

Examen final
1^r Batxillerat
8 de juny de 2022

Els exercicis 1 a 3 són obligatoris. En canvi, podeu escollir 2 dels problemes 4-7.

Nom i Cognoms: _____

1. (2 punts) Determineu el domini i estudeu la continuïtat de la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Solució:

La primera branca presenta problema quan el radicand és negatiu o nul, cosa que passa quan $x^2 - 1 \leq 0 \implies -1 \leq x \leq 1$. Però com per cap d'aquests valors s'entra per la primera branca no caldrà descartar cap valor, per ara.

Pel que fa a la segona branca caldrà descartar els valors on s'anul·la el denominador, que són $x = \pm 1$. Com tots dos estan dins del domini de definició de la segona branca caldrà descartar-los. Així, el domini serà:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Estudiem la continuïtat:

- En $x = -1$ caldrà fer els límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Per tant, la funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$.

- En $x = 1$. Provem primer de fer el límit sense distingir entre els laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Es tracta d'una indeterminació que caldrà resoldre factoritzant. Buscant les arrels del numerador obtenim

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-2}{x+1} \text{ si } x \neq 1$$

Ara podem tornar a fer el límit:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

Com que $f(1)$ no existeix però els laterals sí que existeixen i coincideixen es tractarà d'una discontinuïtat del tipus evitable.

2. (2 punts) Feu els següents límits:

(a) (1 punt) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 + 2x - 1}$

Solució:

Descartant els termes de menor ordre i després simplificant obtenim:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{\cancel{2}}}{-x^{\cancel{2}}} = -2$$

(b) (1 punt) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{4^x} =$

Solució:

Ajuntant en una sola base obtenim:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{4^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$$

ja que $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$.

3. (2 punts) Donada la recta $r : 2x + 3y - 6 = 0$ i un punt $P = (3, 2)$ trobeu:

(a) (0.5 punts) L'equació vectorial de la recta, s , paral·lela a r que passa per P .

Solució:

Com la demanen en vectorial caldria conèixer un vector director, que serà un vector director de r , que trobarem girant el gradient de r 90° : $(3, -2)$. Per tant,

la recta s serà

$$s : (x, y) = (3, 2) + \lambda(3, -2)$$

- (b) (0.5 punts) La distància entre r i s

Solució:

$$d(r, s) = d(r, P) = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

- (c) (0.5 punts) L'equació general de la recta perpendicular a r que passa per l'origen.

Solució:

Si ha de ser perpendicular a r caldrà girar el gradient de r 90° i serà una recta de la forma

$$3x - 2y + C = 0$$

Ara, imposant que passi per l'origen trobem que $C = 0$ i la recta serà

$$3x - 2y = 0$$

- (d) (0.5 punts) L'equació de les dues rectes que passen per P i formen un angle de 60° amb la recta r .

Solució:

Només caldrà girar 60° un vector director de r , que podria ser el vector $(3, -2)$ (el gradient $(2, 3)$ girat 90°). Ara girem el vector $(3, -2)$ 90° passant-lo a polar i sumant i restant 90° . L'angle del vector és

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{3}\right) = -33.69^\circ$$

Així, els vectors girats seran:

$$\sqrt{13}_{-33.69+60}$$

$$\sqrt{13}_{-33.69-60}$$

Si els passem altre cop a coordenades cartesianes obtindrem els vectors:

$$(3.23, 1.59)$$

$$(-0.23, -3.59)$$

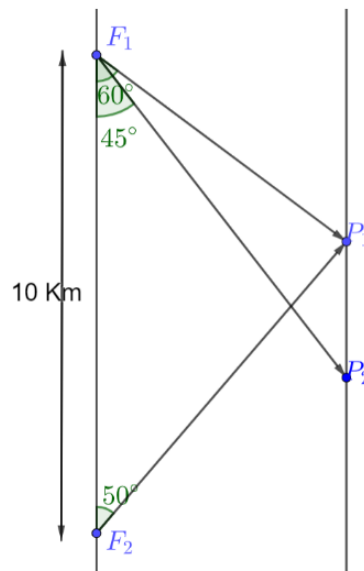
Per tant, les dues rectes seran:

$$(x, y) = (3, 2) + \lambda (3.23, 1.59)$$

$$(x, y) = (3, 2) + \lambda (-0.23, -3.59)$$

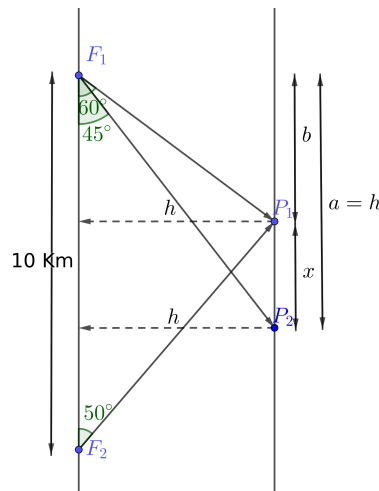
Escolliu DOS dels següents 4 problemes. Encercleu a l'enunciat els que s'han de corregir.

4. (2 punts) Un vaixell navega paral·lelament a la línia que uneix dos fars F_1 i F_2 , situats a una distància de 10km un de l'altre. En un moment donat, la visual dirigida al vaixell des del far F_1 forma un angle de 60° amb F_1F_2 , i la visual des de F_2 forma un angle de 50° amb aquesta mateixa recta. Al cap de 10 minuts, la visual des de F_1 forma un angle de 45° amb F_1F_2 . A quina velocitat navega el vaixell? (suposeu que navega a velocitat constant).



Solució:

La situació es resumeix a la següent figura



A la figura hi ha representat el punt P_1 on es troba el vaixell en el moment de la primera mesura, i P_2 en el moment de la segona. Per tal de saber a quina velocitat es mou el vaixell només cal saber la distància $x = P_1P_2$ recorreguda en 10 min. Per tal de conèixer la distància x fixem-nos que

$$x = a - b$$

Per tal de trobar b només caldrà trobar la distància F_1P_1 i fer

$$b = F_1P_1 \cos(60)$$

Podem trobar la distància F_1P_1 aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{F_1P_1}{\sin(50)} = \frac{10}{\sin(180 - 60 - 50)}$$

d'on

$$F_1P_1 = 8.152 \text{ Km}$$

i

$$b = 8.152 \cos(60) = 4.076 \text{ Km}$$

Ara, per trobar a , fixem-nos que en ser l'angle corresponent de 45° , tindrem que

$$a = h$$

Per tant, només cal trobar h fent servir

$$h = F_1P_1 \sin(60) = 7.06 \text{ Km}$$

Per tant:

$$x = a - b = 2.983 \text{ Km}$$

i la velocitat serà:

$$\frac{x}{10 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \boxed{17.9 \text{ Km/h}}$$

5. (2 punts) Considereu la circumferència

$$c : x^2 - 2x + y^2 - 6y + 2 = 0$$

i un punt $P = (2, 4)$.

Trobeu les equacions de totes les circumferències de centre P tangents a c .

Solució:

Completant quadrats trobem que la circumferència es pot escriure com

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 - R^2 = 0$$

Ara, igualant el terme independent trobem que $1 + 9 - R^2 = 2$ d'on $R^2 = 8$. Per tant, el radi de la circumferència serà $R = 2\sqrt{2}$ i el seu centre serà $C = (1, 3)$.

Ara mirem si el punt P és interior o exterior a la circumferència:

$$\|\vec{CP}\|^2 = (2 - 1)^2 + (4 - 3)^2 = 2 < 8$$

Per tant, el punt P és interior a la circumferència. Així, la dues circumferències que demanen tindran els següents radis:

$$R_1 = R - \|\vec{CP}\| = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ la tangent interior}$$

$$R_2 = R + \|\vec{CP}\| = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ la tangent exterior}$$

Així, les circumferències quedaran: seran:

$$c_1 : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$$

$$c_2 : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 18$$

6. (2 punts) Una torradora disposa d'una rodeta on hi ha indicats uns números del 1 al 6 i que corresponen al temps de funcionament de la torradora. Després de fer diferents proves, s'ha arribat a la conclusió que el % de torrat d'una torrada segueix la següent llei quan la torrada es posa al natural (descongelada):

$$T(t) = 8 \left(e^{\frac{t}{2.4}} - 1 \right)$$

on t és el temps d'encesa de la torradora, en minuts.

Quan $T = 100$ la torrada es considera calcinada (100% de torrat) mentre que si $T = 0$ es considera que la torrada està al natural.

- (a) (1 punt) Doneu el temps que es triga a tenir la torrada al 60% si la posem descongelada.

Solució:

Només caldrà resoldre l'equació:

$$60 = 8 \left(e^{\frac{t}{2.4}} - 1 \right) \implies e^{\frac{t}{2.4}} = \frac{60}{8} + 1$$

$$t = 2.4 \ln \left(\frac{60}{8} + 1 \right) = 5.13 \text{ min}$$

- (b) (1 punt) En treure una llesca de pa del congelador la posem una estona a la torradora. En treure-la, observem que la torrada es troba al 40%. Quanta estona l'hauré de deixar més per tal d'aconseguir un torrat del 60%?

Solució:

Caldrà calcular el temps per tenir un 40% de torrat a un 60%. Calculem el primer resolent:

$$40 = 8 \left(e^{\frac{t}{2.4}} - 1 \right) \implies e^{\frac{t}{2.4}} = \frac{40}{8} + 1$$

$$t = 2.4 \ln \left(\frac{40}{8} + 1 \right) = 4.3 \text{ min}$$

Per tant, per aconseguir un torrat del 60% només caldrà esperar $5.13 - 4.3 = 0.83$ minuts.

7. (2 punts) D'un triangle rectangle d'àrea 9 sabem que un dels catets es troba sobre la recta $r : 4x + 3y - 6 = 0$ i que un dels vèrtexs és el punt $A = (3, 3)$. Trobeu les coordenades de TOTS els altres possibles vèrtexs.

Solució:

Fàcilment podem trobar un dels catets del triangle:

$$c_1 = d(A, r) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{25}} = 6$$

Per tant, l'altre catet valdrà:

$$\frac{c_1 \cdot c_2}{2} = 9 \implies c_2 = 6$$

Troblem ara un vèrtex corresponent on es tallen els catets. Aquest serà la intersecció amb la recta r i la recta perpendicular a r passant per A . Aquesta recta, s , serà de la forma:

$$s : 3x - 4y + c = 0$$

Imposant que passi per A trobem $3 \cdot 3 - 4 \cdot 6 + c = 0 \implies c = 15$. Ara trobem el vèrtex resolent el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 4x + 3y - 6 &= 0 \\ 3x - 4y + 15 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

la solució del qual és el punt $B = \left(-\frac{21}{25}, \frac{78}{25}\right)$. Ara només caldrà trobar un vector perpendicular a \vec{BA} que tingui mòdul 6. Calculem primer el vector \vec{BA} :

$$\vec{BA} = A - B = \left(\frac{96}{25}, \frac{72}{25}\right)$$

Ara només cal girar el vector \vec{BA} 90° , fer que tingui mòdul 6 i situar-lo sortint de B . Tenim dues possibilitats, segon cap on girem el vector \vec{BA} :

$$C_1 = B + \frac{6}{\sqrt{\left(\frac{96}{25}\right)^2 + \left(\frac{72}{25}\right)^2}} \cdot \left(\frac{72}{25}, -\frac{96}{25}\right) = (4.4, 7.92)$$

$$C_2 = B - \frac{6}{\sqrt{\left(\frac{96}{25}\right)^2 + \left(\frac{72}{25}\right)^2}} \cdot \left(\frac{72}{25}, -\frac{96}{25}\right) = (2.76, -1.68)$$

El resultat es resumeix a la següent figura:

