



Exercicis d'inferència estadística

Escola d'Estiu - Juliol 2026

1. (PAU, Setembre 2024, MACS) Una empresa d'autobusos afirma que fa el trajecte entre l'aeroport i el centre de la ciutat en 30 minuts. Hem obtingut una mostra del temps, en minuts, que ha trigat en 10 trajectes escollits a l'atzar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

- (a) Construïu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de trajecte, suposant que aquest temps segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2 minuts.

Nota: recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recordeu també que l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$ quan la variància σ^2 és coneguda és donat per $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

- (b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior, podem afirmar que la informació que proporciona l'empresa d'autobusos és errònia? Justifiqueu la resposta.

2. (PAU, Juny 2024, MACS) Volem saber el percentatge de persones que estarien a favor de la construcció d'un poliesportiu municipal en una població determinada. Prenem una mostra aleatòria de 350 persones, 218 de les quals es manifesten a favor de la proposta i la resta, en contra.

- (a) Doneu l'estimació puntual de la proporció i del percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu.

- (b) Escriviu un interval de confiança del 95% per al percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu en aquesta població.

Nota: recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recordeu també que, per a mostres grans, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$ és donat per:

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

3. (PAU Andalusia, Juny 2026, MACS) Una empresa de transports contracta una consultora per optimitzar els seus recursos. La consultora estudia la distància en quilòmetres que recorren els camions de l'empresa a cada viatge, sabent que la variable que mesura aquesta distància es distribueix segons una normal amb variància 225 km^2 i mitjana desconeguda. Per aquest motiu, pren aleatòriament una mostra de 49 viatges i obté una mitjana de 325 km recorreguts per viatge.

- (a) Calcula un interval de confiança al 97% per tal que la consultora pugui fer una estimació de la distància mitjana que recorren els camions de l'empresa per viatge.
- (b) Tenint en compte l'interval obtingut, raona si la consultora pot considerar que els camions de l'empresa recorren de mitjana 310 km per viatge que realitzen.
- (c) Quants viatges, com a mínim, hauria de seleccionar aleatòriament l'empresa per estimar la distància mitjana que recorren els camions de l'empresa per viatge mitjançant un interval de confiança del 99% que tingués una amplada inferior a 4 km?
4. (PAU Andalusia, Reserva 2024, MACS) La quota mensual de les hipoteques en una ciutat és una variable aleatòria que segueix una distribució normal de mitjana desconeguda i desviació típica igual a 140 euros.
- (a) Es pren una mostra aleatòria d'hipoteques en aquesta ciutat i s'obté que l'interval de confiança al 95% per a la mitjana de les quotes mensuals és (517.65, 551.95). Calcula el valor de la mitjana mostral i la mida de la mostra escollida.
- (b) Escollida una altra mostra de 78 hipoteques en aquesta ciutat i amb un nivell de confiança del 97%, calcula l'error màxim comès per estimar la quota mensual mitjana.
- (c) Si en una altra ciutat la quota mensual de les hipoteques segueix una distribució normal de mitjana 540 euros i desviació típica 150 euros, calcula la probabilitat que la quota d'una hipoteca escollida a l'atzar en aquesta ciutat estigui compresa entre 600 i 700 euros.
5. Una *startup* acaba de llançar un videojoc gratuït per a mòbils. Per fer-lo conegut, estan invertint en campanyes de publicitat a Instagram. Han recollit dades de les primeres 5 setmanes per veure si la inversió es tradueix en descàrregues:
- **Variable X:** Inversió setmanal en publicitat (en milers d'euros).
 - **Variable Y:** Nombre de descàrregues de l'app (en milers d'usuaris).

Setmana	1	2	3	4	5
Inversió X (milers d'€)	1	2	3	4	5
Descàrregues Y (milers d'usuaris)	3	6	6	8	12

Part 1: El Model de Predicció (Regressió)

- (a) Calculeu les mitjanes $(\bar{x}, \bar{y})$, la variància (σ_x^2) i la covariància (σ_{xy}) .
- (b) Trobeu l'equació de la recta de regressió $(\hat{Y} = mX + b)$.
- (c) La *startup* ha aconseguit finançament i la setmana vinent invertiran **6.000 €** ($X = 6$) en publicitat. Quantes descàrregues totals prediu el vostre model que aconseguiran?

Part 2: La Monetització (Interval de Confiança)

Que un usuari es descarregui el joc de forma gratuïta no genera ingressos. Per guanyar diners, els usuaris han de comprar la versió *Premium* a dins de l'app.

L'empresa pren una mostra aleatòria de **100 usuaris** que han descarregat el joc i observa que **20 usuaris** han acabat comprant la versió Premium.

- (a) Calculeu la proporció mostral ($\hat{p}$) d'usuaris Premium.
- (b) Construïu un **Interval de Confiança del 95%** per a la proporció real de jugadors de tot el món que compraran la versió Premium.
(Nota: Podeu utilitzar $z_{\alpha/2} = 1.96$)

Part 3: Síntesi per a Inversors

- (a) **El pitjor escenari:** Tenint en compte la predicció de descàrregues que heu fet a la Part 1 per a la setmana vinent (inversió de 6.000 €), i posant-vos en el *pitjor dels casos* segons el vostre interval de confiança de la Part 2: **Quin és el nombre mínim de jugadors Premium que la startup pot garantir als seus inversors amb un 95% de seguretat?**