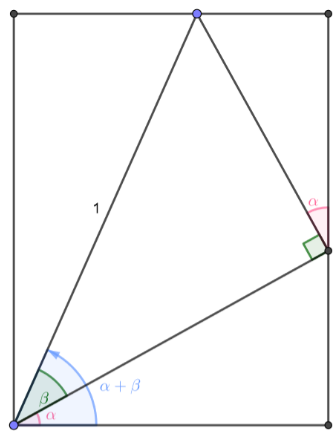
Trigonometria i funcions
1^r Batxillerat
8 de març de 2024

Nom i Cognoms: ____________________

1. (2 punts) Fent servir el següent rectangle, deduïu que

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

Expliqueu clarament els passos que feu.



Solució:

Fet a classe.

2. (1 punt) Feu servir la fórmula de l'exercici anterior per trobar fórmules per calcular les següents quantitats. Expliqueu clarament quines propietats feu servir.
   (a) (0.5 punts) $\sin(2\alpha) =$

   Solució:
   Fet a classe.

   (b) (0.5 punts) $\sin(\alpha - \beta) =$

   Solució:
   Fet a classe.

3. (3 punts) Considereu la següent funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x}$$

   (a) (0.5 punts) Trobeu-ne el domini

   Solució:
   Només cal igualar el denominador a zero:

$$x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ o } x = 4$$

   Per tant:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

(b) (2 punts) Estudieu-ne la continuïtat

Solució:

- En $x = 0$. Fem el límit:
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-4}{0}$$
La funció tindrà una discontinuïtat assimptòtica en $x = 0$. Caldrà però fer els laterals per saber si serà $+\infty$ o $-\infty$. Com el denominador és una paràbola còncava cap amunt que talla en $x = 0$ i $x = 4$, per l'esquerra de $x = 0$ és positiva i per la dreta negativa. Per tant tindrem:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

- En $x = 4$. Fem el límit:
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$
Per resoldre la indeterminació factoritzem trobant les arrels del numerador i denominador. Les del denominador ja les hem trobat abans. Les del numerador seran:
$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4 \text{ o } x = -1$$
Així tindrem:
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}\cdot(x+1)}{x\cdot\cancel{(x-4)}} = \lim_{x\to 4} \frac{x+1}{x} = \frac{5}{4}$$
I la funció tindrà una discontinuïtat del tipus evitable en $x = 4$.

(c) (0.5 punts) Calculeu $\lim_{x\to\infty} f(x) =$

Solució:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \cancel{3x} - \cancel{4}}{x^2 - \cancel{4x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

4. (1 punt) Feu els següents límits:

(a) (0.5 punts)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos(x)}$$

Solució:
Notem que el $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ i passa de ser positiu a negatiu en $x = \frac{\pi}{2}$. Per tant el límit quedarà:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(b) (0.5 punts)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$$

Solució:

Fent el límit ens trobem amb una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. Fent servir que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ la podem resoldre fàcilment:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sin(x)}}{\cancel{\sin(x)} \cdot \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

5. (1.5 punts) Els tres costats d'un triangle mesuren 3, 4 i 6 cm. Calculeu-ne els angles.

Solució:

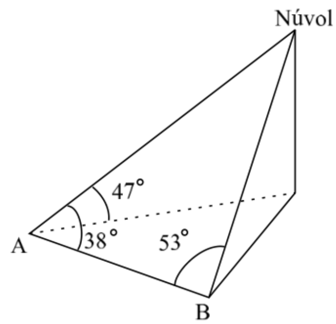
Fixem-nos que el triangle no és rectangle perquè no compleix el teorema de Pitàgores: $3^2 + 4^2 \neq 6^2$. No obstant, podem fer servir el germà gran del teorema de Pitàgores, el teorema del cosinus. Si anomenem $a = 3$, $b = 4$ i $c = 6$, tindrem:

$$3^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(A) \Longrightarrow \cos(A) = \frac{9 - 16 - 36}{-48} \Longrightarrow A = 26.38°$$

$$4^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos(B) \Longrightarrow \cos(B) = \frac{16 - 9 - 36}{-36} \Longrightarrow B = 36.34°$$

I el tercer angle el podem trobar restant: $C = 180 - A - B = 117.28°$

6. (1.5 punts) Per mesurar l'altura d'un núvol s'han fet simultàniament dues observacions des dels punts A i B distants entre si 1 km i situats tots dos al nivell del mar. La inclinació des de la visual des de A al núvol des de la horitzontal és de 47°. Els angles que formen les visuals des de A i des de B amb la recta AB són, respectivament, de 38° i 53°, tal com s'indica a la figura següent.



Calculeu l'altura a la que es troba el núvol respecte el nivell del mar.

Solució:

Trobem primer l'angle que falta a la cara frontal: $180 - 53 - 38 = 89$. Ara, podem trobar l'aresta que va de A fins al núvol amb el teroema del sinus. Si li diem a ens quedarà:

$$\frac{\sin(53)}{a} = \frac{\sin(89)}{1} \Longrightarrow a = \frac{\sin(53)}{\sin(89)} = 0.79km$$

L'aresta a és la hipotenusa d'un triangle rectangle amb angle agut 47 i un dels seus catets és l'altura a la que es troba el núvol. Per tant tindrem:

$$x = a\sin(47) = \boxed{0.58 \text{ km}}$$

El núvol es trobarà a 580 m d'atura.