_t(x), \gamma) \rightarrow 0 \text{ quan } t \rightarrow \infty \text{ i } \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0\}.$$

Anàlogament al cas d'un punt fix es defineix la varietat global estable d'una òrbita γ , $W^s(\gamma)$.

Finalment, es demana sovint al camp f , per tal d'aplicar la teoria del promig, que sigui de *Lipschitz*. Així, la següent definició aclareix aquest concepte.

Definició 2.6. *Es diu que una funció f definida a D és de Lipschitz, o contínua en el sentit de Lipschitz, si existeix λ , anomenada constant de Lipschitz de f , tal que $\forall x', x'' \in D$*

$$|f(x') - f(x'')| \leq \lambda |x' - x''|.$$

Observació 2.1. *Que una funció sigui de Lipschitz és més restrictiu que demanar que sigui contínua però menys restrictiu que sigui derivable i aquesta sigui fitada.*



2.3 Promig Clàssic

Existeixen múltiples versions sobre el que s'anomena *Teorema del promig*, tot imposant diferents hipòtesis sobre el camp del sistema original, però tenint en comú resultats sobre les relacions d'ambdós sistemes, original i promitjat, pel que fa a estabilitat, proximitat de les seves solucions o existència d'òrbites periòdiques.

En primera instància, considerem un sistema d'equacions diferencials de la forma

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon), \quad (2.1)$$

on $x \in \mathbb{R}^n$ i $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, tot fent èmfasi en què el camp f pot dependre explícitament del paràmetre ϵ .

La majoria de resultats de la teoria del promig, en especial els de proximitat entre trajectòries dels sistemes original i promitjat, es basen en el fet que ϵ és un paràmetre petit, invocant sovint al límit quan $\epsilon \rightarrow 0$ i demanant alhora que f sigui fitada, de manera que ambdós sistemes seran més semblants quan ϵ sigui més petit i, per tant, més semblants quan el sistema tingui una variació respecte el temps més lenta.

Definim una primera versió del sistema promitjat del sistema (2.1) com

$$\dot{z} = \epsilon G(z) \quad (2.2)$$

on

$$G(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, z, 0) dt.$$

Un primer resultat degut a Sethna i Moran ([1]) és una variant de l'obtingut per Bogoliubov i Mitropolsky ([3]), i és el següent

Teorema 2.1 (Sethna-Moran i Bogoliubov-Mitropolsky [1]). *Considerem el sistema (2.1) i suposem que f està definida a*

$$B(K, \epsilon_0) = \{(t, x, \epsilon) : 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, -\infty < t < \infty, |x| \leq K\},$$

i compleix les condicions

(i) f i $\frac{\partial f}{\partial x}$ són fitades,

(ii) f és quasiperiòdica en t uniformement en x per a cada ϵ fixat.



Considerem també el sistema promitjat (2.2). Donats $\rho, \eta > 0$ tan petits com es vulgui, i $L > 0$ tan gran com es vulgui, existeix $\epsilon_1, 0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$, de manera que si $z(t)$ és una solució de (2.2) definida a $t \in [0, \infty)$, i $z(t)$ i el seu ρ -veïnatge romanen a $B(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq K\}$ per $t \geq 0$, aleshores, $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_1)$, es compleix

$$|x(t) - z(t)| < \eta \quad \forall t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right],$$

on $x(t)$ és la solució de (2.1) amb $x(0) = z(0) \in B(K)$.

Observació 2.2. Per gran que sigui L , aquest Teorema no assegura res sobre les solucions quan $t \rightarrow \infty$.

Així com aquest resultat dona condicions per obtenir certa proximitat entre les solucions d'ambdós sistemes, el següent, degut també a Sethna i Moran ([1]), que també és una variant d'un resultat de Bogoliubov i Mitropolsky ([3]), relaciona punts crítics de (2.2) amb òrbites periòdiques de (2.1) estenent l'interval de proximitat entre solucions d'ambdós sistemes a $[t_0, \infty)$.

Teorema 2.2 (Sethna-Moran i Bogoliubov-Mitropolsky [1]). Considerem el sistema (2.1) amb f complint les condicions del Teorema 2.1. Sigui z_0 una solució constant de (2.2) que, juntament amb el seu δ -veïnatge, romanen a $B(K)$. Si l'equació variacional de (2.2) respecte z_0 , és a dir

$$\dot{y} = \epsilon \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y=z_0} \cdot y, \quad (2.3)$$

té totes les arrels característiques amb part real negativa, aleshores, $\forall \sigma, 0 < \sigma < \delta$, existeix ϵ_2 , amb $0 < \epsilon_2 \leq \epsilon_0$, de manera que $\forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq \epsilon_2$, existeix una única òrbita quasiperiòdica $x^*(t, \epsilon)$ solució de (2.1), contínua en ϵ , verificant

1. $|x^*(t, \epsilon) - z_0| < \sigma, \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$,
2. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |x^*(t, \epsilon) - z_0| = 0$ uniformement en t .
3. Si $x(t)$ és una solució de (2.1) que per cert t_0 satisfà

$$|x(t_0) - z_0| < \sigma,$$

aleshores es poden trobar dues constants positives C i γ tals que

$$|x(t) - x^*(t, \epsilon)| \leq C e^{-\epsilon \gamma (t - t_0)}, \quad t \geq t_0.$$



Observació 2.3. *La constant σ es pot escollir arbitràriament petita, tot i que ϵ_2 vindrà donada per aquesta elecció.*

El següent resultat, degut a Sethna i Moran, dóna condicions suficients per tal que les solucions dels sistemes (2.1) i (2.2), amb les mateixes condicions inicials, romanguin tan a prop una de l'altra com es vulgui, per a cada valor de t i per a tot t .

Teorema 2.3 (Sethna i Moran [1]). *Sigui el sistema (2.1) amb f satisfent les condicions del Teorema 2.1. Suposem que l'equació variacional (2.3) associada a f té valors propis negatius.*

Sigui z_0 una solució constant de (2.2) de manera que ella i el seu δ -veïnatge romanguin a $B(K)$.

Siguin també $\rho > 0$ i $z(t)$ una solució de (2.2) tal que ella i el seu ρ -veïnatge romanguin a $B(K)$ per a tot $t \geq 0$ i complint $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_0$.

Aleshores, $\forall \eta > 0$ qualsevol, existeix ϵ^ , $0 < \epsilon^* \leq \epsilon_0$ tal que per tot ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$, la solució $x(t, \epsilon)$ de (2.1) que compleix $x(0, \epsilon) = z_0$ satisfà*

$$|x(t, \epsilon) - z(t)| < \eta \quad \forall t \in [0, \infty).$$

És més, existeix $x^(t, \epsilon)$ solució de (2.1), contínua en t i ϵ i quasiperiòdica en t , tal que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |x^*(t, \epsilon) - z_0| = 0$$

i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, \epsilon) - x^*(t, \epsilon)| = 0.$$

Observació 2.4. *El teorema no diu pas que l'òrbita periòdica oscil·li al voltant de z_0 .*

De l'anterior observació, es veu clarament la següent

Observació 2.5. *Les solucions del sistema promitjat no tenen perquè ser les solucions promitjades del sistema original.*

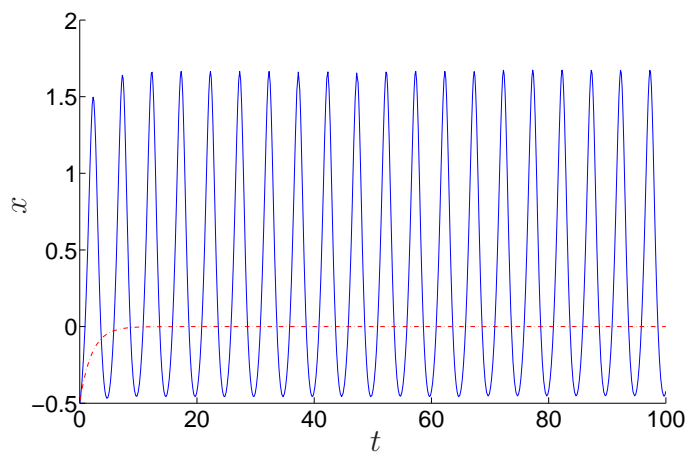
Exemple 2.1. Considerem el sistema no lineal, no autònom i T -periòdic en t

$$\dot{x} = \epsilon \left(ax + b(x + 2)^2 \cos \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \sin \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \right) := \epsilon f(t, x).$$

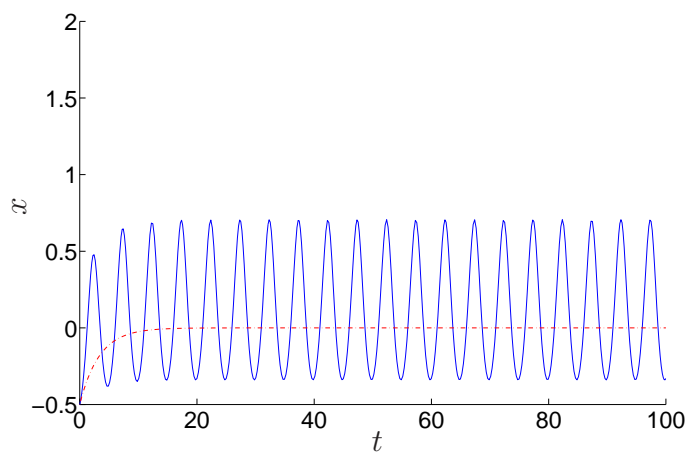
Si es calcula el promig de la funció $f(t, x)$, es té

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, z) dt = \int_0^T az dt + b(z + 2)^2 \int_0^T \cos \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \sin \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) dt = az.$$

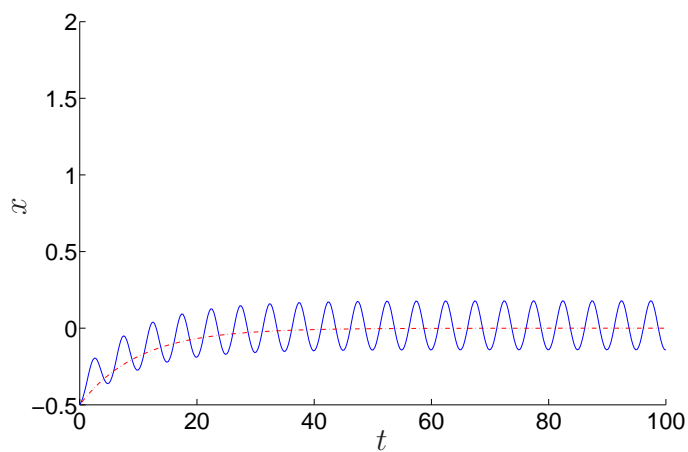




(a) $\epsilon = 0.5$



(b) $\epsilon = 0.3$



(c) $\epsilon = 0.1$

Figura 2.1: Simulacions del sistema per a diferents valors d' ϵ . $\cdot -$ sistema promitjat, $-$ sistema original.



Així doncs, el sistema promitjat pren la forma

$$\dot{z} = \epsilon az,$$

que té un punt crític en $z_0 = 0$ i és estable si $a < 0$.

A la Figura 2.1 es troben representades les solucions dels sistemes ϵf i $\epsilon \bar{f}$ amb condicions inicials $x(0) = z(0) = -0.5$, i valors dels paràmetres $a = -1$, $b = 0.1$ i $T = 10$. S'hi pot veure com el sistema original tendeix a una òrbita periòdica que tanca el punt crític z_0 però, per a valors alts d' ϵ , aquest no es troba al “centre” de l'òrbita.

En canvi, quan ϵ disminueix, l'òrbita periòdica tendeix a tancar-se cap a z_0 , tal com enuncia el Teorema.

De les anteriors reflexions es té també que les solucions del sistema original no són, en aquest cas, les promitjades del sistema promitjat.

El següent resultat és degut a Bogoliubov i Mitropolsky, i és del qual el Teorema 2.1 n'és la variació. La diferència roman primerament en què el resultat ja exposat és més restrictiu pel que fa a les condicions (i) i (ii), però en canvi és més general en el sentit que permet el camp f del sistema original dependre del paràmetre ϵ .

Així, considerem un nou sistema

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x) \tag{2.4}$$

en el que el camp f ja no depèn del paràmetre ϵ , i considerem també el seu sistema promitjat

$$\dot{z} = \epsilon G(z) \tag{2.5}$$

amb

$$G(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, z) dt.$$

Teorema 2.4 (Bogoliubov-Mitropolsky [3]). *Sigui el sistema (2.4) i el seu promitjat (2.5).*

Suposem que $f(t, x)$ compleix

- (i) *per algun domini D , f és fitada i de Lipschitz en x , és a dir, existeix λ tal que, per tot t i per qualsevol $x', x'' \in D$, es té*

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leq \lambda |x' - x''|.$$



(ii) $\forall x \in D$ existeix el límit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt = G(x),$$

aleshores, donats $\rho, \eta > 0$ tan petits com es vulgui i $L > 0$ tan gran com es vulgui, existeix ϵ_0 tal que si $z(t)$ és una solució de (2.5) de manera que ella i el seu ρ -veïnatge romanen a D , es compleix, per tot $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ i $t \in (0, \frac{L}{\epsilon})$,

$$|x(t) - z(t)| < \eta$$

on $x(t)$ és la solució de (2.4) tal que $x(0) = z(0)$.

El proper resultat és en el fons una recopilació dels resultats anteriors però, obtenint les mateixes conclusions transformant el sistema original mitjançant un canvi de variables en un altre en què la part no autònoma depèn d'ordres superiors del paràmetre ϵ . Aquesta visió obre les portes al que se'n diu promig general o mètode KBM, que consisteix en enviar la part no autònoma a ordres cada vegada superiors del paràmetre ϵ segons es va afinant el canvi de variables. Tot seguit veurem amb més detall aquesta qüestió; abans però, vegem el resultat.

Teorema 2.5 (Teorema del promig [4] p. 167). *Sigui el sistema (2.1). Sigui també el sistema*

$$\dot{z} = \epsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(z, t, 0) dt = \epsilon G(z)^1 \tag{2.6}$$

el seu promitjat autònom.

Suposem que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ és C^r , $r \geq 2$, fitada en un conjunt fitat B i T -periòdica en t . Aleshores, existeix un canvi de variables C^r de la forma

$$x = y + \epsilon \Psi(y, t, \epsilon) \tag{2.7}$$

tal que el sistema (2.1) es transforma en

$$\dot{y} = \epsilon G(y) + \epsilon^2 \tilde{G}(y, t, \epsilon), \tag{2.8}$$

on \tilde{G} és T -periòdica en t . És més,

(i) *Si $x(t)$ i $z(t)$ són solucions de (2.1) i (2.6) respectivament, tals que $|x(0) - z(0)| = \mathcal{O}(\epsilon)$, aleshores $|x(t) - z(t)| = \mathcal{O}(\epsilon)$ amb $t \sim \frac{1}{\epsilon}$.*

¹La qüestió de la desaparició del límit es considerarà a continuació.



(ii) Si p_0 és un punt fix hiperbòlic de (2.6), aleshores existeix ϵ_0 tal que, $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$, (2.1) té una única òrbita periòdica hiperbòlica $\gamma_\epsilon = p_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ d'estabilitat igual al tipus d'estabilitat del punt p_0 .

(iii) Si $x^s(t) \in W^s(\gamma_\epsilon)$ és una solució de (2.1) pertanyent a la varietat estable de l'òrbita periòdica $\gamma_\epsilon = p_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$, $z^s(t) \in W^s(p_0)$ és una solució de (2.6) pertanyent a la varietat estable del punt fix hiperbòlic p_0 i $|x^s(0) - z^s(0)| = \mathcal{O}(\epsilon)$, aleshores $|x^s(t) - z^s(t)| = \mathcal{O}(\epsilon)$ per $t \in [0, \infty)$.

Observació 2.6. La diferència entre els sistemes promitjats (2.2) i (2.6), que consisteix en que al segon no hi apareix el límit quan $T \rightarrow \infty$, es deu a que, si es demana que el camp f sigui T -periòdic, aleshores es compleix

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma} \int_0^\Gamma f dt = \frac{1}{T} \int_0^T f dt.$$

Tal com s'ha dit, el canvi de variables utilitzat a l'anterior Teorema obre les portes al promig general; així doncs és interessant veure la demostració del punt i)². A tal efecte serà necessària la següent versió del Lema de Gronwall

Lema 2.1 ([7] p. 37). Si u, v i $c \geq 0$ a $[0, t]$, c és diferenciable i

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds,$$

aleshores

$$v(t) \leq c(0) \exp\left(\int_0^t u(s)ds\right) + \int_0^t c'(s) \left[\exp\left(\int_s^t u(\tau)d\tau\right)\right] ds.$$

Demostració. (Del punt i) del Teorema 2.5) El primer pas de la prova consisteix en aplicar el canvi de variables explícitament. Separem primer el camp f en el seu promig, $\bar{f}(= G)$, més una part oscil·lant, \tilde{f} ,

$$f(x, t, \epsilon) = \bar{f}(x) + \tilde{f}(x, t, \epsilon). \tag{2.9}$$

Segui

$$x = y + \epsilon \Psi(y, t, \epsilon) \tag{2.10}$$

sense escollir encara la funció Ψ . Diferenciant (2.10) i fent servir (2.6) i (2.9) es té

$$[I + \epsilon D_y \Psi] \dot{y} = \dot{x} - \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} =$$

²Per a una demostració completa del Teorema vegi's [4].



$$= \epsilon \bar{f}(y + \epsilon \Psi) + \epsilon \tilde{f}(y + \epsilon \Psi, t, \epsilon) - \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

o

$$\dot{y} = \epsilon [I + \epsilon D_y \Psi]^{-1} \left[\bar{f}(y + \epsilon \Psi) + \tilde{f}(y + \epsilon \Psi, t, \epsilon) - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right]. \quad (2.11)$$

Expandint (2.11) en potències d' ϵ i escollint Ψ de manera que

$$\frac{\partial \Psi(y, t, 0)}{\partial t} = \tilde{f}(y, t, 0),$$

s'obté

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon \bar{f}(y) + \epsilon^2 \left[D_y f(y, t, 0) \Psi(y, t, 0) - D_y \Psi(y, t, 0) \bar{f}(y) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \epsilon}(y, t, 0) \right] + O(\epsilon^3) := \\ &:= \epsilon G(y) + \epsilon^2 \tilde{G}(y, t, \epsilon), \end{aligned}$$

com s'enunciava.

Considerem ara les equacions (2.6) i (2.8). Integrant i restant s'obté

$$\begin{aligned} y_\epsilon(t) - z(t) &= y_{\epsilon 0} - z_0 + \epsilon \int_0^t [G(y_\epsilon(s)) - G(z(s))] ds + \\ &+ \epsilon^2 \int_0^t \tilde{G}(y_\epsilon(s), s, \epsilon) ds, \end{aligned}$$

on $y_\epsilon(t)$ és una solució de (2.8) tal que $y_\epsilon(0) = y_{\epsilon 0}$. Dient $y_\epsilon - z = \zeta$, L la constant de Lipschitz de G i C el valor màxim de \tilde{G} a B , es té

$$|\zeta(t)| \leq |\zeta(0)| + \epsilon L \int_0^t |\zeta(s)| ds + \epsilon^2 C t.$$

Aplicant ara el Lema 2.1 amb $c(t) = |\zeta(0)| + \epsilon^2 C t$ i $u(s) = \epsilon L$, es té

$$\begin{aligned} |\zeta(t)| &\leq |\zeta(0)| e^{\epsilon L t} + \epsilon^2 C \int_0^t e^{\epsilon L(t-s)} ds \leq \\ &\leq \left[|\zeta(0)| + \frac{\epsilon C}{L} \right] e^{\epsilon L t}. \end{aligned}$$

Així, si $|y_{\epsilon 0} - z_0| = O(\epsilon)$, es conclou que $|y_\epsilon(t) - z(t)| = O(\epsilon)$ per a $t \in [0, 1/\epsilon L]$.

Finalment, fent servir la transformació (2.10) es té

$$|x(t) - y(t)| = \epsilon \Psi(y_\epsilon, t, \epsilon) = O(\epsilon)$$

i, fent servir la desigualtat triangular,

$$|x(t) - z(t)| \leq |x(t) - y_\epsilon(t)| + |y_\epsilon(t) - z(t)| = O(\epsilon)$$

per una escala de temps $t \sim 1/\epsilon$.

□



La visió de l'obtenció d'un nou sistema ϵ proper al promitjat a partir d'un canvi de variables, a més d'obrir les portes al promig general o d'ordres superiors, pot ajudar a la comprensió de les observacions 2.4 i 2.5, és a dir, el per què les òrbites periòdiques del sistema original no tenen perquè oscil·lar al voltant del punt crític del sistema promitjat. Vegem-ho.

Considerant novament el sistema

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x), \quad (2.12)$$

com s'ha vist, si s'hi aplica el canvi

$$x = y + \Psi(t, y, \epsilon), \quad (2.13)$$

els sistema esdevé

$$\dot{y} = \epsilon G(y) + \tilde{G}(t, y, \epsilon), \quad (2.14)$$

on $G = \bar{f}$ i $\tilde{G} = O(\epsilon^2)$.

Si d'altra banda es considera el sistema promitjat

$$\dot{z} = \epsilon G(z), \quad (2.15)$$

aquest és ϵ proper al sistema (2.14). Segons el Teorema 2.5, si el sistema promitjat (2.15) té un punt hiperbòlic estable z_s , aleshores els sistemes (2.12) i (2.14) tenen una òrbita periòdica estable ϵ propera a z_s . Ara bé, que z_s sigui un punt fix del sistema promitjat no vol dir que també ho sigui de (2.14), ja que ambdós sistemes difereixen en termes d' ϵ^2 .

Si considerem que

$$y^*(t) = z_s + O(\epsilon)$$

és l'òrbita periòdica de (2.14), en substituir aquesta expressió al canvi de variables (2.13) es té l'equació de l'òrbita periòdica del sistema original

$$\begin{aligned} x^*(t) &= y^*(t) + \epsilon \Psi(t, y^*(t), \epsilon) = \\ &= z_s + O(\epsilon) + \Psi(t, y^*(t), \epsilon). \end{aligned}$$

Tot i que la funció Ψ es pot escollir de manera que tingui promig nul, els termes d'ordre ϵ provinents de l'òrbita periòdica $y^*(t)$ no tenen perquè tenir-ne. Així, l'òrbita $x^*(t)$ no té perquè oscil·lar al voltant de z_s , o almenys no té perquè ser-hi centrada.

No obstant, estenent el canvi de variables (2.13) es pot obtenir un sistema promitjat autònom d'ordres superiors amb punts crítics més centrats a les òrbites periòdiques del sistema original. La següent secció va orientada a aquesta qüestió.



2.4 Promig General

Existeix una generalització al sistema promitjat d'un cert sistema que consisteix en obtenir-ne successives aproximacions a base de successius promitjos. Vegem-lo.

La clau de la demostració del Teorema (2.5) rau en el fet que la diferència entre el sistema original havent efectuat el canvi de variables (2.8) i el sistema promitjat (2.6) és de l'ordre de ϵ^2 .

Atès que en principi ϵ és un paràmetre petit, el canvi de variables (2.7) consisteix en escriure la variable x com y més un cert rissat $\epsilon\Psi(y, t, \epsilon)$. Ara, si aquest rissat es desglossa en potències d' ϵ fins a un cert ordre n

$$\epsilon\Psi(y, t, \epsilon) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(y, t, \epsilon)\epsilon^i + \tilde{\Psi}(y, t, \epsilon),$$

quedant

$$x = y + \sum_{i=1}^n \Psi_i(y, t, \epsilon)\epsilon^i + \tilde{\Psi}(y, t, \epsilon), \quad (2.16)$$

on $\tilde{\Psi}(y, t, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$, es pot obtenir una aproximació d'aquest rissat fins a ordre ϵ^n , i, a més, la part no autònoma del sistema original és d'ordre superior a ϵ^n , és a dir

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^n \epsilon^i G_i(y) + \tilde{G}(y, t, \epsilon), \quad (2.17)$$

amb $\tilde{G}(y, t, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$.

Vegem-ne el desenvolupament pel cas $n = 2$, on, per simplicitat de càlculs, suposem que el camp f no depèn d' ϵ .

Considerem doncs el canvi de variables

$$x = y + \epsilon\Psi_1(y, t) + \epsilon^2\Psi_2(y, t) + \tilde{\Psi}(y, t, \epsilon) \quad (2.18)$$

amb $\tilde{\Psi}(y, t) = \mathcal{O}(\epsilon^3)$. Per tal d'aplicar aquest canvi a

$$\dot{x} = \epsilon f(x, t), \quad (2.19)$$

derivem respecte t l'expressió (2.18) obtenint

$$\dot{x} = \dot{y} + \epsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \dot{y} +$$



$$\begin{aligned}
& +\epsilon^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \dot{y} + \mathcal{O}(\epsilon^3) = \\
& = \epsilon f(y + \epsilon \Psi_1 + \epsilon^2 \Psi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), t)
\end{aligned}$$

on a l'última igualtat s'ha fet servir (2.19) i (2.18).

Ara, desenvolupant en sèrie de potències al voltant d' $\epsilon = 0$ la banda dreta de l'última igualtat fins a ordre 2, s'obté

$$\epsilon f(y + \epsilon \Psi_1 + \epsilon^2 \Psi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), t) = \epsilon [f(y, t) + \epsilon D_1 f(y, t) \Psi_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)].$$

Ara, fent servir les dues últimes igualtats, es té

$$\dot{y} = \left[I + \epsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right]^{-1} \left[\epsilon f(y, t) - \epsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \epsilon^2 D_1 f(y, t) \Psi_1 - \epsilon^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right].$$

Agafant els coeficients de les potències d' ϵ i fent servir que

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

al voltant d' $x = 0$, s'obté, considerant $x = \epsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}$,

$$\epsilon^0 : 0$$

$$\epsilon^1 : f(y, t) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}$$

$$\epsilon^2 : -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} f(y, t) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + D_1 f(y, t) \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}.$$

Abans d'escollir les funcions Ψ_i , escrivim el camp f com la suma del seu promig respecte el temps i una certa funció dependent del temps, és a dir,

$$f(x, t) = \bar{f}(x) + \tilde{f}(x, t),$$

on $\bar{f}(y) = T^{-1} \int_0^T f(y, t) dt$. Si ara demanem a Ψ_1 que compleixi

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \tilde{f}(y, t),$$

els coeficients quedaran

$$\epsilon^1 : \bar{f}(y) + \tilde{f}(y, t) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \bar{f}(y) := G_1(y)$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 : & -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} [\bar{f}(y) + \tilde{f}(y, t)] + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \tilde{f}(y, t) + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \\
& = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \bar{f}(y) + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}
\end{aligned}$$



Ara, escrivint el terme $-\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \bar{f}(y) + \frac{\partial f(y,t)}{\partial y} \Psi_1 := \Gamma(y, t)$ com el seu promig respecte el temps més una certa funció dependent del temps

$$\Gamma(y, t) = \bar{\Gamma}(y) + \tilde{\Gamma}(y, t)$$

i escollint $\Psi_2(y, t)$ de manera que compleixi

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \tilde{\Gamma}(y, t),$$

el coeficient d' ϵ^2 queda

$$\epsilon^2 : \bar{\Gamma}(y) := G_2(y).$$

De la mateixa manera es poden anar trobant successives aproximacions $\Psi_i(y, t)$ i $G_i(y)$.

Un cop vist que el canvi (2.16) aplicat al sistema orginal el porta al sistema (2.17), a la pràctica pot ser útil fer servir l'expressió (2.17) al començament de la deducció anterior per tal de trobar les funcions $G_i(y)$ i $\Psi_i(y, t)$. Així, procedim de la següent manera. Derivant el canvi (2.16) s'obté, suposant que f no depèn d' ϵ ,

$$\dot{x} = \dot{y} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \dot{y} \right) \epsilon^i + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \dot{y}.$$

Ara, fent servir l'expressió (2.19) a la banda esquerra, l'expressió (2.17) a la dreta, i altra vegada el canvi de variables a la banda esquerra s'obté

$$\begin{aligned} \epsilon f \left(y + \sum_{i=1}^n \Psi_i \epsilon^i + \tilde{\Psi}, t \right) &= \sum_{i=1}^n G_i \epsilon^i + \tilde{G} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n G_i \epsilon^i + \tilde{G} \right) \right) \epsilon^i + \\ &+ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n G_i \epsilon^i + \tilde{G} \right). \end{aligned}$$

Finalment, desenvolupant f en sèrie de potències al voltant d' $\epsilon = 0$, igualant coeficients i tenint en compte que $\tilde{\Psi}$ i \tilde{G} són de l'ordre ϵ^{n+1} , s'obtenen les següents equacions, equivalents a les obtingudes anteriorment però sense tenir G_i aïllada

$$\epsilon : f(y, t) = G_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}$$

$$\epsilon^2 : D_1 f(y, t) \Psi_1 = G_2 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} G_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}$$

⋮



Ara, per tal d'aïllar G_i , fem servir que, atès que f és T -periòdica en t , les funcions Ψ_i també ho seran i, per tant, es complirà

$$\int_0^T \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} dt = 0,$$

integrant doncs les equacions anteriors de 0 a T , s'obté

$$\epsilon^1 : G_1(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t) dt$$

$$\epsilon^2 : G_2(y) = \frac{1}{T} \int_0^T D_1 f(y, t) \Psi_1 dt - \frac{G_1(y)}{T} \int_0^T \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} dt = \frac{1}{T} \int_0^T D_1 f(y, t) \Psi_1 dt,$$

on, a l'última igualtat s'ha fet servir que, si Ψ_1 té promig nul, aleshores $\int_0^T \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} dt = 0$.

Un cop trobada la funció $G_i(y)$, per tal de trobar la corresponent $\Psi_i(y, t)$ caldrà, tant si s'ha aplicat el canvi directament com si s'ha aprofitat l'expressió (2.17), integrar les expressions que s'obtenen d'igualar coeficients de potències d' ϵ . La constant d'integració s'escollirà de manera que es compleixi

$$\int_0^T \Psi_i(y, t) dt = 0$$

per tal que els promitjos de les variables x i y coincideixin.

Exemple 2.2. Tal com s'ha vist a l'exemple 2.1, l'òrbita periòdica del sistema

$$\dot{x} = \epsilon \left(ax + b(x + 2)^2 \cos \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \sin \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \right) := \epsilon f(t, x)$$

no està centrada al punt crític del seu sistema promitjat

$$\dot{z} = \epsilon az := \epsilon G_1(z).$$

El propòsit d'aquest exemple és veure com el promig de segon ordre pot millorar la proximitat entre el sistema original i el seu promitjat.

Com s'ha vist, si s'aplica el canvi de variables

$$x = y + \epsilon \Psi_1(t, y) + \tilde{\Psi}(t, y, \epsilon)$$

s'obté, menyspreant els termes d'ordre ϵ^3 , el sistema promitjat de segon ordre

$$\dot{z} = \epsilon G_1(z) + \epsilon^2 G_2(z).$$



Per tal de calcular G_2 , primer s'ha de calcular Ψ_1 . Mitjançant la relació $f = G_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}$, es té

$$\begin{aligned} \Psi_1(z, t) &= \int_0^t (f - G_1) dt = \\ &= -1/8 bT \left(-2z^2 - 8z - 8 + 2 \left(\cos \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \right)^2 z^2 + 8 \left(\cos \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \right)^2 z + \right. \\ &\quad \left. + 8 \left(\cos \left(2 \frac{\pi t}{T} \right) \right)^2 + Tz^2 + 4Tz + 4T \right) \pi^{-1}, \end{aligned}$$

on ja s'ha inclòs la constant d'integració necessària per tal que Ψ_1 tingui promig nul. Ara, per tal de calcular G_2 , només cal fer

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \Psi_1(z, t) dt = \\ &= \frac{bTa(4 + Tz^2 - z^2 - 4T)}{8\pi}. \end{aligned}$$

Un cop calculada G_2 , s'obté el sistema promitjat de segon ordre

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \epsilon G_1(z) + \epsilon^2 G_2(z) = \\ &= 1/8 \frac{\epsilon a (8z\pi - 4\epsilon bT^2 - \epsilon bTz^2 + \epsilon bT^2z^2 + 4\epsilon bT)}{\pi}, \end{aligned}$$

que té per punts crítics

$$\begin{aligned} z_1^* &= -2 \frac{2\pi - \sqrt{4\pi^2 + \epsilon^2 b^2 T^2 - 2\epsilon^2 b^2 T^3 + \epsilon^2 b^2 T^4}}{\epsilon bT(-1+T)} \\ z_2^* &= -2 \frac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + \epsilon^2 b^2 T^2 - 2\epsilon^2 b^2 T^3 + \epsilon^2 b^2 T^4}}{\epsilon bT(-1+T)}. \end{aligned}$$

Cal observar que els punts crítics del sistema promitjat de segon ordre depenen d' ϵ , ja que, en calcular les solucions de l'equació $0 = \epsilon G_1(z^*) + \epsilon^2 G_2(z^*)$, z^* depèn d' ϵ .

Fent servir els valors dels paràmetres utilitzats a l'exemple 2.1, z_1^* és estable i z_2^* no.

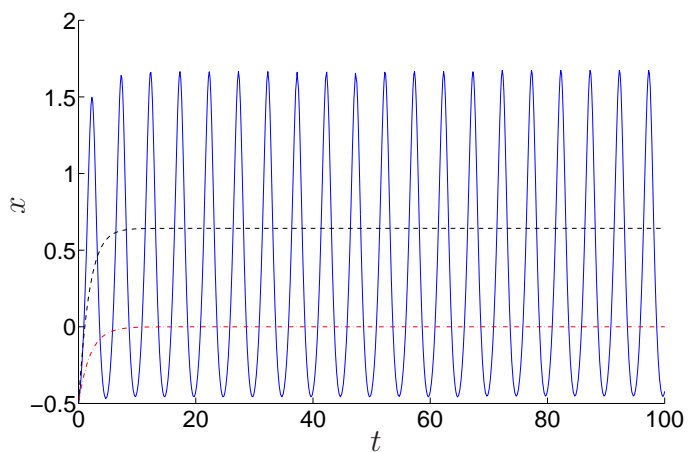
Els seus valors segons el valor del paràmetre ϵ són

ϵ	z_1^*	z_2^*
0.5	0.642324860	-6.227378466
0.3	0.411524856	-9.719947532
0.1	0.14251216	-28.06778020

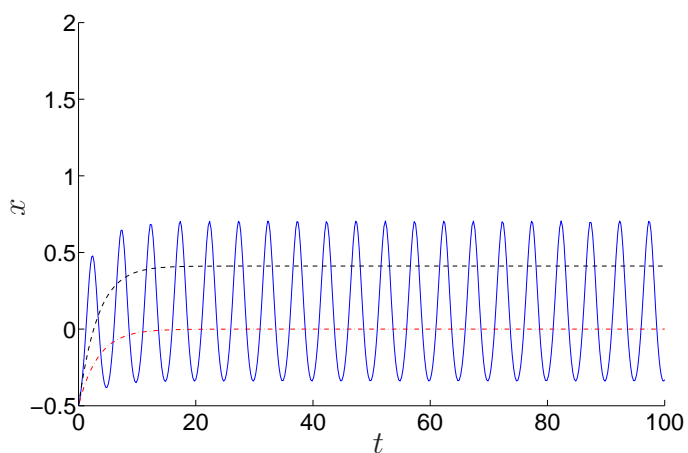
A la Figura 2.2 s'hi troben les solucions dels sistemes original, promitjat i promitjat de segon ordre pels mateixos valors dels paràmetres T , ϵ , a i b que a l'exemple 2.1.

S'hi pot observar com per a valors més alts d' ϵ el punt crític del sistema promitjat de segon ordre es troba més proper al centre de l'òrbita que el del sistema promitjat.

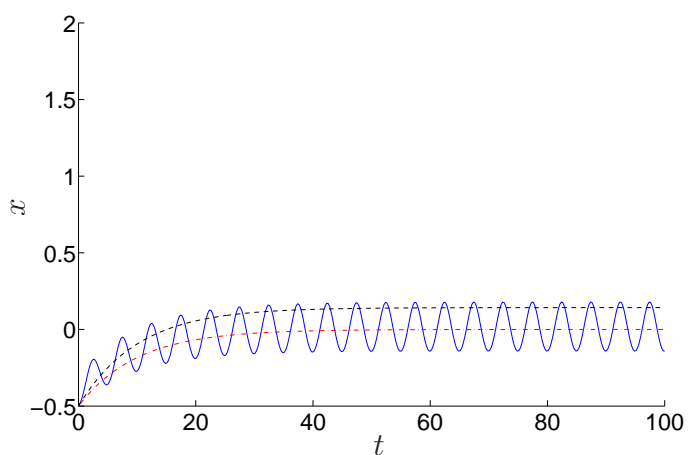




(a) $\epsilon = 0.5$



(b) $\epsilon = 0.3$



(c) $\epsilon = 0.1$

Figura 2.2: Solucions del sistemes original (—), promitjat ($\cdot -$) i promitjat de segon ordre (- -).



Capítol 3

Aplicació del promig al control de sistemes de la forma $\dot{x} = Ax + bh$ no autònoms i discontinus

3.1 Introducció

Molts convertidors de potència es regeixen per equacions diferencials de la forma

$$\dot{x} = Ax + bh(t, x; T), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

on $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ i $b \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ són matrius a coeficients constants, $x \in \mathbb{R}^n$ el vector de variables d'estat.

En general, la funció

$$h(t, x; T) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$$

és una funció binària, dependent del temps, de les variables d'estat i d'un paràmetre T , que representa el control sobre la porta d'un transistor de manera que, en el cas de tractar-se d'un convertidor, aquest roman tancat si $h = 1$, i obert en cas contrari.

La dificultat en el control d'aquests sistemes resideix, doncs, en aquesta dependència temporal i en la seva discontinuïtat, ja que no és possible aplicar-hi les tècniques de control clàssic lineal.

L'objectiu d'aquest capítol és veure com la teoria de promitjos pot ajudar al disseny d'un control per a sistemes d'aquesta forma, tant en llaç obert com en llaç tancat. Al capítol següent es veurà un exemple d'aplicació pel cas d'un convertidor Buck.

3.2 Sistema d'equacions: la funció h

El sistema (3.1) és gairebé lineal si no fos pel peculiar comportament de la funció h . Tal com s'ha avançat, aquesta és una funció binària que, en general, depèn del temps, de les variables d'estat i d'un paràmetre T .

A la pràctica, aquesta funció h s'implementa comparant dos senyals, de manera que $h = 0$ si la seva diferència és negativa, i $h = 1$ en cas contrari. Un d'aquests senyals sol ser una dent de serra de període T i pendent $\frac{1}{T}$, $tri(t; T) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, i l'altre és, en general, una funció que depèn de les variables d'estat

$$D(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1],$$

l'elecció de la qual consisteix precisament en el disseny del control del sistema (3.1).

Així, en el cas més general, la funció h es pot escriure analíticament de la següent manera

$$h(t, D(x); T) = u(D(x) - tri(t; T)),$$

on

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

i

$$tri(t; T) = \frac{t \bmod T}{T}.$$

A la figura 3.1 hi ha una representació gràfica d'aquestes funcions, on es veu com la funció h passa del valor 1 al zero en el moment en què $D(x) = tri(t; T)$.

3.3 Aplicació del promig

Per tal d'aplicar les eines i els resultats de la teoria del promig introduïdes al capítol 2, convé escriure les equacions del sistema en la forma requerida pel Teorema 2.1, és a dir, en la forma estàndard donada per l'equació (2.1).

A tal efecte, fent el canvi de variable $t = \alpha T \tau^1$ i anomenant $\epsilon = \alpha T$, el sistema (3.1) queda

$$\dot{x} = \epsilon (Ax + bh(\tau, D(x); \beta)) := \epsilon f(\tau, x), \quad (3.2)$$

¹El sentit del paràmetre α introduït es veurà més endavant.



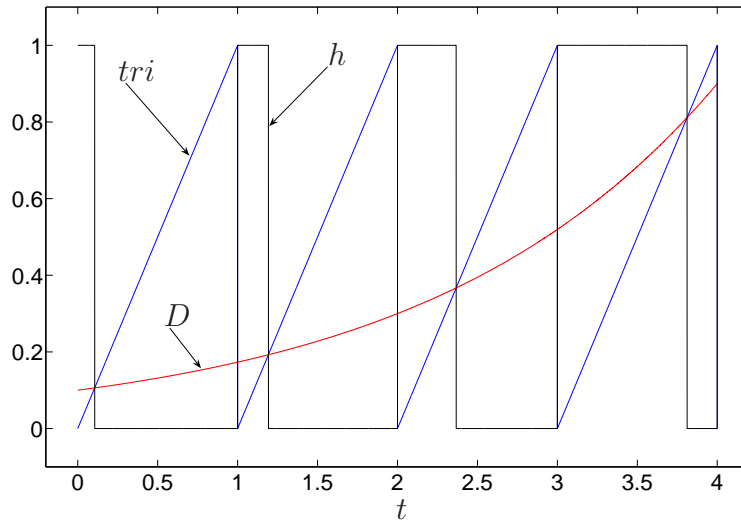


Figura 3.1: Funcions D , tri i h

on, a partir d'ara, la derivada temporal és respecte τ , i $\beta = \frac{1}{\alpha}$ és el període en temps τ de la dent de serra.

Fixem-nos que, que el camp f compleix les condicions (i) i (ii) del Teorema 2.1 en el cas que $D(x)$ no depengui de les variables d'estat x . Pel que fa a la condició (i), f només presenta discontinuïtats de salt i, per tant, és fitada en un conjunt fitat $B(K, \epsilon_0)$. En canvi, si la funció D depèn d' x , la parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ no és fitada en els punts en què la funció h fa el pas d'1 a 0, moment en què $D(x) = tri(\tau; \beta)$. Pel que fa a la condició (ii), es compleix ja que f és β -periòdica en τ .

Així, si $D(x)$ no depèn d' x , també compleix les condicions del Teorema 2.3 i les dels Teoremes 2.4 i 2.5, ja que f és de Lipschitz.

A més, cal esmentar que, com que la freqüència a la que s'obre i es tanca el transistor és elevada, ϵ serà un paràmetre petit, i, per tant, el fonament en què es basa la teoria del promig es compleix.

El motiu de les properes seccions és dissenyar un control, $D(x)$, per tal que el convertidor es comporti segons unes especificacions, segons si $D(x)$ és constant o no. En el primer cas, es considerarà que $D(x) = D \in \mathbb{R}$, cosa que portarà al que s'anomena disseny en llaç obert. En canvi, en el segon cas es considerarà que $D(x)$ depèn de les variables d'estat, tot portant al disseny en llaç tancat.



No obstant, a l'hora de trobar el sistema promitjat de (3.1), no cal diferenciar el cas en què D depèn d' x del cas en què D és constant, ja que, en aplicar l'operador promig definit a l'equació (2.6) i fer la integral, la variable x fa el paper de variable muda, encara que depengui del temps, amb el que es considera $D(x)$ com si fos una constant.

Així, el sistema promitjat del sistema original (3.1) queda, considerant que f és β -periòdica,

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta Az + bhd\tau = \\ &= \frac{1}{\beta} \left(\beta Az + bD(z) \underbrace{\int_0^\beta h(\tau, D(z); \beta) d\tau}_{I_1} \right) \\ I_1 &= \int_0^{D(z)\beta} 1d\tau + \int_{D(z)\beta}^\beta 0d\tau = D(z)\beta, \end{aligned}$$

doncs

$$G(z) = Az + bD(z)$$

i, per tant, el sistema promitjat queda

$$\dot{z} = \epsilon (Az + bD(z)),$$

tant si D depèn de les variables d'estat com si no.

Finalment cal esmentar que en fer la integral I_1 s'ha fet servir que les funcions $tri(\tau; \beta)$ i $D(z)$ es tallen, en el primer període, en temps $\tau = \beta D(z)$ i que només ho fan una vegada per període.

3.4 Disseny en llaç obert

En cas que el senyal amb què es compara la dent de serra sigui una funció constant entre 0 i 1, la forma d'ona de la funció h esdevé una ona quadrada que val 1 un cert temps T_s i zero la resta del període T , tal com mostra la figura 3.2. En ser la dent de serra de pendent $\frac{1}{T}$, la constant D representa el quocient entre el temps que l'interruptor roman tancat enfront del període de $tri(t; T)$, T , doncs $D = \frac{T_s}{T}$ i rep el nom de cicle de treball.



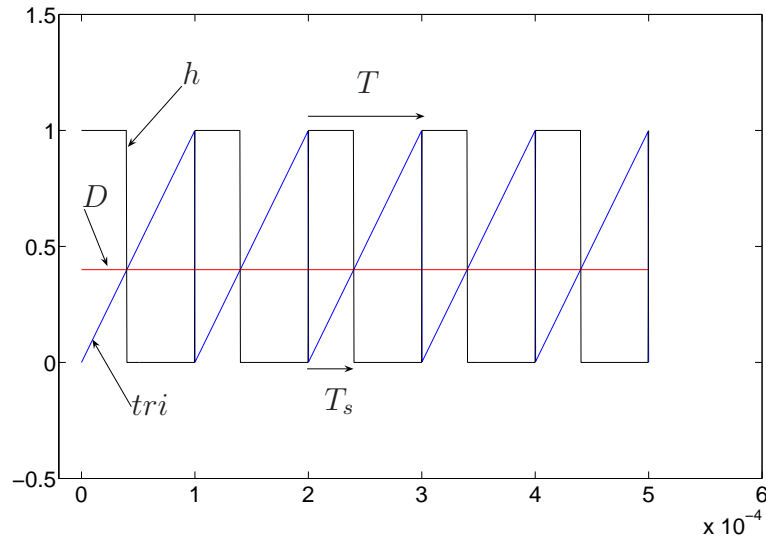


Figura 3.2: Funció de control del transistor $h(t, D; T)$, dent de serra $tri(t; T)$ i tensió D .

Per tal d'aplicar les tècniques de control clàssic, enlloc de treballar amb el sistema original (3.2), podem treballar amb el seu promitjat, ja que almenys aquest serà autònom. Abans però, cal remarcar que, en haver fet el canvi de variables temporal amb l'objectiu d'introduir el paràmetre ϵ , el període de la funció h serà $\beta = \frac{1}{\alpha}$, i, el temps en què $h = 1$, $D\beta$ enlloc de T_s .

Així, tal com s'ha vist, aplicant l'operador promig definit a l'equació (2.6)

$$G(z) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta f(\tau, z) d\tau = Az + bD$$

s'obté la versió promitjada de (3.1)

$$\dot{z} = \epsilon(Az + bD), \quad z_0 = x_0. \quad (3.3)$$

En ser el sistema promitjat lineal, és senzill trobar el valor de D per tal que aquest tingui un punt d'equilibri z^* de manera que qualsevol solució de (3.3) compleixi

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = z^*.$$

Ara, tal com diuen els Teoremes 2.3 i 2.5, existirà una òrbita periòdica, $x^*(\tau)$, solució de (3.2) tal que $\forall \eta > 0$

$$|x^*(\tau) - z^*| < \eta, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0(\eta)) \quad \forall \tau \geq 0.$$



A més, si $x(\tau)$ és una solució de (3.2) complint $x(0) = z^*$, aleshores

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |x(\tau) - x^*(\tau)| = 0.$$

Dit d'una altra manera, si z^* és un punt d'equilibri del sistema promitjat, existeix una òrbita periòdica del sistema original de manera que aquesta s'hi aproxima tant com es vulgui si ϵ és prou petit, i qualsevol solució $x(\tau)$ que compleixi $x(0) = z^*$ també ho farà.

Ara bé, cal recordar l'observació 2.4 segons la qual l'òrbita periòdica $x^*(\tau)$ no té perquè oscil·lar al voltant de z^* . No obstant, tal com veurem a la secció 3.5, això es compleix en el cas de llaç obert, doncs podrem afirmar que qualsevol solució, $x(\tau)$, del sistema original complint $x(0) = z^*$ tendeix a oscil·lar al voltant de z^* , i que el mòdul de les oscil·lacions tendeix a minvar segons $\epsilon \rightarrow 0$.

Així, si volem que el sistema (3.1) oscil·li al voltant d'un cert valor x^* , només cal demanar que x^* sigui un punt fix del sistema promitjat, és a dir,

$$\vec{0} = Ax^* + bD, \quad (3.4)$$

d'on es pot trobar el valor de D , D^* , que estaciona el sistema promitjat al valor desitjat x^* , i, per tant, al voltant del qual el sistema original oscil·larà.

Remarca: En el fons, l'equació (3.4) és un sistema sobredeterminat d' n equacions amb una sola incògnita, D^* . Per tal que sigui compatible, el que es fa és demanar que una de les variables d'estat estacioni a un cert valor. De l'equació (3.4) se'n poden treure els valors als que hauran de convergir la resta de variables més el valor D^* .

3.5 Promig General en llaç obert

D'altra banda, si ara apliquem el mètode del promig general o mètode KBM discutit a la secció 2.4, és a dir, aplicant a (3.2) el canvi de variables

$$x(\tau) = y(\tau) + \sum_{i=1}^n \Psi_i(y, \tau) \epsilon^i + \tilde{G}(y, \tau) \quad (3.5)$$

s'obté l'expressió no autònoma fins a ordre $n + 1$ del sistema original

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^n G_i(y) \epsilon^i + \tilde{G}(y, \tau), \quad (3.6)$$



on $G_1(y) = G(y)$ i, en aquest cas, com es pot veure a l'apèndix A.1, $G_i = 0 \forall i > 1$. Així, aplicant aquest canvi de variables, el sistema original es pot escriure de la forma

$$\dot{y} = \epsilon G(y) + \tilde{G}(y, \tau, \epsilon)$$

amb $\tilde{G} \sim \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$ i n tan gran com es vulgui. Per tant, com que

$$|y(\tau) - z(\tau)| \sim \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}),$$

es complirà que una solució del sistema original es podrà escriure com una del sistema promitjat més un cert rissat periòdic $\sum \epsilon^i \Psi_i$ de promig nul². Així doncs, si el sistema promitjat té un punt d'equilibri estable z^* , el sistema original tindrà una òrbita periòdica $x^*(t)$ del mateix tipus d'estabilitat, oscil·lant al voltant de z^* i complint

$$|x^*(t) - z^*| \sim \mathcal{O}(\epsilon)$$

per qualsevol ϵ . De fet, l'òrbita periòdica es podrà escriure com

$$x^*(t) = z^* + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \Psi_i(z^*, t) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}),$$

amb n tan gran com es vulgui. Tenint en compte que Ψ_i té promig nul, el promig de l'òrbita periòdica $x^*(t)$ és z^* . Així, del raonament anterior es té el següent

Corol·lari 3.1. *Si sigui $\dot{x} = \epsilon f(t, x)$ sistema periòdic amb f de Lipschitz en x . Si en calcular les funcions G_i es té $G_i(y) = 0 \forall i > 0$, i el sistema promitjat $\dot{z} = \epsilon G_1(z)$ té un punt hiperbòlic estable, z_0 , aleshores el sistema original té una òrbita periòdica estable, γ , amb promig z_0 , de manera que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\gamma - z_0| = 0.$$

Finalment, l'aproximació de primer ordre del rissat, $\Psi_1(y, \tau)$, és

$$\Psi_1(y, \tau) = \Psi_1(\tau) = b[\tau \bmod \beta(h - D) + D\beta(1 - h)] - \frac{bD\beta}{2}(1 - D),$$

el càlcul de la qual es troba a l'apèndix A.2.

²Cal recordar que les funcions Ψ_i s'escullen de manera que tinguin promig nul.



3.6 Disseny en llaç tancat

A les dues seccions anteriors s'ha vist com, donant un cert valor a D , és a dir, dissenyant en llaç obert, es poden establitzar les variables d'estat a un cert valor donat. Ara bé, hi ha altres aspectes del comportament d'un sistema que poden ser també crítics des d'un punt de vista d'aplicació en enginyeria, doncs pot ser també interessant controlar-los. El sobrepuig d'una tensió de sortida, que pot fer malbé components d'una instal·lació, la velocitat d'estacionament, la magnitud del rissat d'un senyal o fins i tot el fet d'estacionar una sortida a un cert valor, com s'ha fet abans, però d'una forma més robusta en poden ser exemples. Malauradament, aquests requeriments no es poden aconseguir amb el disseny en llaç obert, doncs és necessari fer que el valor de D variï, per exemple, amb el valor de les variables d'estat, donant lloc així al disseny en llaç tancat, és a dir, al disseny d'una funció $D(x)$ o llei de control.

En primera instància, com a exemple, ens proposem establitzar el sistema (3.2) a un cert valor x^* com a les seccions anteriors però fent servir una llei de control $D(x)$ i, per tant, amb una llei que reflexi un controlador proporcional n'hi haurà prou. Suposem doncs que $D(x)$ pren la forma

$$D(x) = D^* + k(x - x^*), \quad (3.7)$$

on $D^* \in \mathbb{R}$ i

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$$

són els paràmetres de disseny.

Cal tenir en compte, però, que la funció $D(x)$ segueix representant la fracció del període β en què l'interruptor roman tancat, per tant, haurà de complir a més $0 \leq D(x) \leq 1$. Fixem-nos que, si tot anés com es desitja, a mida que $x \rightarrow x^*$, $D(x) \rightarrow D^*$, doncs, en règim permanent, $D(x)$ tendeix a ser D^* vist a la secció 3.4.

Així, el sistema original en llaç tancat pren la forma més general, l'expressada per l'equació (3.2), que recordem per comoditat tot redefinint el camp com f_c

$$\dot{x} = \epsilon (Ax + bh(\tau, D(x); \beta)) := \epsilon f_c(\tau, x) \quad (3.8)$$

on

$$h(\tau, D(x); \beta) = u(D(x) - \text{tri}(\tau; \beta)).$$

Si s'intenta trobar el valor dels paràmetres k treballant directament amb el sistema original (3.2), altra vegada no serà immediat aplicar les tècniques de control clàssic,



ja que aquest sistema no és autònom i, a més, és discontinu. Per tant, es proposa el disseny sobre el sistema promitjat i aplicar la llei trobada al sistema original, tot i que, en aquest cas, el camp f_c no compleix totes les condicions requerides pels Teoremes del capítol 2, en particular les dels Teoremes 2.3 i 2.5 que s'han fet servir anteriorment, ja que, en dependre D d' x , la parcial $\frac{\partial f_c}{\partial x}$ no és fitada en els punts on h canvia el seu valor, i, amb més motiu, f_c no és de Lipschitz. No obstant, en aquest cas, per sistemes de la forma $\dot{x} = Ax + bh$ on apareixen discontinuïtats en x degudes a la funció graó, existeix una extensió de la teoria del promig que permet utilitzar el promitjat per tal de fer-ne el disseny del control. Aquests resultats es veuran en un capítol a part, al capítol 4, ja que mereixen una especial atenció.

Dit això, calculem-ne el sistema promitjat.

Igual que abans i, tal com hem vist a la secció 3.3, aplicant l'operador promig, obtenim

$$G_c(z) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta f_c(\tau, z) d\tau = Ay + bD(z), \quad (3.9)$$

doncs, el sistema promitjat pren la forma

$$\dot{z} = \epsilon(Az + bD(z)). \quad (3.10)$$

Substituint l'expressió (3.7) de $D(x)$ a l'equació (3.10) i dient

$$A_c = A + bk,$$

$$b_c = bD^* - bkx^*,$$

podem reescriure el sistema promitjat d'una manera més senzilla com

$$\dot{z} = \epsilon(A_c z + b_c). \quad (3.11)$$

Ara, per tal que el sistema original estacioni a un cert valor x^* , es pot pensar en imposar, seguint la inèrcia del cas en llaç obert, que el sistema promitjat tingui un punt fix en x^* . Tot i que la teoria garanteix l'existència d'una òrbita periòdica pel sistema original, com es veurà al capítol 4, aquesta no tindrà perquè oscil·lar al voltant d' x^* , com sí passava en el cas de llaç obert.

Com que el sistema original és lineal i autònom, per tal que x^* en sigui un punt d'equilibri, només cal demanar, fent servir l'expressió (3.10) del sistema promitjat,

$$\vec{0} = \epsilon(Ax^* + bD(x^*)) = \epsilon(Ax^* - bD^*). \quad (3.12)$$



Recordant la remarca feta al final de la secció 3.4, l'equació (3.12) és de fet un sistema d' n equacions lineals sobredeterminat, ja que l'única incògnita és D^* . Per tal d'assegurar-se que és compatible, el propòsit de demanar que $z \rightarrow x^*$, es pot canviar per sol·licitar que sigui només una component de z , z_i , qui compleixi $z_i \rightarrow x_i^*$, on x_i^* és la i -èssima component d' x^* . Així, l'equació (3.12) permetrà trobar quins valors hauran de tenir la resta de components d' x^* , a més del valor de D^* .

Finalment, per tal que aquest punt d'equilibri x^* del sistema promitjat sigui estable, només caldrà demanar que els valors propis de la matriu A_c tinguin part real negativa, d'on es podran treure les condicions que han de complir els paràmetres k , provocant així que el sistema, almenys el promitjat, estacioni a x^* .



Capítol 4

Òrbites periòdiques en llaç tancat per a sistemes de la forma

$$\dot{x} = Ax + bh$$

4.1 Introducció

L'ús del sistema promitjat per a sistemes discontinus en les variables d'estat pel disseny del seu control en llaç tancat ha estat tradicionalment posat en dubte, i amb raó¹. Els resultats de la teoria del promig no es poden aplicar, tal com s'ha vist, a funcions que no siguin de Lipschitz en x . Ara bé, pel cas particular dels convertidors de potència regulats per transistors que fan aparèixer la funció graó en el seu model, existeix una extensió, deguda a Lehman i Bass (veure [6]) que permet l'ús del sistema promitjat a tal efecte.

D'altra banda, existeix la sospita que si el sistema es pot aproximar per una successió de funcions de Lipschitz en x amb igual sistema promitjat, aleshores l'ús del sistema promitjat pel disseny del control serà també vàlid. Ara bé, aquesta visió acaba desembocant en un problema obert, quedant lluny dels objectius d'aquest projecte resoldre'l.

En aquest Capítol es veuran primer els resultats de Lehman i Bass i després s'aproximarà el sistema en llaç tancat per una successió de funcions de Lipschitz.

¹Al final de l'article [2] es pot trobar una discussió sobre aquest qüestió.

4.2 Extensions del promig per a sistemes de la forma $\dot{x} = Ax + bh$

Lehman i Bass van tancar definitivament el problema de l'ús del promig estenent els resultats clàssics de la teoria del promig per a un cas particular, però prou general, de sistemes discontinus en x a causa de l'ús de la funció graó. Per prou general s'entén que, a [6], es considera un sistema de la forma

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^N f_i(x)h_i(t, x; T), \quad (4.1)$$

amb

$$h_i(t, x; T) = u(D_i(x) - tri(t; T)),$$

i el seu promitjat

$$\dot{z} = f_0(z) + \sum_{i=1}^N f_i(z)D_i(z), \quad (4.2)$$

on s'inclouen models de convertidors de potència amb N transistors.

Així, el sistema anterior és molt semblant al que s'ha estat considerant aquí, ja que l'única diferència és que es permet tenir N transistors, cadascun amb una llei de control $D_i(x)$ però amb la mateixa freqüència per la funció tri . Així, el sistema $\dot{x} = Ax + bh$ n'és un cas particular amb $f_0(x) = A$, $f_1(x) = b$ i $N = 1$.

Cal esmentar també que el paràmetre ϵ no apareix a les equacions. Fent el canvi $t = T\tau$, i dient $\epsilon = T$, els sistemes (4.1) i (4.2) es transformen en la forma estàndard. Per comoditat, s'ometrà aquest canvi, es treballarà amb la variable t i s'assumirà el període T pel paràmetre ϵ tradicional de la teoria del promig.

Ara, per tal de poder enunciar resultats equivalents als vistos al Capítol 2, el que es fa és considerar, enlloc dels sistemes (4.1) i (4.2), les seves versions integrals

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \left[f_0(x(s)) + \sum_{i=1}^N f_i(x(s))h(s, x(s); T) \right] ds, \quad (4.3)$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \left[f_0(z(s)) + \sum_{i=1}^N f_i(z(s))D(x(s)) \right] ds \quad (4.4)$$

i fer el següent raonament. Les solucions de (4.1) i (4.3) són iguals gairebé arreu, és a dir, excepte en un conjunt de mesura nul·la, just allà on el sistema (4.1) no està definit



i, en canvi, (4.3) és continu. Així, les solucions de (4.3) són la versió contínua de (4.1). Pel que fa als sistemes (4.2) i (4.4), si suposem que les solucions del primer són de classe C^∞ , aleshores ambdós són equivalents en el sentit que tenen les mateixes solucions. Si no fos així, es podria fer un raonament semblant a l'anterior i concloure que les solucions del segon tenen un grau més de diferenciabilitat que les del primer.

Dit això, es pot passar ja a enunciar els resultats.

Teorema 4.1. *Siguin $x(t)$ i $z(t)$ solucions de (4.3) i (4.4) respectivament. Suposem que les funcions $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $D_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ són de Lipschitz amb constants de Lipschitz k_i i m_i respectivament i complint $0 \leq D_i(x) \leq 1$. Suposem també que es compleix $D_i(x) = \text{tri}(t; T)$ només una vegada per període². Aleshores, per qualsevol constant $L > t_0$ tan gran com es vulgui i qualsevol $\eta > 0$, tan petita com es vulgui, existeixen dues constants $T_0 = T_0(\eta, L)$ i $K > 0$ tals que, per tota T complint $0 < T \leq T_0$, es té*

$$|x(t) - z(t)| \leq (|x(t_0) - z(t_0)| + \eta)e^{K(t-t_0)}, \forall t \in [t_0, L].$$

Observació 4.1. *A la prova del Teorema es pot veure que la constant K depèn només de les constants k_i i m_i .*

Observació 4.2. *Atès que l'exponencial és creixent, es pot prendre, fent $t = L$, una altra fita igual però substituint el terme exponencial per una altra constant \tilde{K} obtenint*

$$|x(t) - z(t)| \leq (|x(t_0) - z(t_0)| + \eta) \tilde{K}, \forall t \in [t_0, L].$$

Observació 4.3. *Si es fa el canvi $t = T\tau$, les constants de Lipschitz de f_i i D_i passen a ser ϵk_i i ϵm_i respectivament. Així, la constant \tilde{K} és d'ordre ϵ , doncs es pot enunciar el Teorema prenent \tilde{L} enlloc de L i reescrivint l'interval temporal com $[t_0, \tilde{L}/\epsilon]$, és a dir,*

$$|x(t) - z(t)| \leq (|x(t_0) - z(t_0)| + \eta) \tilde{K}, t \sim 1/\epsilon.$$

Observació 4.4. *Si $|x(t_0) - z(t_0)| = O(T)$, aleshores es pot enunciar el Teorema en la forma clàssica, doncs*

$$|x(t) - z(t)| = O(T), t \sim 1/\epsilon.$$

La clau de la demostració roman en el fet que les solucions de (4.3) són contínues, i, per tant, es poden aproximar tant com es vulgui per funcions constants a trossos. Prenent la diferència entre $x(t)$ i $z(t)$, s'obté una primera fita de $|x(t) - z(t)|$ on, el

²Aquesta condició s'enuncia també com a absència de chattering.



punt més dur és acotar el terme $\left| \int_{t_0}^t [f_i(x(s))h_i(s, x(s); T) - f_i(z(s))D_i(z(s))] ds \right|$, que requereix utilitzar un lema específic per la funció graó. Finalment, aplicant el lema de Gronwall, s'obté la desigualtat enunciada. A l'apèndix B es pot veure una demostració completa pel cas d'un transistor.

La segona part dels resultats aportats per Lehman i Bass a [6] consisteix en estendre l'interval temporal a $[t_0, \infty]$ quan el sistema (4.4) té un punt hiperbòlic estable z_s , cosa que es resumeix en el següent

Teorema 4.2. *Siguin $x(t)$ i $z(t)$ dues solucions dels sistemes (4.3) i (4.4) respectivament. Suposem que aquests sistemes compleixen les condicions del Teorema 4.1 i que z_s és un punt hiperbòlic estable de (4.4). Suposem també que $z(t) \rightarrow z_s$ quan $t \rightarrow \infty$. Aleshores, existeixen dues constants $\beta_0(\eta)$ i $T_0(\eta)$ tals que, per qualsevol $\eta > 0$, qualsevol $|x(t_0) - z(t_0)| < \beta$, $0 \leq \beta < \beta_0 < \eta$, i qualsevol $0 < T \leq T_0$, es té*

$$|x(t) - z(t)| < \eta,$$

per tot $t \geq t_0$.

Com s'ha dit, la prova del Teorema 4.1 no consisteix en aplicar el canvi de variables $x = y + \epsilon\Psi(y, t)$ com en el cas del Teorema del Promig 2.5, sinó que només es prova la proximitat entre solucions del sistema promitjat i l'original acotant la seva diferència. De fet, no és possible aplicar aquest canvi ja que $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ no seria fitada. Per tant, tampoc és possible aplicar el promig general per tal d'obtenir promitjos d'ordre superior, ja que en calcular

$$G_2(y) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Psi_1 - G_1(y) \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) dt,$$

apareix la integral d'una δ de Dirac multiplicada per la funció h , que no està definida en els punts en què $\delta = \infty$.

A més, el fet d'aplicar el canvi és clau per tal de veure l'existència d'òrbites periòdiques al sistema original quan el promitjat té un punt fix estable, doncs a [6] no es demostra pas aquesta existència.

Ara bé, les simulacions fetes tant a [6] com al següent Capítol mostren que, efectivament, aquesta òrbita periòdica existeix.

Així doncs, s'assumirà que, en les condicions del Teorema 4.2, existeix una òrbita periòdica $x^*(t)$ del sistema original i, a més, suposarem que compleix

$$\lim_{T \rightarrow 0} |x^*(t) - z_s| = 0.$$



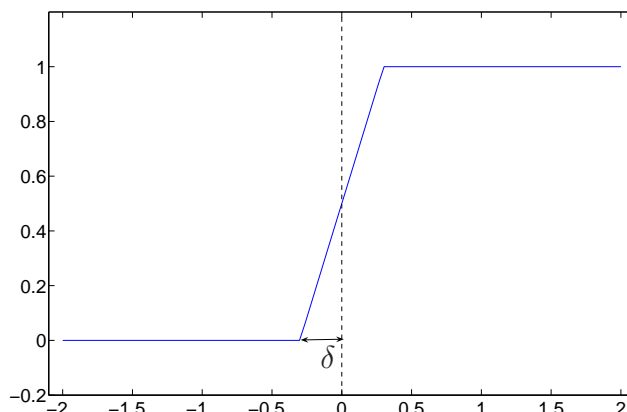


Figura 4.1: Funció l_δ

4.3 Aproximació del sistema original per sistemes de Lipschitz en x

En aquesta secció es regularitza la funció graó per tal d'obtenir una successió de funcions que aproximem el sistema en laç tancat. En ser aquestes funcions contínues de Lipschitz, és possible aplicar els resultats clàssics de promitjos vistos al Capítol 2, ja que s'obtidran una successió d'òrbites periòdiques que semblen que tendeixen a l'òrbita periòdica que, com hem suposat a la secció anterior, el sistema original posseeix.

4.3.1 Aproximació de la funció graó per funcions de Lipschitz

Per tal d'evitar la discontinuïtat en x , es proposa canviar la funció graó $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, que és on roman la discontinuïtat, per la funció

$$l_\delta(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < -\delta \\ 1 & \text{si } s > \delta \\ \frac{s}{2\delta} + \frac{1}{2} & \text{si } -\delta \leq x \leq \delta \end{cases} \quad (4.5)$$

que és contínua en $s = 0$, tal com es pot veure a la seva gràfica representada a la Figura 4.1. A més, és clar que la funció l_δ compleix

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} l_\delta(s) = u(s), \quad s \neq 0.$$

Ara, si fem servir la funció l_δ enlloc del graó unitari, u , el control sobre el transistor



quedarà

$$h(\tau, D(x); \beta) = l_\delta(D(x) - \text{tri}(\tau; \beta)),$$

on

$$\text{tri}(\tau; \beta) = \frac{\tau \bmod \beta}{\beta}$$

és la funció dent de serra.

Així, en fer aquest canvi obtenim una versió contínua del sistema original

$$\dot{x} = \epsilon(Ax + bl_\delta(D(x) - \text{tri}(\tau; \beta))) := \epsilon f_\delta(\tau, x) \quad (4.6)$$

que té les següents propietats

- i) f_δ és contínua en x .
- ii) $\frac{\partial f_\delta}{\partial x}$ és fitada,³ i, per tant, és de Lipschitz, tot i que $\frac{\partial f_\delta}{\partial x} \rightarrow \infty$ quan $\delta \rightarrow 0$.
- iii) f_δ no és contínua en $\tau = n\beta$, $n \in \mathbb{Z}$.
- iv) El sistema obtingut en promitjar (4.6) és el mateix que el que s'obté en promitjar l'original, $\dot{z} = \epsilon(Az + bD(x))$.⁴
- v) Sigui $x(\tau)$ una solució del sistema original (5.3), i sigui

$$H_{x(\tau)} = \left\{ \tau \in \mathbb{R} \text{ t.q. } D(x(\tau)) = \frac{\tau \bmod \beta}{\beta} \right\},$$

aleshores, si $\tau \notin H_{x(\tau)}$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(\tau, x(\tau)) = f_c(\tau, x(\tau)),$$

on f_c és el sistema original en llaç tancat.

Cal comentar que, per la propietat *iii*), el sistema f_δ no és continu, però aquesta discontinuïtat és deguda a la composició amb la funció dent de serra, i, per tant, recau en la variable temps, τ , i no pas en la d'estat, x .

4.3.2 Successió d'òrbites periòdiques

Siguin els sistemes

$$\dot{x} = \epsilon f(\tau, x) \quad (4.7)$$

³A l'apèndix C.2, s'hi troba una fita.

⁴A l'apèndix C.1, s'hi troba la prova.



$$\dot{x}_\delta = \epsilon f_\delta(\tau, x) \tag{4.8}$$

$$\dot{z} = \epsilon G(z) \tag{4.9}$$

$$\dot{z}_\delta = \epsilon G_\delta(z_\delta) \tag{4.10}$$

l'original, la seva aproximació mitjançant l_δ i els seus promitjats respectivament. Sigui z_s un punt hiperbòlic estable de (4.9) que, com que $G = G_\delta$ per la propietat *iv*), també ho serà de (4.10).

Per les propietats *i*) – *ii*), el sistema (4.8) compleix les hipòtesis dels Teoremes 2.3 i 2.5, amb el que existeix una òrbita periòdica, $x_\delta^*(\tau)$, tal que, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |x_\delta^*(\tau) - z_s| = 0$ i $\lim_{\tau \rightarrow \infty} |x_\delta^*(\tau) - x_\delta(\tau)| = 0$, essent $x_\delta(\tau)$ una solució de (4.8) complint $x_\delta(0) = z_s$. Ara bé, recordant l'observació 2.4, les òrbites periòdiques x_δ^* no tenen perquè oscil·lar al voltant d' z_s .

D'altra banda, pel Teorema 4.2, sembla que existeix una òrbita periòdica $x^*(\tau)$ solució del sistema (4.7) tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |x^*(\tau) - z_s| = 0$ i, si $x(\tau)$ és una solució de (4.7) complint $x(0) = z_s$, aleshores $\lim_{\tau \rightarrow \infty} |x(\tau) - x^*(\tau)| = 0$.

Dels raonaments anteriors i la propietat *v*), sembla que la successió d'òrbites periòdiques $(x_\delta^*(\tau))_\delta$ hauria de tenir com a límit l'òrbita periòdica $x^*(\tau)$, cosa que, en general, no se sap si és certa ja que els elements de la sèrie són solucions de sistemes continus i, en canvi, el límit, solució d'un de discontinu.

Així, el següent resultat recull les suposicions que s'han fet i el que les simulacions del següent Capítol reflexen, sense que n'existeixi cap prova.

Resultat 4.1 (Sense prova). *Sigui*

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x) \tag{4.11}$$

un sistema periòdic amb f fitada en un conjunt fitat D , i sigui també

$$\dot{z} = \epsilon G(z) \tag{4.12}$$

el seu sistema promitjat. Sigui $(f_\delta(t, x))_\delta$ una successió de funcions periòdiques de Lipschitz tals que $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta = f \forall x \in D$ excepte potser en un conjunt de mesura nul·la i tals que el seu sistema promitjat és també (4.12). Sigui z_s un punt hiperbòlic estable de (4.12), $x_\delta^(t)$ les òrbites periòdiques solucions de (4.12) garantides pels Teoremes 2.3 i 2.5. Aleshores existeix una òrbita periòdica $x^*(t)$ solució de (4.11) tal que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |x^*(t) - z_s| = 0,$$

i

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |x_\delta^*(t) - x^*(t)| = 0.$$





Capítol 5

Aplicació del promig per un convertidor Buck

5.1 Introducció

Considerem el convertidor de la Figura 5.1. Es tracta d'un convertidor CC/CC que

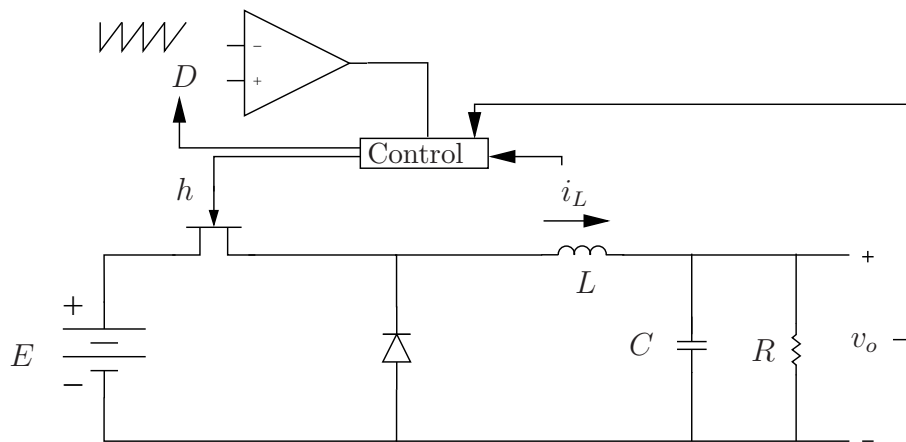


Figura 5.1: Convertidor Buck

converteix una determinada tensió E a una altra v_o quan hi ha connectada una certa càrrega resistiva R .

Els paràmetres de disseny per una determinada càrrega són el valor de la capacitat del condensador, C , la inductància de la bobina, L , i, el que és clau, el control, h , del transistor per tal de decidir quan aquest romandrà tancat i quan obert.

Tradicionalment, aquest control es realitza mitjançant el que s'anomena control per modulació d'amplada de polsos (PWM), que consisteix en comparar dos senyals, tri i

D , i tancar el transistor ($h = 1$) si $D > tri$, i obrir-lo ($h = 0$) en cas contrari.

El propòsit d'aquest capítol és l'aplicació de les eines aportades per la teoria del promig exposades als capítols 2, 3 i 4 per tal de dissenyar la funció D , que, en general, dependrà del corrent a la bobina i de la tensió de sortida a cada instant.

5.2 Equacions del sistema

Suposant que el convertidor treballa en conducció contínua ($i_L(t) \geq 0 \forall t \geq 0$) i escollint com a variables d'estat el corrent a la bobina, i_L , i la tensió de sortida, v_o , les equacions que modelen el seu comportament són

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (E \cdot h - v_o) \\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C} \left(i_L - \frac{v_o}{R} \right) \end{cases} \quad (5.1)$$

Fent el canvi de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{E} i_L \\ x_2 &= \frac{v_o}{E}, \end{aligned}$$

s'obtenen les equacions adimensionalitzades del sistema per a un convertidor Buck

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} (h(t, D(x); T) - x_2) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} (x_1 - \gamma x_2) \end{cases} \quad (5.2)$$

on

$$\gamma = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dient

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}, \\ b &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i reescalant el temps segons $t = \sqrt{LCT} \tau$, les equacions queden

$$\dot{x} = \epsilon (Ax + bh(\tau, D(x); \beta)) \leq \epsilon f(\tau, x), \quad (5.3)$$

amb $\epsilon = T$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i, ara, $\dot{x} = \frac{d}{d\tau} x$.



5.3 Control en llaç obert

Amb la intenció d'aplicar el que s'ha explicat a la secció 3.4, es proposa establir x_2 a un cert valor x_2^* tot suposant primer que $D(x) = D$ és constant.

El sentit de fixar x_2 és que el sistema modela un convertidor de tensió contínua a tensió contínua, doncs a la pràctica té sentit fixar la tensió de sortida desitjada i representada per la variable d'estat x_2 .

Com que el sistema és de la forma (3.2), el seu sistema promitjat serà

$$\dot{z} = \epsilon(Az + bD). \quad (5.4)$$

Com s'ha vist, per tal d'estacionar el sistema original a $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, només cal demanar, pels Teoremes 2.3, 2.5 i el corol·lari 3.1, que (5.4) tingui un punt crític a x^* , i per tant el sistema (5.3) tindrà una òrbita periòdica al voltant d'aquest punt.

Així, fixant el valor d' x_2^* , s'haurà de complir

$$x_1^* = \gamma x_2^*$$

$$x_2^* = D^*.$$

A la figura 5.2 hi ha els resultats de simular els sistemes original i promitjat amb

$$T = 5 \cdot 10^{-5} \text{seg}, R = 8\Omega, C = 5^{-5}F, L = 1 \cdot 10^{-3} H,$$

on s'ha demanat també que x_2 oscil·li al voltant de 0.3, amb el que

$$D = 0.3$$

i

$$x_1^* = \gamma 0.3 = 0.1677.$$

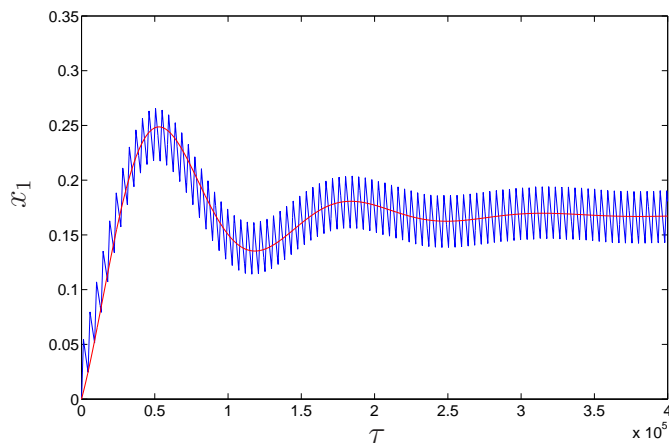
Clarament s'observa com el sistema original oscil·la en la component x_1 al voltant de x_1^* , i, la segona component tendeix a estacionar-se al valor x_2^* , per tant, el sistema té una òrbita periòdica al voltant d' x^* , tal com s'havia previst.

5.4 Control en llaç tancat

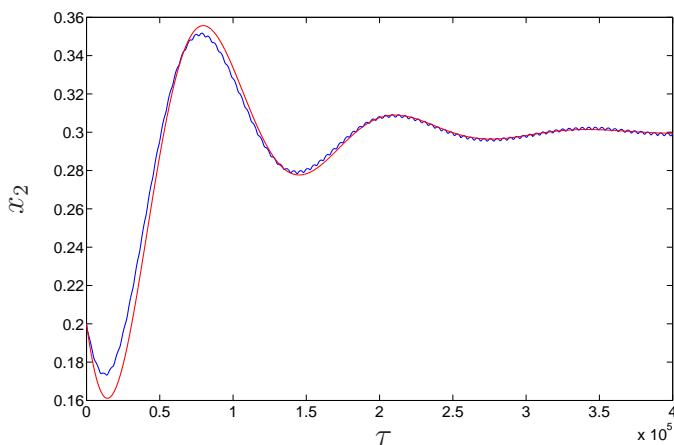
Es proposa ara aconseguir el mateix resultat però mitjançant una llei de control de l'estil de l'estudiada a la secció 3.6,

$$D(x) = D^* + k_1(x_1 - x_1^*) + k_2(x_2 - x_2^*).$$





(a) Corrent a la bobina



(b) Tensió a la sortida

Figura 5.2: Sistema original i promitjat en llaç obert

En aquest cas, el sistema promitjat queda

$$\dot{z} = \epsilon(A_c z + b_c), \tag{5.5}$$

amb

$$A_c = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 - 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$b_c = \begin{pmatrix} -k_1 x_1^* + (1 - k_2) x_2^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tal com s'ha demostrat a la secció 4.2, si el sistema (5.4) té un punt hiperbòlic estable x^* , aleshores el sistema (5.3) tindrà una òrbita periòdica estable que, per períodes T



prou petits, serà tan propera a x^* com es desitgi.

Així, es proposa fixar la segona component del punt d'equilibri de (5.4)

$$x_2^* = 0.3,$$

d'on, aplicant l'equació (3.12), s'obté

$$x_1^* = \gamma x_2^* = 0.1677$$

i

$$D^* = x_2^* = 0.3.$$

Ara, demanant que la matriu A_c tingui valors propis amb part real negativa, s'obté que les arrels del polinomi caracterític

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (\gamma - k_1)\lambda - k_1\gamma - k_2 + 1$$

han de tenir part real negativa.

A la figura 5.3 s'hi pot veure el resultat de simular els sistemes original i promitjat amb $\epsilon = T = 5 \cdot 10^{-5}$, $k_1 = -20$ i $k_2 = -15$, que compleixen la condició demanada. Com es veu a la figura 5.3(b), la tensió no convergeix al valor desitjat $x_2^* = 0.3$, però, en canvi, si es disminueix ϵ , s'observa, tal com mostren les figures 5.4 i 5.5, que el sistema original tendeix a tenir l'òrbita periòdica deistjatda a prop de x^* .

5.5 Òrbites periòdiques en llaç tancat

Per tal de comprovar numèricament la conjectura enunciada a la secció 4.3, es proposa canviar la funció graó $u(s)$ per la seva aproximació contínua

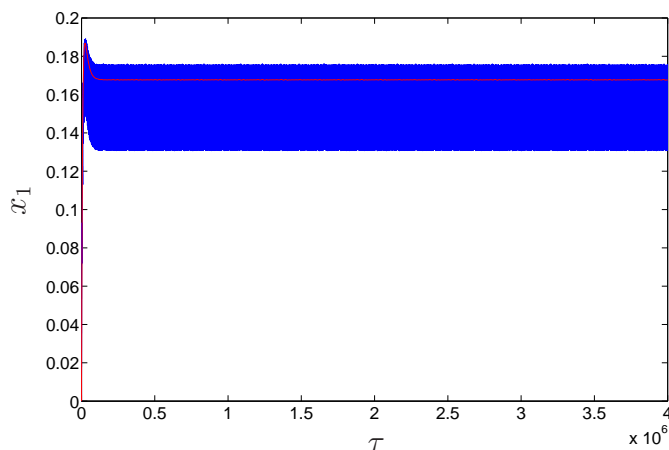
$$l_\delta(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < -\delta \\ 1 & \text{si } s > \delta \\ \frac{s}{2\delta} + \frac{1}{2} & \text{si } -\delta \leq s \leq \delta \end{cases}, \quad (5.6)$$

obtenint així el sistema

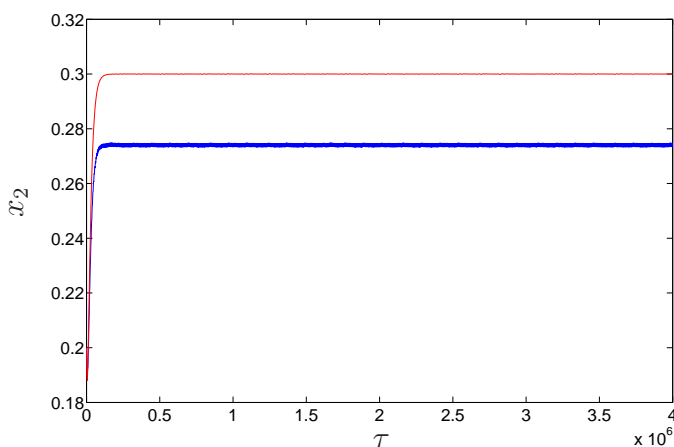
$$\dot{x} = \epsilon(Ax + bl_\delta(D(x) - tri(\tau; \beta)) = \epsilon f_\delta(\tau, x). \quad (5.7)$$

A la figura 5.6 hi ha representades les òrbites periòdiques del sistema (5.7) per a diferents valors de δ , $\delta \in [10^{-4}, 10^{-12}]$, i un període de commutació del transistor de





(a) Corrent a la bobina



(b) Tensió a la sortida

Figura 5.3: Sistema original i promitjat en llaç tancat amb $T = 5 \cdot 10^{-5}$

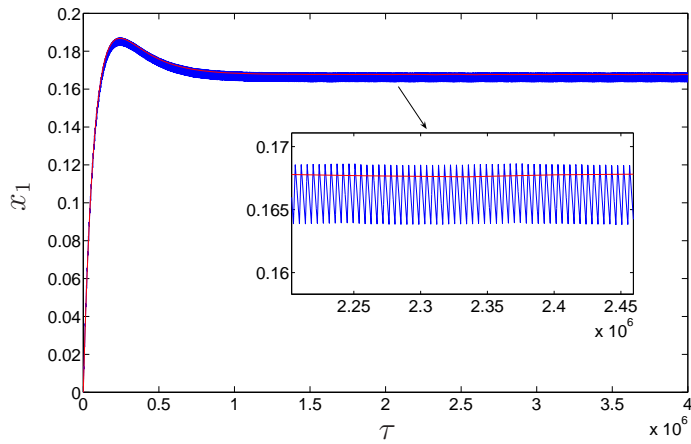
$T = 10^{-6}$ (1MHz). També hi ha representada l'òrbita periòdica del sistema (5.3), on, clarament, s'acumulen les òrbites anteriors.

La metodologia seguida per tal de representar aquestes corbes ha consistit en integrar numèricament els sistemes amb condicions inicials x^* i per a temps prou grans. El que es pot veure a la figura 5.6 són doncs els últims períodes calculats, que es poden assumir per les òrbites periòdiques buscades, ja que aquestes solucions hi han de tendir. D'aquesta manera queda numèricament comprovat que

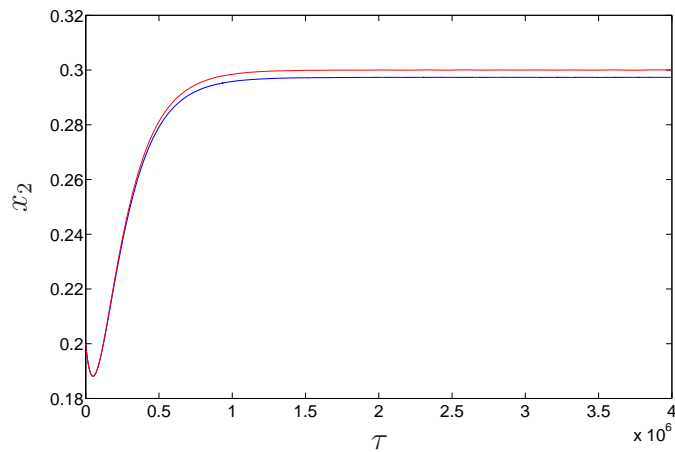
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x_{\delta}^*(\tau) = x^*(\tau),$$

on $x_{\delta}^*(\tau)$ és l'òrbita periòdica del sistema (5.7) garantida pels Teoremes 2.3 i 2.5, i $x^*(\tau)$ és l'òrbita periòdica de (5.3) garantida pel Teorema 4.2.





(a) Corrent a la bobina



(b) Tensió a la sortida

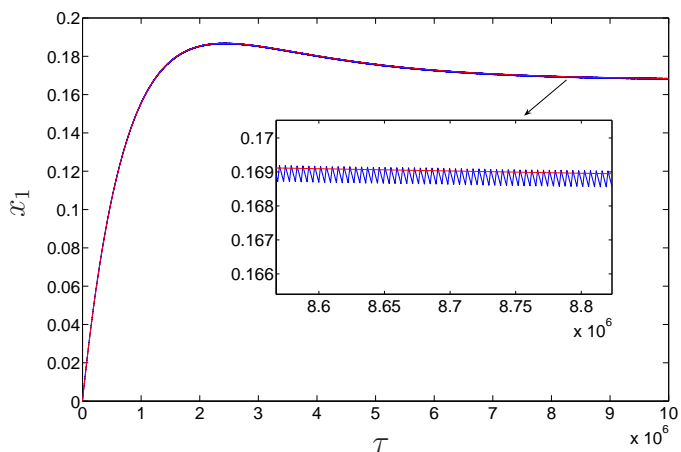
Figura 5.4: Sistema original i promitjat en llaç tancat amb $T = 5 \cdot 10^{-6}$

A les Figures 5.7 a 5.10, hi ha representades diferents simulacions del sistema (4.8) amb diferents valors de T i δ . Per a cadascuna d'elles es té un valor de δ fixat i, de vermell a blau, les corresponents òrbites amb valors de T decreixents. S'hi pot observar que, per a cada δ , a mida que T disminueix, les òrbites tendeixen a apropar-se al punt d'equilibri x^* .

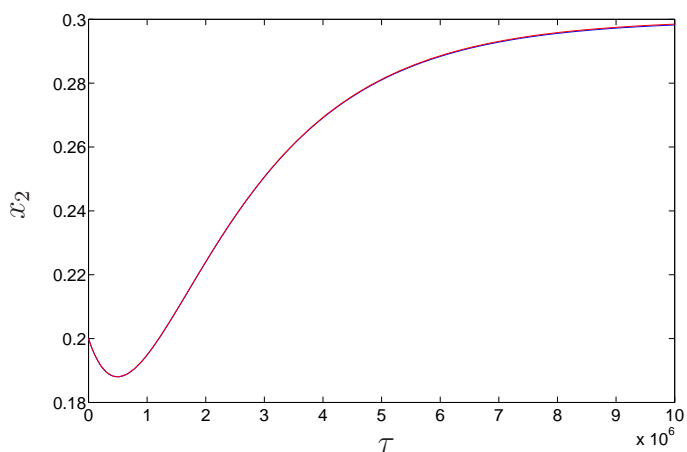
És interessant també notar que pels valors més grans de δ (Figura 5.7) l'extrem dret de les òrbites, que correspon als instants en que $D(x) = tri(\tau; T)$, és més suau que per valors petits (Figures 5.8-5.10). Això és degut a que, a mida que $\delta \rightarrow 0$, la funció l_δ pateix un canvi més bruscat apropant-se així a la funció graó.

En canvi, l'extrem esquerre és sempre no diferenciable, ja que correspon als instants $\tau = n\beta$ ($t = nT$), posant així de manifest la propietat iii) del sistema f_δ enunciada





(a) Corrent a la bobina



(b) Tensió a la sortida

Figura 5.5: Sistema original i promitjat en llaç tancat amb $T = 5 \cdot 10^{-7}$

junt amb l'equació (4.6).

Finalment, a la Figura 5.11 hi ha representats els últims valors del resultat d'integrar el sistema (4.7) per a un temps suficientment gran per a diferents valors de T , remarcant així que les òrbites periòdiques del sistema original s'apropen al punt d'equilibri x^* a mida que $T \rightarrow 0$.



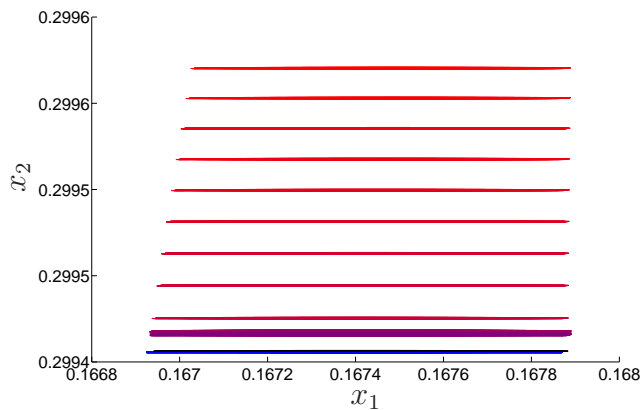


Figura 5.6: Successió d'òrbites periòdiques del sistema (4.8) ($\lim_{\delta \rightarrow 0}$) amb $T = 10^{-6}$. En vermell $\delta = 10^{-1}$, en blau $\delta = 10^{-14}$ i en negre $\delta = 0$

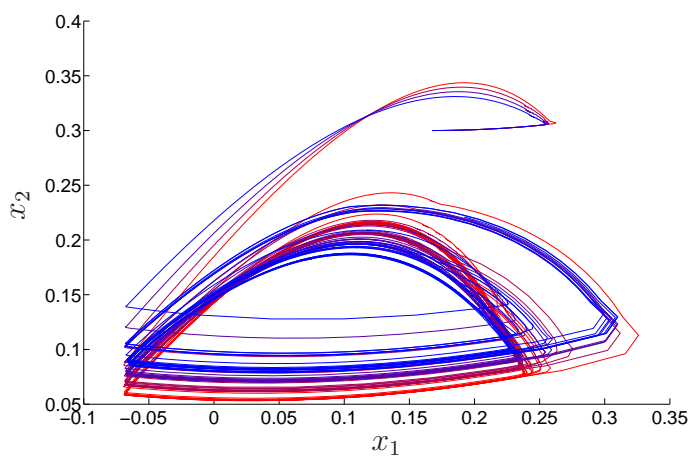


Figura 5.7: Successió d'òrbites periòdiques del sistema (4.8) amb $\delta = 10^{-2}$ i $T \in (10^{-3}, 6.6^{-4})$



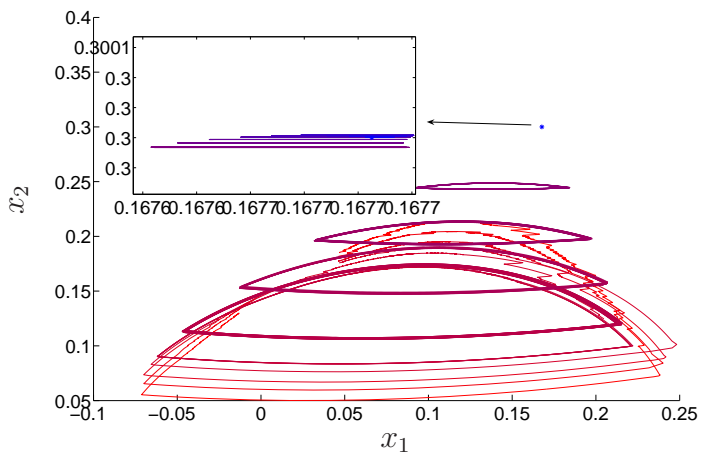


Figura 5.8: Successió d'òrbites periòdiques del sistema (4.8) amb $\delta = 10^{-4}$ i $T \in (10^{-3}, 10^{-10})$

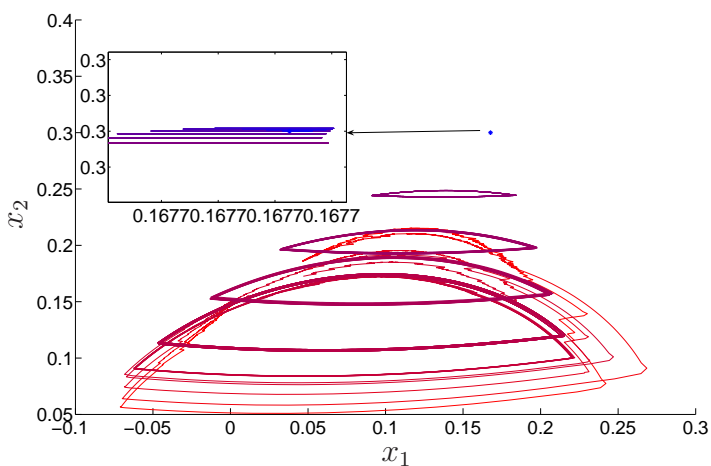


Figura 5.9: Successió d'òrbites periòdiques del sistema (4.8) amb $\delta = 10^{-6}$ i $T \in (10^{-3}, 10^{-10})$



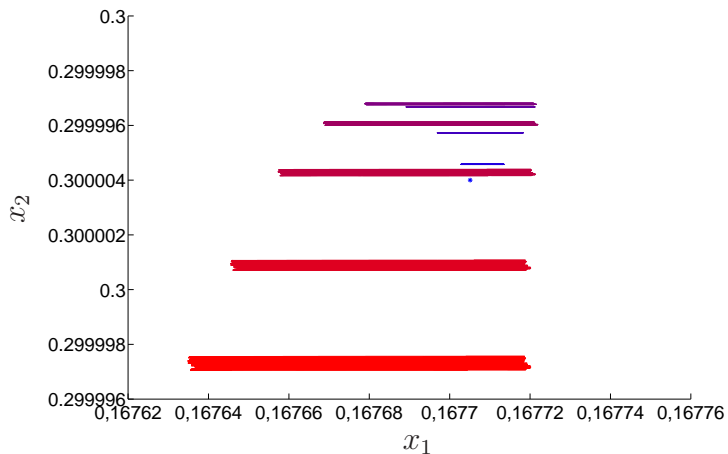


Figura 5.10: Successió d'òrbites periòdiques del sistema (4.8) amb $\delta = 10^{-8}$ i $T \in (10^{-7}, 10^{-10})$

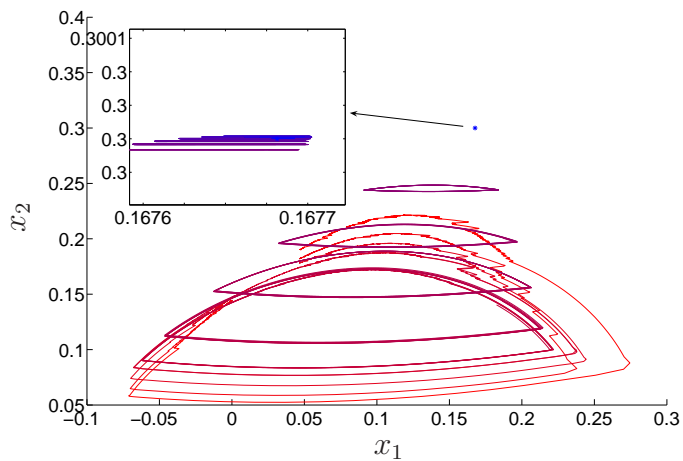


Figura 5.11: Successió d'òrbites del sistema (4.7) per a $T \in (10^{-3}, 10^{-10})$





Capítol 6

Pressupost i impacte ambiental

El pressupost presentat es desglossa fonamentalment en dos conceptes, recursos humans i recursos materials. A continuació es descriuen ambdós per, més endavant, quantificar-los.

6.1 Recursos humans

Dins aquest concepte s'inclouen el cost de direcció del projecte a preu d'enginyer superior realitzat per dues persones, així com el cost de la realització pròpiament.

6.2 Recursos materials

Els recursos materials fan referència a les següents partides

- Llicències de programari no lliure Matlab i Maple.
- Costos associats a maquinari necessari per la realització del projecte i l'amortització del equipaments deguda a la seva pèrdua de valor. El cost per hora d'aquests s'estima en 0.583 €/h, que inclou tant la inversió inicial com el cost de l'energia elèctrica consumida.
Pel que fa a l'amortització, se sap que la inversió inicial de l'ordinador portàtil ha estat de 1200 €, i se suposa una amortització lineal en 5 anys. D'altra banda s'han emprat 12 mesos per realitzar el projecte.
- Finalment, s'inclouen totes les despeses de material d'oficina, que es reduïxen a la impressió del projecte, ja que les correccions han estat realitzades en format

electrònic.

6.3 Resum de costos

A la següent taula es reflexen els costos separats segons els conceptes especificats als punts anteriors.

	Preu per hora (€/h)	Temps (h)	Total (€)
Recursos humans			
Realització del projecte	21.00	480.00	10800.00
Direcció del projecte	70.00	2x50.00	7000.00
			17080.00
Recursos materials			
<i>Programari</i>			
Matlab			1600.00
Maple			1035.00
			2635.00
<i>Maquinari</i>			
Utilització de l'ordinador	0.58	480.00	279.84
Amortització			100.00
			379.84
<i>Material d'oficina</i>			
Impressió i enquadernació			116.70
Altres			10.00
			126.70
Total			20221.54
IVA (+16%)			3235.45
Pressupost total			23456.99

6.4 Impacte Ambiental

Degut a la naturalesa del projecte, modelització matemàtica i simulacions numèriques, no s'ha generat un impacte ambiental apreciable, a excepció dels recursos materials emprats i el consum energètic requerit.

Les tècniques de control proposades són les que es fan servir a la realitat, doncs aquest projecte només pretén justificar-les.



Conclusions i futur treball

En aquest projecte s'ha exposat els resultats clàssics de la Teoria del Promig i s'ha aplicat al disseny del control de convertidors de potència modelats per sistemes de la forma $\dot{x} = Ax + bh$.

En el cas del disseny en llaç obert, quan el control no depèn de les variables d'estat, l'ús del sistema promitjat simplifica notablement els càlculs, ja que simplement imposant que el sistema promitjat tingui un punt crític estable, la teoria garanteix que el sistema original posseeix una òrbita periòdica estable. Amb el recolzament del promig general, s'ha vist com aquesta òrbita oscil·larà sempre al voltant d'aquest punt, i que aquest es trobarà al "centre" de l'òrbita. A més, l'amplitud de les oscil·lacions d'aquesta òrbita disminueix a mesura que la freqüència del senyal triangular que governa el control del transistor augmenta.

En el cas del llaç tancat, la teoria permet també l'ús del sistema promitjat, però només garanteix la proximitat de les solucions d'ambdós sistemes per a freqüències prou elevades (ϵ petit), ja que l'existència d'una òrbita periòdica dels sistema original no està provada.

D'altra banda, s'ha vist com, aproximant els sistema en llaç tancat per sistemes prou regulars, s'obté una successió d'òrbites periòdiques. Si es pogués provar que aquestes òrbites tendeixen a una altra i que és solució del sistema original, aleshores es podria garantir l'existència d'una òrbita periòdica del sistema original si el seu promitjat té un punt crític estable, i que aquesta s'hi aproxima per a freqüències prou elevades.

Finalment, s'ha fet simulacions per a un convertidor buck que corroboren totes les conclusions que s'ha exposat, especialment l'existència de l'òrbita periòdica del sistema original, tot i que aquesta no oscil·la al voltant del punt crític del sistema original, com passava en llaç obert.

De cara a futur treball, es proposa provar que el límit de la successió d'òrbites

periòdiques obtingudes mitjançant la regularització del sistema existeix, i que, a més, és solució del sistema original.

D'altra banda, s'ha vist que no és possible obtenir un sistema promitjat de segon ordre pel sistema en llaç tancat, però sí que ho és pels sistemes regularitzats. Suposant que les solucions d'aquests tendeixen a les solucions de l'original, es proposa calcular-ne els promitjos de segon ordre i els seus punts fixos per tal de millorar-ne el control, ja que aquests haurien de ser més propers al centre de l'òrbita que els del promig de primer ordre.



Agraïments

Així com una papallona en batre les seves ales als Estats Units pot provocar una tempesta a la Xina, hi ha un conjunt, enorme però numerable, de persones que, sense ni tan sols saber-ho, han influït en el tema, la durada, l'estil i, en general, la realització d'aquest projecte. Per aquest motiu, no voldria donar-lo per finalitzat sense agrair la seva col·laboració. Així, agraeixo a

- n'Enric Fossas, el meu tutor, per la seva paciència, la seva dedicació, la seva confiança, el seu bon humor i, naturalment, per haver-me guiat pel difícil terreny que hi ha entre la teoria i l'aplicació,
- na Tere Seara, per tota la llum que ha aportat amb les seves magistrals explicacions i consells en els nombrosos moments de foscor,
- a la meua família, en especial als meus pares, Antònia i Xavier, sense l'efectuosa pressió dels quals mai no hagués acabat la carrera,
- a Ruth Lladó, per les seves correccions,
- a tots els professors i professores de segon cicle d'enginyeria industrial, per haver-me fet veure que el que m'interessava era el perquè, i no pas el com,
- i, finalment, a tots els amics i amigues de la carrera i fora d'ella, en especial l'estimada gent de delegació, sense els quals aquesta no hagués tingut cap sentit.



Apèndix A

Promig General a sistemes de la forma $\dot{x} = \epsilon (Ax + bh)$

A.1 Obtenció de les funcions $G_i(y)$

Procedint com a la secció 2.4, apliquem el canvi

$$x = y + \sum_{i=1}^n \Psi_i(y, \tau) \epsilon^i + \tilde{\Psi}(y, \tau, \epsilon) \quad (\text{A.1})$$

al sistema

$$\dot{x} = \epsilon (Ax + bh(\tau; D, \beta)) \quad (\text{A.2})$$

de manera que es converteix en

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^n G_i(y) \epsilon^i + \tilde{G}(y, \tau, \epsilon), \quad (\text{A.3})$$

complint-se $\tilde{G}(y, \tau, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$ i $\tilde{\Psi}(y, \tau, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$.

Derivant (A.1) i fent servir (A.2) i (A.3), obtenim

$$\begin{aligned} \epsilon \left[A \left(y + \sum_{i=1}^n \Psi_i \epsilon^i + \tilde{\Psi} \right) + bh \right] &= (Ay + bh) \epsilon + \sum_{i=2}^n A \Psi_{i-1} \epsilon^i + \epsilon A \tilde{\Psi} = \\ &= \dot{y} + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \dot{y} = \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon^i G_i + \tilde{G} + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon^i G_i + \tilde{G} \right) + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon^i G_i + \tilde{G} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \epsilon^i \left(G_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau} \right) + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \cdot \sum_{i=1}^n \epsilon^i G_i + \tilde{G} \sum_{i=1}^n \epsilon^i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon^i G_i + \tilde{G} \right)$$

Dient

$$R = \tilde{G} \sum_{i=1}^n \epsilon^i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon^i G_i + \tilde{G} \right) - \epsilon A \tilde{\Psi},$$

s'obté

$$(Ay + bh) \epsilon + \sum_{i=2}^n A \Psi_{i-1} \epsilon^i = \sum_{i=1}^n \left(G_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau} \right) \epsilon^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} G_j \right) \epsilon^{i+j} + R,$$

d'on

$$\epsilon^1 : Ay + bh = G_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} \tag{A.4}$$

$$\epsilon^k : A \Psi_{k-1} = G_k + \frac{\partial \Psi_k}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} G_{k-1}, \quad 1 < k < n. \tag{A.5}$$

Integrant l'equació (A.4) de 0 a β i fent servir que

$$\int_0^\beta \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} d\tau = 0,$$

s'obté

$$G_1(y) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta Ay + bhd\tau = Ay + \frac{1}{\beta} \int_0^{D\beta} 1d\tau = Ay + bD. \tag{A.6}$$

Ara, per obtenir la funció $\Psi_1(y, \tau)$, només resta fer

$$\Psi_1(y, t) = \int_0^\tau (Ay + bh - G_1) d\tau + K_1,$$

on K_1 s'escull de manera que $\Psi_1(y, \tau)$ tingui promig nul en un període i així les funcions x i y tinguin el mateix promig. El càlcul d'aquesta funció es pot veure a l'apèndix A.2, resultant

$$\Psi_1(\tau) = b \left[(\tau \bmod \beta)(h - D) + D\beta(1 - h) - \frac{D\beta}{2}(1 - D) \right] \tag{A.7}$$

En general, per obtenir la funció $G_k(y)$, procedim igual que abans integrant l'equació (A.5) en un període, obtenint

$$A \int_0^\beta \Psi_{k-1} d\tau = \int_0^\beta G_k(y) d\tau + \int_0^\beta \frac{\partial \Psi_k}{\partial \tau} d\tau + \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^\beta \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} G_{k-j} d\tau,$$

d'on

$$G_k(y) = -\frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{k-1} G_{k-j}(y) \int_0^\beta \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} d\tau. \tag{A.8}$$



Com la funció $\Psi_1(\tau)$ definida a l'equació (A.7) no depèn de y , $G_2(y)$ queda

$$G_2(y) = -\frac{1}{\beta} G_1 \int_0^\beta \frac{\partial \Psi_1(\tau)}{\partial y} d\tau = 0,$$

i, per tant, segons (A.8),

$$G_k(y) = 0, \forall i > 1.$$

Així, en aquest cas és fàcil obtenir una expressió explícita per totes les funcions $\Psi_i(y, \tau)$ amb $1 < i < n$, de l'equació (A.5) s'obté l'equació recurrent

$$\Psi_i(\tau) = \int_0^\tau A \Psi_{i-1}(t) dt + K_i$$

A.2 Càlcul de $\Psi_1(y, t)$ per a sistemes de la forma $\dot{x} = \epsilon(Ax + bh)$

Com hem vist, per trobar l'expressió explícita de $\Psi_1(y, \tau)$, només cal resoldre la integral

$$\Psi_1(y, \tau) = \int_0^\tau f(y, t) - G_1(y) dt + K_1.$$

Fent servir les expressions (A.2) i (A.6) obtenim

$$\Psi_1(y, \tau) = \int_0^\tau (h(t; \beta, D) - bD) dt + K_1 = b \underbrace{\int_0^\tau h(t; \beta, D) dt}_{I_1} - bD\tau + K_1$$

$$I_1 = \underbrace{\int_0^{\tau - \tau \bmod \beta} h dt}_{I_2} + \underbrace{\int_{\tau - \tau \bmod \beta}^\tau h dt}_{I_3}$$

$$I_2 = \underbrace{\frac{\tau - \tau \bmod \beta}{\beta}}_n \underbrace{\frac{T_s}{T}}_l \beta = (\tau - \tau \bmod \beta) D,$$

on n és el nombre de períodes enters que hi ha a l'interval $[0, \tau]$, i l és la longitud de l'interval en que $h = 1$.

Com h és β -periòdica

$$I_3 = \int_0^{\tau \bmod \beta} h dt = \begin{cases} \tau \bmod \beta & \text{si } \tau \bmod \beta < D\beta \\ D\beta & \text{si } \tau \bmod \beta \geq D\beta \end{cases} = \\ = (\tau \bmod \beta - D\beta)h + D\beta.$$



Ajuntant totes les integrals s'obté

$$\Psi_1(y, \tau) = \Psi_1(\tau) = b[\tau \bmod \beta(h - D) + D\beta(1 - h)] + K_1.$$

Ara, imposant que $\Psi_1(\tau)$ tingui promig nul en un període obtindrem el valor de K_1 .

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\beta [b[h \cdot (\tau \bmod \beta - D\beta) - \tau \bmod \beta D] + K_1] d\tau = \\ &= \int_0^{D\beta} bh \cdot (\tau \bmod \beta - D\beta) d\tau + \int_0^\beta (-b\tau \bmod \beta D + bD\beta + K_1) d\tau = \\ &= b \int_0^{D\beta} 1 \cdot (\tau - D\beta) d\tau - b \frac{\beta^2 D}{2} + bD\beta^2 + K_1\beta = \\ &= \beta \left[b \frac{D\beta}{2} (1 - D) + K_1 \right]. \end{aligned}$$

Així doncs,

$$K_1 = -\frac{bD\beta}{2}(1 - D).$$



Apèndix B

Demostració del Teorema del promig pel cas de llaç tancat

B.1 Lemes previs

Per tal de veure la demostració del teorema 4.1, són necessaris els següents lemes, la demostració dels quals es poden veure als apèndixs de [6].

Lema B.1. *Siguin $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions. Suposem que, per qualsevol $x \in \mathbb{R}^n$, $g_1(x) \leq g_2(x)$.*

Aleshores, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall T > 0$ i $\forall t \in \mathbb{R}$, la següent desigualtat és sempre certa

$$u(g_1(x) - tri(t, T)) \leq u(g_2(x) - tri(t, T)).$$

Lema B.2. *Suposem que $x(t)$ i $y(t)$ són solucions de les equacions*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [f_0(x(s)) + f_1(x(s))h(x(s))] ds$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [f_0(y(s)) + f_1(y(s))D(y(s))] ds,$$

respectivament. Aleshores, $\forall t \in [t_0, L], L \geq t_0$, es té

$$|x(t)| \leq |x(t_0)|e^{k_1(t-t_0)+k_2(t-t_0)}$$

$$|y(t)| \leq |y(t_0)|e^{k_1(t-t_0)+k_2(t-t_0)},$$

on k_i són les constants de Lipschitz de f_i .

Lema B.3. *Siguin $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dues funcions contínues tals que $0 \leq g_1(x) \leq 1$ i $0 \leq g_2(x) \leq 1$. Suposem que $\tilde{x}(t)$ és una funció constant a trossos tal que $0 \leq g_1(\tilde{x}(t)) - g_2(\tilde{x}(t)) \leq \delta$ per algun $\delta > 0$ i $\forall t \in [t_0, L]$, $L > t_0$.*

Aleshores, per qualsevol constant $L > t_0$ i qualsevol $\sigma > 0$, existeix una constant $T_0 = T_0(\sigma, L)$ tal que, $\forall T \in (0, T_0]$,

$$\int_{t_0}^t |u(g_1(\tilde{x}(s)) - \text{tri}(s, T)) - u(g_2(\tilde{x}(s)) - \text{tri}(s, T))| ds \leq \sigma + \delta(t - t_0).$$

B.2 Demostració del Teorema

Tot seguit es mostra la prova del Teorema 4.2 pel cas d'un transistor ($N = 1$).

Siguin els sistemes

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [f_0(x(s)) + f_1(x(s))h(x(s))] ds \quad (\text{B.1})$$

i

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [f_0(y(s)) + f_1(y(s))D(y(s))] ds \quad (\text{B.2})$$

les version integrals del sistema original i el seu promitjat.

Es defineixen els operadors $J, W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com

$$(J_x)(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [f_0(x(s)) + f_1(x(s))h(x(s), s)] ds$$

$$(W_x)(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [f_0(y(s)) + f_1(y(s))D(y(s))] ds.$$

Com la solució de (B.1) és contínua, es pot aproximar per funcions contínues a trossos.

Considerem dues funcions a trossos $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1..2$, tals que, $\forall t \in [t_0, L]$,

$$0 \leq D(x(t)) - D(\tilde{x}_1(t)) \leq \delta_1$$

i

$$|f_i(x(t)) - f_i(\tilde{x}_i(t))| \leq \delta_i, \quad i = 0..1.$$

Com f_i i $D(x)$ són de Lipschitz, aquestes funcions \tilde{x}_i existeixen per qualsevol δ_i .

Definim

$$(J_{\tilde{x}})(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [f_0(\tilde{x}_0(s)) + f_1(\tilde{x}_1(s))h(\tilde{x}_1(s), s)] ds,$$



i considerem, aplicant la desigualtat triangular,

$$\begin{aligned} |(J_x)(t) - (J_{\tilde{x}})(t)| &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f_0(x(s)) - f_0(\tilde{x}_0(s))|}_{\leq \delta_0} ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \underbrace{|f_1(x(s)) - f_1(\tilde{x}_1(s))|}_{\leq \delta_1} \cdot \underbrace{|h(x(s), s)|}_{\leq 1} ds + \int_{t_0}^t |f_1(\tilde{x}_1(s))| \cdot \underbrace{|h(D(x(s)), s) - h(D(\tilde{x}_1(s)), s)|}_{\tilde{h}} ds. \end{aligned}$$

Ara, fent servir que, pel lema B.2, $|f_1(\tilde{x}_1(t))| \leq M$, $\forall t \in [t_0, L]$ i $|h| \leq 1$, es té

$$\begin{aligned} |(J_x)(t) - (J_{\tilde{x}})(t)| &\leq \delta_0(t - t_0) + \delta_1(t - t_0) + M \int_{t_0}^t |h - \tilde{h}| ds \leq \\ &\leq 2\delta_0(t - t_0) + M \int_{t_0}^t |h - \tilde{h}| ds, \quad \forall t \in [t_0, L], \end{aligned}$$

on, sense pèrdua de generalitat, s'ha suposat que $\delta_0 \geq \delta_1$.

Com $D(\tilde{x}_1(t)) \leq D(x(t)) \leq D(\tilde{x}_1(t)) + \delta_1$, es defineix una nova funció constant a trossos $\Psi_1(\tilde{x}_1(t)) = \min \{1, D(\tilde{x}_1(t)) + \delta_1\}$, d'on

$$D(\tilde{x}_1(t)) \leq D(x(t)) \leq \Psi_1(\tilde{x}_1(t)).$$

Ara, pel lema B.1, es té

$$|(J_x)(t) - (J_{\tilde{x}})(t)| \leq 2\delta_0(t - t_0) + M \int_{t_0}^t |u(\Psi_1(\tilde{x}_1(s)) - tri) - u(D(\tilde{x}_1(s)) - tri)| ds,$$

i, pel lema B.3,

$$|(J_x)(t) - (J_{\tilde{x}})(t)| \leq 2\delta_0(t - t_0) + M [\sigma_1 + \delta_1(t - t_0)] = \sigma + \gamma_1(\delta), \quad \forall T \in (0, T_0),$$

on $\sigma \rightarrow 0$ quan $T \rightarrow 0$, $\delta = [\delta_0, \delta_1]$ i $\gamma_1(\delta) \rightarrow 0$ quan $\delta_i \rightarrow 0$.

Similarment, es té

$$\begin{aligned} |(W_{\tilde{x}})(t) - (W_x)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f_0(\tilde{x}_0(s)) - f_0(x(s))| ds + \\ &+ \int_{t_0}^t |f_1(\tilde{x}_1(s)) \cdot |D(\tilde{x}(s))| - D(x(s))| ds + \int_{t_0}^t |D(x(s))| \cdot |(f_1(\tilde{x}(s)) - f_1(x(s)))| ds. \end{aligned}$$

Com $|f_1| \leq M \forall t \in [t_0, L]$ i $|D| \leq 1$, es té

$$|(W_{\tilde{x}})(t) - (W_x)(t)| \leq \delta_0(t - t_0) + M\delta_1(t - t_0) + \delta_1(t - t_0) \leq \gamma_2(\delta), \quad \forall t \in [t_0, L].$$



Clarament, $\gamma_2(\delta) \rightarrow 0$ quan $\delta_i \rightarrow 0$.

Considerem ara la desigualtat

$$\begin{aligned} |(J_x)(t) - (W_x)(t)| &\leq \underbrace{|(J_x)(t) - (J_{\tilde{x}})(t)| + |(J_{\tilde{x}})(t) - (W_{\tilde{x}})(t)|}_{\leq \beta \text{ pel lema 5}} + \\ &\quad + \underbrace{|(W_{\tilde{x}})(t) - (W_x)(t)|}_{\leq \gamma_2(\delta)}, \end{aligned}$$

que és certa $\forall t$.

Fent servir el lema B.3, $\forall \sigma, \beta$ i L existeix $T_0 = T_0(\sigma, \beta, L)$ tal que, $\forall T \in (0, T_0]$, es compleix

$$|(J_x)(t) - (W_x)(t)| \leq \sigma + \beta + \gamma_1(\delta) + \gamma_2(\delta), \quad \forall t \in [t_0, L],$$

on σ i $\beta \rightarrow 0$ quan $T \rightarrow 0$.

Les constants $\gamma_1(\delta)$ i $\gamma_2(\delta)$ es poden fer arbitràriament petites fent que \tilde{x}_i aproximí x tant com sigui necessari, doncs es pot assumir que $\delta_i \rightarrow 0$, i, per tant,

$$|(J_x)(t) - (W_x)(t)| \leq \eta, \quad \forall t \in [t_0, L],$$

on $\eta = \sigma + \beta \rightarrow 0$ quan $T \rightarrow 0$.

Finalment, considerem

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |(J_x)(t) - (W_y)(t)| \leq \\ &\leq |(J_x)(t) - (W_x)(t)| + |(W_x)(t) - (W_y)(t)|. \end{aligned}$$

En general, es té

$$\begin{aligned} |(W_x)(t) - (W_y)(t)| &\leq |x(t_0) - y(t_0)| + \int_{t_0}^t |f_0(x(s)) - f_0(y(s))| ds + \\ &+ \int_{t_0}^t |f_1(x(s))| \cdot |D(x(s)) - D(y(s))| ds + \int_{t_0}^t |D(y(s))| \cdot |f_1(x(s)) - f_1(y(s))| ds. \end{aligned}$$

Com f_i i D són de Lipschitz amb constants k_i i m_i , respectivament, i $0 \leq D \leq 1$, s'obté

$$|(W_x)(t) - (W_y)(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| + (Mm + k_1 + k_2) \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds.$$

Dient $K = Mm + k_1 + k_2$, es té

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| + \eta + K \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds.$$

Ara, pel Lema de Gronwall, Lema 2.1, dient $v(t) = |x(t) - y(t)|$, $c(t) = |x(t_0) - y(t_0)| + \eta$ i $u(t) = K$, es té

$$|x(t) - y(t)| \leq (|x(t_0) - y(t_0)| + \eta) e^{K(t-t_0)}, \quad \forall T \in (0, T_0) \quad t \in [t_0, L].$$



Apèndix C

Aproximació del sistema original per sistemes de Lipschitz

C.1 Càlcul del promig del sistema ϵf_δ

Com és equivalent, es mostrarà el càlcul de G_δ en la variable t enlloc de τ , doncs es farà servir T enlloc de β .

$$\begin{aligned} G_\delta &= \frac{1}{T} \int_0^T f_\delta dt = \frac{1}{T} \int_0^T Ax + bl_\delta dt = Ax + b \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T l_\delta dt}_{I_1} \\ I_1 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{DT-\delta} 1 dt + \int_{DT-\delta}^{DT+\delta} \left(\left(D - \frac{t \bmod T}{T} \right) \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{2} \right) dt + \int_{DT+\delta}^T 0 dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[DT - \delta + \frac{D + \delta}{2\delta} (DT + \delta - DT + \delta) - \int_{DT-\delta}^{DT+\delta} \frac{t \bmod T}{2\delta T} dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[DT + D - \int_{DT-\delta}^{DT+\delta} \frac{t}{2\delta T} dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[D(T + 1) - \frac{1}{4\delta T} [(DT + \delta)^2 - (DT - \delta)^2] \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[D(T + 1) - \frac{1}{4\delta T} 4\delta DT \right] = D, \end{aligned}$$

amb el que

$$G_\delta = Ax + bD.$$

C.2 Fita de $\frac{\partial f_\delta}{\partial x}$

Essent $l_\delta(s)$, $s \in \mathbb{R}$, definida a 4.5, l'aproximació contínua de la funció graó $u(s)$, l'aproximació f_δ del camp f en llaç tancat queda

$$f_\delta(t, x) = Ax + bl_\delta(D(x) - tri(t; \beta)),$$

on

$$D(x) = D^* + k(x - x^*),$$

$$k = (k_1, k_2).$$

Així, en ser $\frac{dl_\delta}{ds} \leq \frac{1}{2\delta}$, el camp f_δ també és fitat amb fita

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_\delta}{\partial x} \right| &= \left| A + b \frac{\partial l_\delta}{\partial x} \right| < \left| A + b \frac{1}{2\delta} \frac{\partial(D(x) - tri(t))}{\partial x} \right| < \\ &< \left| A + b \frac{1}{2\delta} (k_1, k_2) \right|. \end{aligned}$$



Bibliografia

- [1] P. R. Sethna i T. J. Moran “*Some nonlocal results for weakly nonlinear dynamical systems.*” Quarterly of Applied Mathematics, 1968, vol. XXVI, no2, pp. 175-185.
- [2] P. T. Krein, J. Bentsman, R.M. Bass i B. L.Lesieutre. “*On the Use of Averaging for the Anallysis of Power Electronic Systems*”. IEEE Transactions on power electronics. Vol. 5 no 2. Abril 1990.
- [3] N. N. Bogoliubov i Y. A. Mitropolsky. “*Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations*”. New York: Gordon and Breach, 1961.
- [4] J. Guckenheimer i P. Holmes. “*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*”. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag.
- [5] J.A. Sanders i F. Verhulst. “*Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*”. Spriger Verlag.
- [6] B. Lehman i R.M. Bass. “*Extensions of Averaging Theory for Power Electronic Systems*”. IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 11 no. 4, Juliol 1996.
- [7] E.A. Coddington i Levinson. “*Theory of Ordinary Differential Equations*”. McGrw-Hill: New York. 1955.