Matemàtiques 1r BTX

Nom i cognoms: ____________________

Data: 27 de maig de 2025

Nota:

# Examen final

**Indicacions per al desenvolupament dels exercicis:**

- És imprescindible que el desenvolupament dels exercicis sigui clar, net i ordenat.
- Cal que expliquis els raonaments seguits per desenvolupar els exercicis.
- Els càlculs han d'estar justificats i connectats amb l'enunciat.
- Utilitza correctament la notació matemàtica.
- Indica de manera clara i destacada la resposta final a cada pregunta, sempre justificada correctament.
- Deixa els resultats tan simplificats com sigui possible, llevat que l'enunciat indiqui el contrari.

No seguir aquestes indicacions pot afectar la puntuació dels exercicis.

**1.** [2.5 PUNTS] Considereu la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-4}{x^2-16} & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 - x - 8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

**a.** [0.5 PUNTS] Estudia el domini d'aquesta funció.

**Solució:**

Per estudiar el domini d'una funció definida a trossos, primerament estudiarem cada expressió per separat.

Primera expressió. És una fracció algebraica, els valors que anul·len el dominador, i compleixen $x \leq 3$, no formaran part del domini.

$$x^2 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 4$$

Podem veure que $x = -4$ no formarà part del domini. $x = 4$ no forma part d'aquesta expressió ( $x \leq 3$).

Segona expressió. Es tracta d'un polinomi, per tant, no presenta cap discontinuïtat.

Observant els punts on la funció canvia d'expressió veiem que presenta cap discontinuïtat.

Finalment, el domini d'aquesta funció és:

$$\boxed{D(f) = \mathbb{R} \backslash \{-4\}}$$

**b.** [1.5 PUNTS] Estudia'n la continuïtat.

**Solució:**

Els punts on cal estudiar la continuïtat són $x = -4$ i $x = 3$:

A $x = -4$:

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} \frac{2x^2-4}{x^2-16} = \lim_{x\to -4^-} \frac{2x^2-4}{(x+4)(x-4)} =$$
$$= \frac{2\cdot(-4)^2-4}{(-4^-+4)(-4-4)} = \frac{28}{0^-\cdot(-8)} = \frac{28}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \frac{2x^2-4}{x^2-16} = \lim_{x\to -4^+} \frac{2x^2-4}{(x+4)(x-4)} =$$
$$= \frac{2\cdot(-4)^2-4}{(-4^++4)(-4-4)} = \frac{28}{0^+\cdot(-8)} = \frac{28}{0^-} = -\infty$$

$$\nexists f(-4) \quad \text{(vist al domini)}$$

La funció presenta una discontinuïtat asimptòtica a $x = -4$.

A $x = 0$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-4}{x^2-16} = \lim_{x\to 3^-} \frac{14}{-7} = -2$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2 - x - 8 = 9 - 3 - 8 = -2$$

$$f(3) = \frac{14}{-7} = -2$$

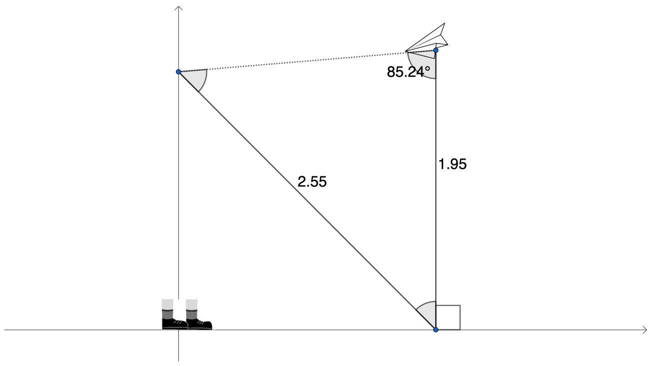
La funció no presenta cap discontinuïtat a $x = 0$, és contínua.

**c.** [0.5 PUNTS] Calcula el límit de $f(x)$ quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$

**Solució:**

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 - x - 8 = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-4}{x^2-16} = 2$$

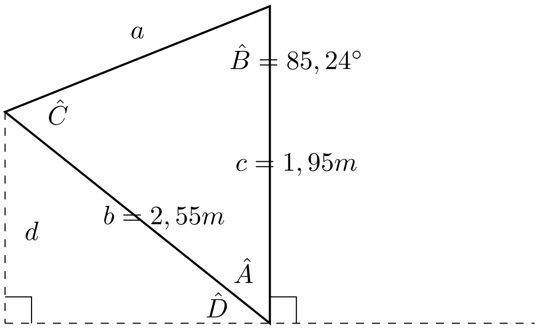
**2.** [2 PUNTS] El Pau fa un avió de paper a mitja classe i el llença cap a la pissarra. L'avió següeix la següent trajectòria. (Suposarem que la trajectòria és rectilínia.)




**a.** [1.5 PUNTS] Quina distància ha recorregut l'avió?

**Solució:**

Esquema posant nom als vèrtexs i costats:




Apliquem Teorema del sinus:

Trobem l'angle del vèrtex $C$:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad \rightarrow \quad \frac{2,55}{\sin(85,24°)} = \frac{1,95}{\sin \hat{C}}$$

$$\hat{C} = \arcsin \frac{1,95 \cdot \sin(85,24°)}{2,55} = 49,65°$$

Trobem l'angle del vèrtex $A$:

$$\hat{A} = 180° - 49,65° - 85,24° = 45,11°$$

Finalment trobem la longitud del costat $a$ aplicant el Teorema del sinus que correspon a la distància recorreguda per l'avió:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{\sin(45,11°)} = \frac{2,55}{\sin(85,24°)}$$

$$\boxed{a = 1,81m}$$

**b.** [0.5 PUNTS] Si la professora està situada on s'observen els peus i medeix 1,60m, rebrà l'impacte de l'avió?

**Solució:**

Considerem el costat d i angle D marcats en l'exemple anterior.

Trobem l'angle $\hat{D}$:

$$\hat{D} = 90° - 45,11° = 44,89°$$

$$d = 2,55 \sin(44,89°) = 1,8m$$

Si la professora medeix 1,60m i l'avió arriba a la pissarra a una alçada de 1,80m, la professora no rebrà l'impacte de l'avió.

**3.** [2.5 PUNTS] Donat un triangle amb vèrtexs $A = (5,0)$, $B = (14,-3)$ i $C = (6,3)$, respon:

**a.** [1 PUNT] Comprova que és un triangle escalè i rectangle. Digues quin dels vèrtexs correspon a l'angle de 90°.

**Solució:**

Primerament comprovem que el triangle és escalè, o sigui, que la longitud dels tres costats del triangle és diferent.

Per calcular la longitud dels costats utilitzarem vectors i el mòdul d'aquests:

$$\vec{AB} = (14-5, -3-0) = (9,-3) \quad \rightarrow \quad |\vec{AB}| = 3\sqrt{10}$$
$$\vec{BC} = (6-14, 3+3) = (-8,6) \quad \rightarrow \quad |\vec{BC}| = 10$$
$$\vec{CA} = (5-6, 0-3) = (-1,-3) \quad \rightarrow \quad |\vec{CA}| = \sqrt{10}$$

Podem concloure que és escalè.

Per saber quin és l'angle de 90°calculem el producte escalar dels vectors. A partir de la fórmula del producte escalar sabem que si el producte escalar té per resultat 0 l'angle serà de 90°.

Angle $\hat{B}$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 72 - 18 = 54$$

Angle $\hat{C}$:

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = 8 - 18 = -10$$

Angle $\hat{A}$:

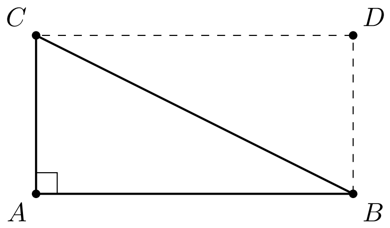
$$\vec{AB} \cdot \vec{CA} = -9 + 9 = 0$$

$$\boxed{\hat{A} = 90°}$$

**b.** [0.5 PUNTS] Troba les coordenades del punt $D$ que corresponen al quart vèrtex del rectangle amb vèrtexs $A$, $B$, $C$ i $D$.

**Solució:**

Per situar-nos tenim aquest esquema:




Per trobar les coordenades del vèrtex $D$ fem:

$$\vec{AB} = \vec{CD} \quad \rightarrow \quad (9, -3) = (d_1 - 6, d_2 - 3)$$

$$9 = d_1 - 6 \quad \rightarrow \quad d_1 = 15$$

$$-3 = d_2 - 3 \quad \rightarrow \quad d_2 = 0$$

$$\boxed{D = (15, 0)}$$

**c.** [1 PUNT] Troba l'equació de la circumferència $c$ que té per centre el centre del rectangle i que passa pels quatre vèrtexs.

**Solució:**

El centre del rectangle és el punt mig d'una de les diagonals, per exemple $\overline{BC}$:

$$M_{BC} = \left(\frac{14+6}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = (10, 0)$$

El radi el podem calcular a partir del mòdul d'un vector que té d'origen a un vèrtex i extrem el centre de la circumferència:

$$r = |\vec{AM}| = \sqrt{(10-5)^2 + (0-0)^2} = 5$$

Per tant, l'equació de la cricumferència serà:

$$(x-10)^2 + (y-0)^2 = 5^2$$

$$\boxed{(x-10)^2 + y^2 = 25}$$

**4.** [1.5 PUNTS] Considereu les següents rectes:

$$r : 9x - 12y - 24 = 0$$

$$s : -6x + 8y + 4 = 0$$

**a.** [0.5 PUNTS] Expliqueu raonadament si les dues rectes són paral·leles, coincidents o bé secants.

**Solució:**

Estudiarem la posició relativa de les rectes a partir dels seus coeficients:

$$\frac{A}{A'} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{B}{B'} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{C}{C'} = \frac{-24}{4} = -6$$

Podem veure que $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, per tant, les rectes són paral·leles.

**b.** [1 PUNT] En cas que siguin secants trobeu el punt d'intersecció, si són paral·leles, la distància entre elles. En cas que siguin iguals doneu dos punts de $s$ que es trobin a distància 2.

**Solució:**

Com que són paral·leles, calcularem la distància entre elles.

Primerament, trobem un punt $P$ de la recta $r$:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 9 \cdot 0 - 12y - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2 \quad \rightarrow \quad P = (0, -2)$$

A partir d'aquest punt, calculem la distància entre dues rectes:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|-6 \cdot 0 + 8 \cdot (-2) + 4|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \frac{|-12|}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{d(r, s) = \frac{6}{5}}$$

**5.** [1.5 PUNTS] Troba la mediatriu del segment $\overline{AB}$, que té per extrems $A = (3,6)$ i $B = (7,-2)$, de dues maneres diferents seguint les següents definicions:

**a.** [0.5 PUNTS] La mediatriu d'un segment és la recta perpendicular al segment i que passa pel punt mig d'aquest.

**Solució:**

Primerament busquem un vector director de la recta que passa per $A$ i $B$:

$$\vec{AB} = (7-3, -2-6) = (4,-8)$$

A partir d'aquest podem trobar un vector perpendicular $\vec{v}$ que agafarem com a vector director de la mediatriu.

$$\vec{v} = (8,4)$$

Ara calculem el punt mig del segment $\overline{AB}$:

$$M_{AB} = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = (5,2)$$

Finalment, trobem l'equació de la mediatriu, per exemple a partir de l'equació contínua:

$$\frac{x-5}{8} = \frac{y-2}{4} \quad \rightarrow \quad 4x - 20 = 8y - 16$$

$$4x - 8y - 4 = 0$$

$$\boxed{x - 2y - 1 = 0}$$

**b.** [1 PUNT] El conjunt de punts (lloc geomètric) que equidisten (que estan a la mateixa distància) d'$A$ i de $B$, formen la mediatriu del segment $\overline{AB}$.

**Solució:**

Apliquem la condició del lloc geomètric donat considerant $P = (x,y)$ com a punt genèric:

$$d(P,A) = d(P,B)$$

$$|\vec{AP}| = |\vec{BP}|$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2}$$

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$8x - 16y - 8 = 0$$

$$\boxed{x - 2y - 1 = 0}$$

Podem veure que en els dos apartats obtenim la mateixa recta.