

Examen final  
Matemàtiques 1<sup>r</sup> Batxillerat  
27 de maig de 2024

Nom i Cognoms: \_\_\_\_\_

1. (2.5 punts) Considereu la següent funció

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 4}$$

- (a) (0.75 punts) Trobeu-ne els punts de tall amb els eixos.  
(b) (1.5 punts) Estudieu-ne la continuïtat.  
(c) (0.25 punts) Calculeu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

**Solució:**

Comencem trobant el domini d'aquesta funció:

$$x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2 \implies D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

(a)

- Com  $x = 0$  és del domini podem considerar el punt de tall amb l'eix d'ordenades. Calculem  $f(0) = 0$  i el punt de tall amb l'eix d'ordenades serà el punt  $(0, 0)$ . Noteu que aquest punt també haurà d'aparèixer com a punt de tall de l'eix d'abscisses, ja que és l'origen.
- Pel que fa a l'eix d'abscisses caldrà resoldre l'equació  $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ . Traient factor comú obtenim:

$$\underbrace{x}_{=0} \cdot \overbrace{(x^2 + 3x + 2)}{=0} = 0$$

d'on obtenim les solucions  $x = 0$ ,  $x = -2$  i  $x = -1$ . Notem que  $x = -2$  no és del domini. Per tant, els punts de tall seran  $(0, 0)$  i  $(-1, 0)$ .

(b) Caldrà estudiar la continuïtat als punts que no són del domini:

- En  $x = -2$ . Fem el límit:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació caldrà factoritzar i simplificar. Com les arrels del numerador i denominador ja les hem trobat abans, directament podem escriure:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+1)}{x-2}$$

Ara tornem a fer el límit:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Com els límits laterals existeixen i valen el mateix però  $f(-2)$  no existeix, la funció tindrà una discontinuïtat evitable en  $x = -2$ .

- En  $x = 2$ . Podem continuar fent servir la versió simplificada de la funció, i obtenim

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{6}{0}$$

La funció tindrà una discontinuïtat asimptòtica. Ara cal trobar els límits laterals, per saber si són  $+\infty$  o  $-\infty$ . Estudiem el signe del denominador. Aquest passa de ser negatiu a positiu en  $x = -2$ , perquè és una recta de pendent positiu. Per tant tindrem:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

2. (2 punts) Un bollo baja flotando por un río paralelamente a su orilla. Como el bollo está mojado, está blando. Aunque el bollo habla, no sabe nadar para volver a la orilla. En cierto momento, cuando se encuentra a 15m de un observador situado en la orilla del río, el bollo grita por auxilio, pero éste no le oye. Al cabo de un momento el bollo vuelve a gritar. En este instante el bollo se encuentra a 25m del observador, y ha recorrido 35m desde el primer grito. A qué distancia de la orilla flota el bollo?

### Solució:

La situació es resumeix amb un triangle no rectangle de costats 15, 25 i 35, del qual ens demanen l'altura corresponent al costat 35. Fent servir el teorema del cosinus

trobem l'angle entre els costats 35 i 15:

$$25^2 = 35^2 + 15^2 - 2 \cdot 35 \cdot 15 \cdot \cos(\theta)$$

D'on  $\cos(\theta) = \frac{11}{14}$ . L'altura (la distància que ens demanen) serà  $h = 15 \cdot \sin(\theta)$ . Podem trobar  $\sin(\theta)$  amb la versió trigonomètrica del teorema de Pitàgores:

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} \implies \sin(\theta) = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

Finalment, la distància a la que sura el brioix de la vora del riu serà:

$$h = 15 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} \simeq 9.2788 \text{ m}$$

3. (1.5 punts) D'un quadrat sabem que els punts  $A = (1, 2)$  i  $C = (-2, 3)$  es troben als extrems d'una de les diagonals.

- (a) (0.5 punts) Trobeu el centre del quadrat i la seva àrea.

**Solució:**

El centre del quadrat el trobem simplement trobant el punt mig del segment  $AC$ :

$$M = \frac{A + C}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Pel que fa a l'àrea, només caldrà trobar el que mesura un costat i elevar-ho al quadrat. Com sabem la diagonal, només caldrà aplicar el teorema de Pitàgores. La diagonal mesura  $d = \|\vec{AC}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ . Si  $x$  és el que mesura un costat:

$$x^2 + x^2 = (\sqrt{10})^2 \implies 2x^2 = 10 \implies x^2 = 5$$

I l'àrea del quadrat valdrà 5.

- (b) (1 punt) Trobeu els altres dos vèrtexs

**Solució:**

Només caldrà situar al punt del mig,  $M$ , el vector  $\vec{MA}$  girat  $90^\circ$ . Trobem  $\vec{MA} = A - M = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ . El vector girat  $90^\circ$  cap a una banda serà el vector

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , i cap a l'altra serà  $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ . Per tant els vèrtexs que falten seran:

$$B = M + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = (0, 4)$$

$$D = M + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (-1, 1)$$

4. (2.5 punts) Considereu les següents rectes:

$$r : 2x - y = 0$$

$$s : -4x + 2y + 3 = 0$$

(a) (0.5 punts) Expliqueu raonadament si les dues rectes són paral·leles, coincidents o bé secants.

**Solució:**

Mirem si els vectors directors tenen la mateixa direcció. Girant  $90^\circ$  els gradients de les rectes obtenim els vectors directors:  $\vec{v}_r = (1, 2)$  i  $\vec{v}_s = (2, 4)$ . Els vectors tenen el mateix pendent:  $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$  i, per tant, tenen la mateixa direcció. Clarament, les rectes són paral·leles perquè la terme independent de  $s$  no és el doble que el de  $r$  (canviat de signe). Altrament podem agafar qualsevol punt de  $r$ , com el  $(0, 0)$ , i comprovar si és de  $s$  o no:

$$-4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \neq 0$$

Per tant, miris com t'ho miris, les rectes són paral·leles.

(b) (0.75 punts) En cas que siguin secants trobeu el punt d'intersecció, si són paral·leles la distància entre elles. En cas que siguin iguals doneu dos punts de  $s$  que es trobin a distància 2.

**Solució:**

Per trobar la distància entre elles només cal calcular la distància d'un de punt de  $r$  a la recta  $s$ . Agafant novament el punt  $P = (0, 0)$  trobem:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|-4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \simeq 0.67$$

(c) (0.5 punts) Trobeu l'equació de la recta perpendicular a  $r$  que passa pel punt  $A = (2, 2)$ .

**Solució:**

Com no s'especifica en quina forma cal donar la recta la podem donar en vectorial. Com són perpendiculars, el gradient de  $r$  ens servirà com a vector director de la recta que volem. Per tant serà:

$$(x, y) = (2, 2) + \lambda(2, -1)$$

També la podem donar en general des del principi. Una recta perpendicular a  $r$  és de la forma

$$x + 2y + C = 0$$

on hem girat el gradient  $90^\circ$ . Ara, imposant que passi per  $A$  trobem el valor de  $C$ :

$$2 + 2 \cdot 2 + C = 0 \implies C = -6$$

i la recta serà:

$$x + 2y - 6 = 0$$

- (d) (0.75 punts) Trobeu l'equació de la circumferència  $c$  que és tangent a la recta  $s$  i té centre al punt  $A$ .

**Solució:**

Només ens cal saber el radi. Com ha de ser tangent a  $s$  aquest serà la distància entre  $A$  i  $s$ :

$$R = d(A, s) = \frac{|-4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{20}} \simeq 0.22$$

Per tant la circumferència tindrà l'equació:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{20}$$

Fixeu-vos que cal elevar el radi al quadrat i, per tant, l'arrel desapareix.

5. (1.5 punts) Trobeu TOTS els punts (lloc geomètric) que es troben a distància 3 de la recta  $x - 3y + 2 = 0$ .

**Solució:**

Per tal que un punt,  $P = (x, y)$ , es trobi a distància 3 de la recta cal que compleixi:

$$d(P, r) = 3 \implies \frac{|x - 3y + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = 3$$

Ara cal considerar dos casos segons si  $x - 3y + 2 > 0$  o  $x - 3y + 2 < 0$ , que correspon als dos semiplans que separa la recta. En el primer cas tindrem:

$$\frac{x + 3y + 2}{\sqrt{10}} = 3$$

que és la recta  $x + 3y + 2 - 3\sqrt{10} = 0$ .

En el segon cas caldrà canviar el signe, ja que l'interior del valor absolut serà negatiu:

$$\frac{-(x + 3y + 2)}{\sqrt{10}} = 3$$

que ens surt la recta  $x + 3y + 2 + 3\sqrt{10} = 0$ .