

Trigonometria i funcions  
1<sup>r</sup> Batxillerat  
13 de maig de 2024

Nom i Cognoms: \_\_\_\_\_

1. (1.5 punts) Demostreu que, si  $\vec{u}$  u  $\vec{v}$  són dos vectors no nuls, aleshores l'angle que formen compleix

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

**Solució:**

Fet a classe.

2. (2.5 punts) Considereu la següent funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3x^2 - 27}{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) (0.5 punts) Trobeu-ne el domini

**Solució:**

La funció només presenta potencials problemes si s'anul·la el denominador de la primera branca (el de la segona no s'anul·la mai):

$$x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$$

Com  $x = 2$  queda fora del rang d'aquesta branca, tindrem:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

(b) (1.5 punts) Estudieu-ne la continuïtat

**Solució:**

Caldrà estudiar la continuïtat en  $x = -2$  (perquè no és del domini) i en  $x = 0$  (perquè hi ha un canvi de branca).

- En  $x = -2$ . Fem el límit:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

Per resoldre la indeterminació factoritzem:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 = 0 &\implies x = -2 \text{ i } x = 1 \implies x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \\ x^2 - 4 = 0 &\implies x = \pm 2 \implies x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Per tant simplificant obtenim:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 1) \cdot \cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)} \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{3}{4}$$

Com el límit existeix però la imatge no, la funció tindrà una discontinuïtat del tipus evitable en  $x = -2$ .

- En  $x = 0$ : distingim d'entrada entre esquerra i dreta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + 1} = -27$$

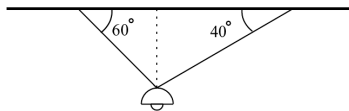
Com els límits laterals existeixen però són diferents, la funció té una discontinuïtat de salt en  $x = 0$ .

- (c) (0.5 punts) Calculeu  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

**Solució:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3,$$

3. (2 punts) Volem penjar un llum a una certa distància del sostre d'una habitació. Per fer-ho, agafem una corda, hi lliguem el llum i la clavem pels extrems en dos punts del sostre separats per una distància de 140 cm, de manera que els angles entre la corda i el sostre són de  $40^\circ$  i  $60^\circ$  a cada un dels extrems.



- (a) (1 punt) Trobeu la longitud de la corda

**Solució:**

Diguem  $A = 60^\circ$ ,  $B = 40^\circ$  i  $C = 180 - A - B = 80^\circ$  els angles del triangle, i  $a$ ,  $b$  i  $c$  els costats oposats corresponents. Sabem que  $c = 140$  cm. Aplicant el teorema del sinus obtenim:

$$\frac{a}{\sin(60)} = \frac{140}{\sin(80)} \implies a = \frac{140 \sin(60)}{\sin(80)} = 123.11 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\sin(40)} = \frac{140}{\sin(80)} \implies b = 91.37 \text{ cm}$$

Per tant, la longitud de la corda serà  $l = a + b = 214.49$  cm.

- (b) (1 punt) Trobeu la distància a la que es troba el llum del sostre

**Solució:**

Si anomenem  $h$  l'altura de la làmpara al sostre es compleix:

$$\frac{h}{b} = \sin(60) \implies h = b \cdot \sin(60) = 79.13 \text{ cm}$$

4. (4 punts) Considereu les dues rectes

$$r : 2x - 3y + 2 = 0$$

$$s : x + 2 = \frac{y - 1}{4}$$

- (a) (1 punt) Determineu la posició relativa entre elles. Justifiqueu bé la vostra resposta.

**Solució:**

Agafem dos vectors directors i comprovem si tenen la mateixa direcció. De la recta  $r$  agafem el vector  $(3, 2)$  (que és perpendicular al gradient,  $(2, -3)$ ), i de la  $s$ , com està en contínua, agafem el vector  $(1, 4)$ . Clarament no tenen la mateixa direcció, ja que

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \neq 0$$

Per tant, les rectes són secants.

- (b) (1 punt) En cas que siguin paral·leles trobeu la distància entre elles. En cas que siguin secants trobeu el punt de tall i l'angle que formen. En cas que siguin iguals trobeu l'equació de la recta perpendicular a  $r$  i  $s$  que passa per  $(1, -2)$ . Justifiqueu bé la vostra resposta.

**Solució:**

L'angle de tall serà:

$$\cos(\theta) = \frac{(3, 2) \cdot (1, 4)}{\|(3, 2)\| \cdot \|(1, 4)\|} = \frac{11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} = 0.7399$$

$$\implies \theta = \arccos(0.7399) = 42.27^\circ$$

Pel que fa al punt de tall, només caldrà resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 2 = 0 \\ x + 2 = \frac{y - 1}{4} \end{array} \right\}$$

i obtenim el punt  $Q = \left(-\frac{5}{2}, -1\right)$ .

- (c) (1 punt) Trobeu el punt simètric de  $A = (0, 5)$  respecte de la recta  $r$ . Justifiqueu bé la vostra resposta.

**Solució:**

Trobem primer la recta perpendicular a  $r$  que passa per  $A$ . Aquesta serà de la

forma

$$t : 3x + 2y + C = 0$$

ja que el seu gradient és perpendicular al gradient de  $r$ . Imposant que passi per  $A$  tenim:  $3 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + C = 0 \implies C = -10$ . Així, aquesta recta serà  $t : 3x + 2y - 10 = 0$ .

Ara trobem la intersecció entre aquestes dues rectes, resolent el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{array} \right\}$$

I obtenim el punt  $P = (2, 2)$ . Ara, per obtenir el simètric d' $A$  respecte la recta  $r$  només cal fer:

$$A' = P + \overrightarrow{AP} = 2P - A = (4, 4) - (0, 5) = (4, -1)$$

- (d) (1 punt) Trobeu dos punts,  $B$  i  $C$ , de la recta  $r$  de manera que el triangle  $ABC$  sigui isòsceles (de costats  $AC$  i  $AB$  iguals) i tingui àrea  $2\sqrt{13}$ . Justifiqueu bé la vostra resposta.

**Solució:**

Com el triangle és isòsceles, el punt mig entre  $B$  i  $C$  serà el punt  $P$  de l'apartat anterior. Per tant, l'altura serà  $PA$ :

$$h = \|PA\| = \|A - P\| = \|(2, 2) - (0, 5)\| = \sqrt{13}$$

Ara, la base serà:

$$\frac{h \cdot b}{2} = 2\sqrt{13} \implies b = 2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 4$$

Ara només caldrà col·locar al punt  $P$  un vector director de la recta  $r$  que tingui mòdul la meitat de la base per obtenir un dels dos altres vèrtexs. L'altre el trobarem canviant-li el sentit al vector:

$$A = P + 2 \cdot \frac{(3, 2)}{\sqrt{13}} \sim (3.664, 3.109)$$

$$B = P - 2 \cdot \frac{(3, 2)}{\sqrt{13}} \sim (0.356, 0.891)$$