Examen recuperació i millora
Matemàtiques 1^r Batxillerat
3 de juny de 2024

Nom i Cognoms: ______________________________

Podeu fer servir les següents fórmules:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

1. (3 punts) Considereu la següent funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   (a) (0.75 punts) Trobeu-ne els punts de tall amb els eixos.

   (b) (1.5 punts) Estudieu-ne la continuïtat.

   (c) (0.75 punts) Calculeu

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ i } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Solució:

(a) Comencem trobant el domini. Com és una funció a trossos comprovem que estigui ben definida allà on es canvia de branca: $f(0) = 0^2 - 3\cdot 0 + 3 = 3$. La primera branca no té problemes perquè és un polinomi. En canvi la segona sé que en podria presentar si el denominador s'anul·la. Comprovem-ho:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1 \text{ i } x = 2$$

La primera solució està fora del rang: $f(-1) = (-1)^2 - 3\cdot(-1) + 3 = 1$. Per tant el domini serà

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

Trobem ara els punts de tall:

- Eix Y. Només cal trobar la imatge de $x = 0$: $f(0) = 3$. Per tant, la funció tallà l'eix d'ordenades al punt $(0,3)$. És important remarcar que les funcions només tallen l'eix Y en un sol punt com a molt. Per tant només s'ha d'escollir una sola branca. En cas de donar un segon punt de tall es considerarà una errada greu de concepte.

- Eix d'abscisses. Caldrà estudiar per separat cadascuna de les branques:

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \text{ no té solucions reals}$$

$$x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

  És important no deixar-se cap de les dues solucions, encara que $x = -2$ quedi descartada perquè està fora del domini de definició de la segona branca. Així, l'únic candidat a punt de tall amb l'eix d'abscisses és $x = 2$. Ara bé, aquest punt no és del domini. Per tant, la funció no talla l'eix horitzontal.

(b) Caldrà estudiar la continuïtat en $x = 0$ (pel canvi de funció) i en $x = 2$ (perquè no és del domini).

- En $x = 0$. Caldrà fer els laterals directament perquè la funció $f(x)$ està definida per funcions diferents per l'esquerra i per la dreta de $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 - 3x + 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-3x+3}{x^2-4} = \frac{3}{4}$$

  Per tant, com els límits laterals existeixen (no són infinit) però són diferents la funció $f(x)$ tindrà una discontinuïtat del tipus salt en $x = 0$.

- En $x = 2$. En aquest cas farem servir la segona branca, tant per la dreta com per l'esquerra. Comencem sense distingir laterals:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

  És important fer notar que es tracta d'una indeterminació. En aquest punt no podem assegurar que acabi sent una discontinuïtat evitable. Caldrà resoldre-la primer. Per fer-ho factoritzem numerador i denominador. Com ja hem trobat totes les arrels dels polinomis (en buscar el domini i els punts de tall), podem escriure directament:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$$

  Cal ser molt precís i rogorós en fer els límits, no deixar-se res ni cap pas, factoritzar correctament, simplificar i tornar a fer el límit. Es penalitzaran severament coses com

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)} = \frac{4}{3}$$

Tampoc es donaran per bons límits fets avaluant en valors propers a $x = 2$, per exemple substituint per $x = 1.99$.

És molt important escriure correctament els límits, distingir entre dreta i esquerra, i, sobretot, respondre la pregunta que es fa: és contínua la funció? No? Quin tipus de discontinuïtat té?

(c) En calcular els límits a l'infinit és crucial escollir correctament la branca correcta. Com $-\infty$ és negatiu, caldrà fer servir la primera branca. De la mateixa manera, quan $x \to \infty$ caldrà fer servir la segona, perquè compleix $\infty > 0$. Cal indicar correctament quina branca es fa servir:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = x^2 \cancel{-3x} + \cancel{3} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \cancel{4}}{x^2 - \cancel{x} - \cancel{2}} = \lim_{x\to} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$

És important justificar bé el càlcul del límit, especialment el segon on cal resoldre una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$. Aquesta indeterminació es pot resoldre senzillament en dos passos: un en què es simplifiquen els graus més baixos i ens quedem amb els graus més alts, i un segon pas en què se simplifiquen numerador i denominador.

2. (2 punts) Trobeu totes les solucions de les equacions:

(a) $\cos(x) = 1$

Solució:
El cosinus val 1 sempre que l'angle x caigui a la posició corresponent a $x = 0$. Per tant, totes les solucions seran de la forma $x = 0+$ voltes, cosa que escriurem

$$x = 0 + n \cdot 2 \cdot \pi$$

(b) $\cos(2x) = 0$

Solució:
El cosinus d'un angle val 0 quan aquest angle cau a la posició vertical; és a dir, quan val $\frac{\pi}{2}$ (90°) més mitges voltes, cosa que escriurem:

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

(c) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 0$

Solució:
El sinus d'un d'angle s'anul·la quan aquest angle val 0 o π (0 més mitges voltes). Per tant, l'equació serà equivalent a:

$$x + \frac{\pi}{2} = 0 + n\pi \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + n\pi$$

(d) $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$

Solució:
Per resoldre aquesta equació cal fer servir algun propietat trigonomètrica. Podem fer servir la fórmula de l'angle doble que ens dóna l'enunciat:

$$2\cos^2(x) = \overbrace{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\sin(x)}^{\cos(2x)} + 1 \Longrightarrow 2\cos^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 1$$
$$\Longrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Això és cert sempre. Per tant, no es tracta d'una equació sinó d'una identitat que es compleix sempre. Per tant, les solucions de l'equació són tots els nombres reals.

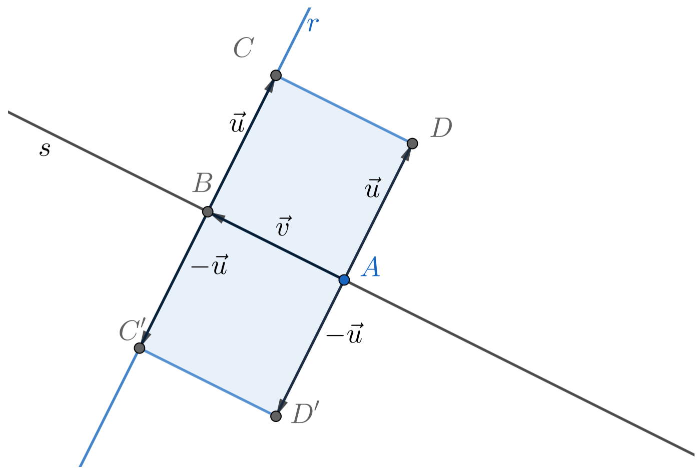
3. (2 punts) Un quadrat té un vèrtex al punt $A = (1, 2)$ i dos vèrtexs sobre la recta $r : 2x - y + 2 = 0$. Trobeu els altres tres vèrtexs. Existeixen tres opcions diferents, qualsevol d'elles serà bona.

Solució:
Comencem fixant-nos que el punt A no pertany a la recta (altrament, el problema no tindria solució):

$$2 \cdot 1 - 2 + 2 \neq 0$$

Fent un esquem podem veure ràpidament que hi ha tres possibles solucions: dues en què un costat està contingut a la recta r i una altra en què és la diagonal la que hi està continguda.

Opció 1 Assumim que la recta r conté un costat, com a la següent figura:



En aquest tenim dues opcions pels vèrtexs C i D. Per trobar el vèrtex B considerem la recta, s, perpendicular a r passant per A. El punt B serà la intersecció entre s i r. Una recta perpendicular a r serà de la forma

$$s:\ x + 2y + C = 0$$

on hem girat 90° el gradient de r. Trobem C imposant que passi per A:

$$1 + 2 \cdot 2 + C = 0 \Longrightarrow C = -5$$

Per tant, l'equació de la recta s és $x + 2y - 5 = 0$. Ara resolem el següent sistema per trobar el vèrtex B:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicant la primera equació per 2 i sumant les dues obtenim $5x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{5}$. Multiplicant la segona per 2 i restant la primera menys la segona obtenim $5y - 12 = 0 \Longrightarrow y = \frac{12}{5}$. Així, ja tenim el punt B:

$$B = \left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

Per trobar la resta dels vèrtexs ho farem fent servir el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right) - (1, 2) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

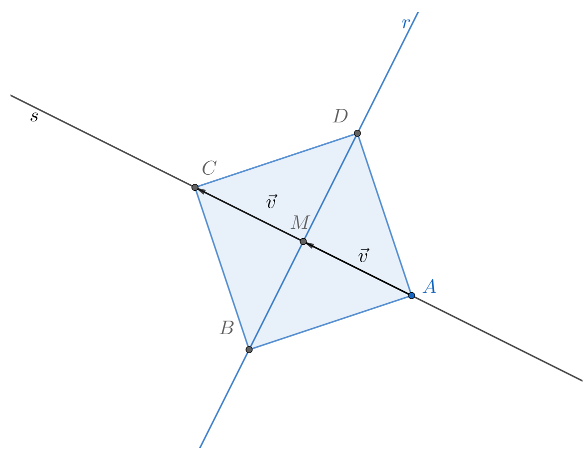
Ara per trobar el punts C i D només caldrà girar el vector $\overrightarrow{AB}$ 90° en sentit horari (per exemple) i col·locar-lo sortint de B i de A. El vector girat serà el vector $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$$C = B + \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$$
$$D = A + \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

Notem que també podríem haver girat el vector $\overrightarrow{AB}$ 90° en sentit antihorari, i així trobaríem els punts C' i D'. El vector seria el vector $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ i l'altra solució seria:

$$C' = B + \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$$
$$D' = A + \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

Opció 2 La tercera opció consisteix en considerar que la recta r conté un costat, tal com es mostra a la figura.



En aquest cas els vèrtexs B i D corresponen als vèrtexs C' i C de l'altre cas, respectivament. L'antic vèrtex B correspon ara al punt M, centre del quadrat.

$$B = \left(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$$
$$D = \left(\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

Ara només cal trobar el nou punt C, que serà el punt simètric de A respecte la recta r:

$$C = M + \vec{AM} = \left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

4. (3 punts) Considereu les següents rectes:

$$r:\ 3x - y = 0$$
$$s:\ x + 3y + 3 = 0$$

(a) (0.5 punts) Expliqueu raonadament si les dues rectes són paral·leles, coincidents o bé secants.

Solució:
Les dues rectes estan en forma general. Per tant només caldrà si els vectors gradients $(3,-1)$ i $(1,3)$ són proporcionals o no:

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{3}$$

Per tant, les rectes són secants.

(b) (1 punt) En cas que siguin secants trobeu el punt d'intersecció i l'angle de tall, si són paral·leles la distància entre elles. En cas que siguin iguals doneu dos punts de s que es trobin a distància 2.

Solució:
Per trobar el punt de tall només resoldre el següent sistema, que seran els únics valors de x i de y que compleixen ambdues equacions:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y = 0 \\ x + 3y + 3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicant la segona equació per 3 i restant la segona menys la primera obtenim l'equació $10y + 9 = 0 \implies y = -\frac{9}{10}$. Multiplicant la primera per 3 i sumant les dues equacions obtenim $10x + 3 = 0 \implies x = -\frac{3}{10}$. Per tant, el punt de tall serà $P = \left(-\frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right)$.
L'angle el trobarem fent el producte escalar entre els vectors directors. De la recta r tenim el vector director $\vec{v}_r = (1,3)$ (girant 90° el vector gradient), i de la recta s tenim $\vec{v}_s(3,-1)$. L'angle per tant serà:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{\|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\|} = \frac{1\cdot 3 + 3\cdot(-1)}{\|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\|} = 0$$

Com el producte escalar és nul les rectes seran perpendiculars.

(c) (0.5 punts) Trobeu l'equació de la recta t paral·lela a r que passa pel punt $A = (2,2)$.

Solució:
Per tal que sigui paral·lela a r la recta t ha de ser de la forma

$$t: \ 3x - y + C = 0$$

Per trobar la constant C només cal imposar que passi pel punt $A = (2, 2)$:

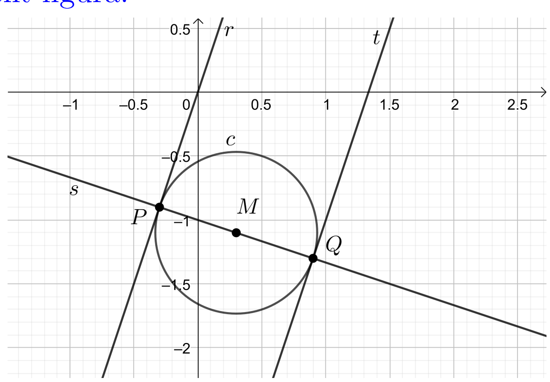
$$3 \cdot 2 - 2 + C = 0 \Longrightarrow -4$$

Per tant, la recta en forma general serà:

$$t: \ 3x - y - 4 = 0$$

(d) (1 punt) Trobeu l'equació de la circumferència c que és tangent a les rectes r i t i té centre a la recta s.

Solució:
La situació és la següent: les rectes r i t són paral·leles (la circumferència hi ha de ser tangent), i la recta s és perpendciular a les dues. Així, el centre de la circumferència serà el punt mig (M) entre els punts de tall de les rectes s i r (P, trobat a l'apartat b)), i entre s i t (Q, caldrà trobar-lo). El radi de la circumferència serà la meitat de la distància entre les rectes r i t. La situació es resumeix a la següent figura:



Trobem primer el punt Q resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 4 = 0 \\ x + 3y + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

Multiplicant la primera equació per 3 i sumant les dues equacions obtenim $10x - 9 = 0 \Longrightarrow x = \frac{9}{10}$, i multiplicant la segona per 3 i restant la segona menys la primer obtenim $10y + 13 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{13}{10}$. Per tant, els punts Q i M seran, recordant que P està trobat a l'apartat b),

$$Q = \left(\frac{9}{10}, -\frac{13}{10}\right) \Longrightarrow M = \frac{P+Q}{2} = \frac{\left(-\frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}, -\frac{13}{10}\right)}{2}$$
$$= \left(\frac{6}{2\cdot 10}, -\frac{22}{2\cdot 10}\right) = \left(\frac{3}{10}, -\frac{11}{10}\right)$$

Ara trobem el radi:

$$R = \frac{d(r,t)}{2} = \frac{d(A,r)}{2} = \frac{|3\cdot 2 - 2|}{2\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{4}{2\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Així, l'equació de la circumferència serà:

$$c : \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{10}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2$$