Examen trigonometria
1^r Batxillerat
10 d'abril de 2026

Nom i Cognoms: ______________________________

1. (1.5 punts) Demostreu el teorema del cosinus. Només cal donar un de les tres versions possibles.

2. (1 punt) Estudieu la continuïtat de la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq \pi \\ \dfrac{x+\pi}{2\pi} & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Solució:

L'únic punt problemàtic de la funció és en el canvi de branca. Per tant fem els límits laterals:

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \cos(x) = -1$$
$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{x+\pi}{2\pi} = \frac{\pi+\pi}{2\pi} = 1$$

Com els límits laterals existeixen però són diferents, la funció té una discontinuïtat de salt en $x = \pi$.

3. (2 punts) Calculeu els següents límits:

   (a) (1 punt) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x-\pi)} =$

   Solució:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x-\pi)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

   (b) (1 punt) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)\cdot\sin(x-\frac{\pi}{2})} =$

   Solució:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)\cdot\sin(x-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminació}$$

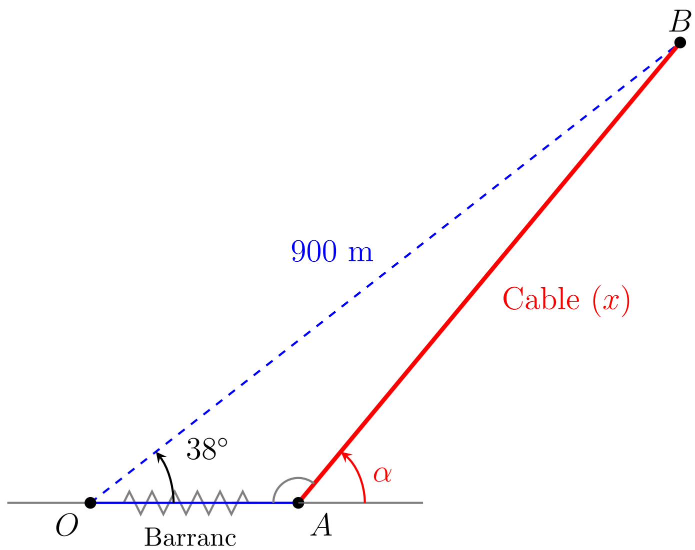
   Per resoldre la indeterminació caldrà simplificar les expressions del numerador i denominador. Fent servir la relació $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ i que $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$ obtenim:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)\cdot\sin(x-\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)\cdot(-\cos(x))}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos^2(x)}}{-\cancel{\cos^2(x)}} = -1$$

4. (3 punts) S'ha de projectar la construcció d'un telefèric que anirà des d'una futura estació base (punt A) fins al cim d'una muntanya (punt B).

Actualment, els enginyers topògrafs no poden accedir al punt A perquè es troba just a l'altra banda d'un barranc infranquejable. Per això, se situen en un punt d'observació O, que es troba exactament a la mateixa alçada horitzontal que el punt A, però a la seva banda del barranc.

Des del punt O, utilitzant els seus aparells, mesuren que la distància directa fins al cim B és de 900 m, la distància fins al futur punt A (a l'altra banda del barranc) és de 250 m, i l'angle d'elevació des d'es d'on són cap al cim B és de 38°.



Trobeu:

(a) (1 punt) La longitud que haurà de tenir el cable principal del telefèric (distància AB).

Solució:
Ens trobem davant del triangle OAB, del qual en coneixem dos costats ($OA = 250$ m i $OB = 900$ m) i l'angle que formen entre ells ($O = 38°$). Apliquem el Teorema del Cosinus per trobar el costat oposat AB (x):

$$x^2 = 250^2 + 900^2 - 2 \cdot 250 \cdot 900 \cdot \cos(38°)$$

$$x^2 = 62\,500 + 810\,000 - 450\,000 \cdot 0,7880$$

$$x^2 = 872\,500 - 354\,600$$

$$x^2 = 517\,900 \implies x = \sqrt{517\,900} \approx 719,65 \text{ m}$$

El cable del telefèric mesurarà aproximadament 719,65 metres.

(b) (1 punt) L'angle d'elevació α que tindrà el cable del telefèric un cop instal·lat des d'A.

Solució:
Per trobar l'angle α farem servir el teorema del sinus relacionant-lo amb el costat OB. Com $\sin(A) = \sin(\alpha)$ perquè són suplementaris, podem escriure directament:

$$\frac{x}{\sin(38°)} = \frac{900}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \frac{719,65}{\sin(38°)} = \frac{900}{\sin(\alpha)}$$

Aïllem el sinus de α:

$$\sin(\alpha) = \frac{900 \cdot \sin(38°)}{719,65} = \frac{900 \cdot 0,6157}{719,65} = \frac{554,13}{719,65} \approx 0,7700$$

Finalment, calculem l'angle aplicant l'arcsinus:

$$\alpha = \arcsin(0,7700) \approx 50,35°$$

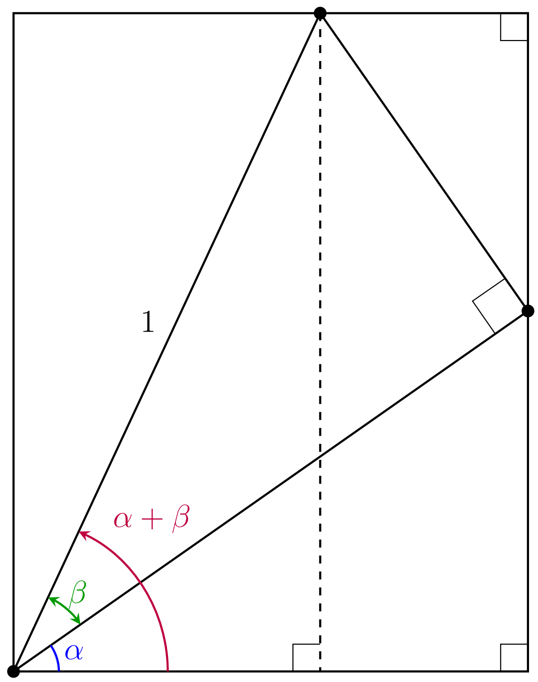
L'angle d'elevació del telefèric serà de 50,35°.

(c) (1 punt) El desnivell total que farà el telefèric.

Solució:
El desnivell, h, és el catet oposat a l'angle α del triangle rectangle format per ABP, on P és el punt del terra corresponent a la vertical des de B. Per tant:

$$h = x\sin(\alpha) = 719,65 \cdot \sin(50.35°) = 554.1 \text{ m}$$

5. (2.5 punts) Observeu la següent figura. Es tracta d'un rectangle que conté diversos triangles rectangles. L'objectiu és anar trobant la longitud de tots els segments indicats per deduir visualment les fórmules geomètriques de l'angle suma: $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$.



Responeu a les següents preguntes basant-vos en la trigonometria dels triangles rectangles:

(a) (0.25 punts) Fixeu-vos en el triangle rectangle interior que té l'angle β. Sabent que la seva hipotenusa val 1, quines expressions tenen els seus catets (base i altura)?

Solució:
Veure més avall

(b) (0.5 punts) Ara fixeu-vos en el triangle rectangle inferior (amb angle α). La seva hipotenusa és exactament el catet base que heu trobat a l'apartat a. Quines expressions tenen la base i l'altura d'aquest triangle inferior?

Solució:
Veure més avall

(c) (0.5 punts) Mireu el triangle rectangle de dalt a la dreta. Quines expressions tenen la base i l'altura d'aquest triangle?

Solució:
Veure més avall

(d) (0.5 punts) Obtingueu una fórmula per calcular $\sin(\alpha+\beta)$ (fixeu-vos que el costat dret està dividit en dos segments que cal sumar).

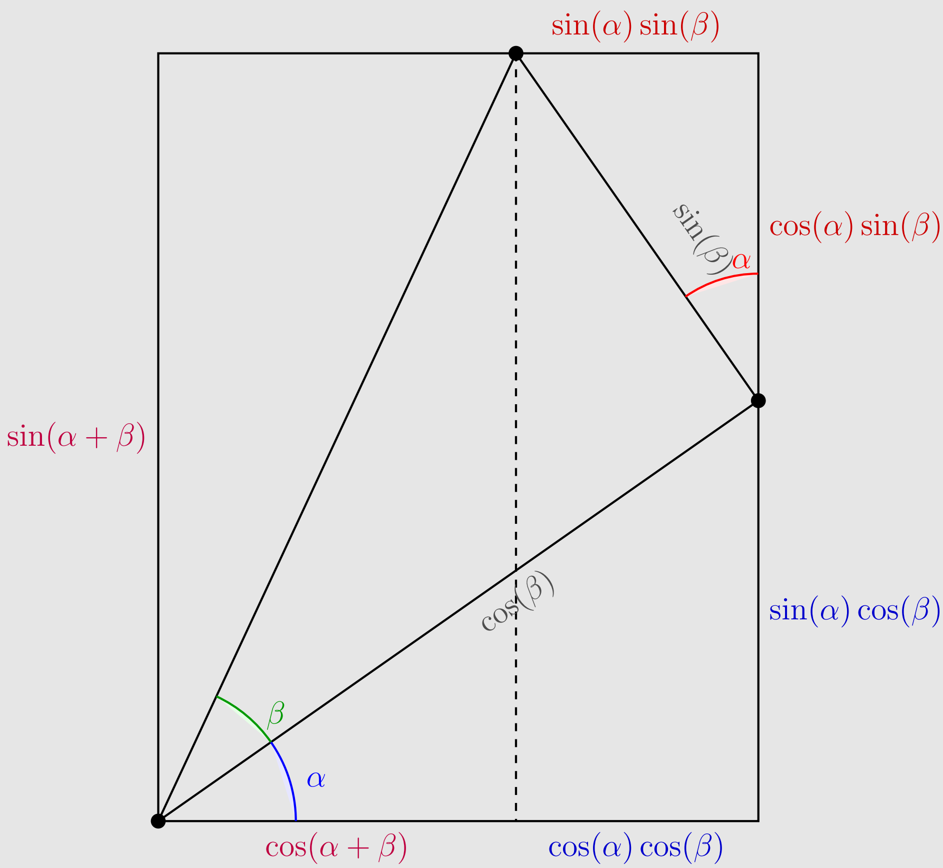
Solució:
Veure més avall

(e) (0.75 punts) Obtingueu una fórmula per calcular $\cos(\alpha+\beta)$.

Solució:
Veure més avall

Solució:

Les respostes dels tres primers apartats es troben a la següent figura:



L'expressió de $\sin(\alpha+\beta)$ la trobarem sumant els dos segments que formen el costat vertical del rectangle:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

L'expressió de $\cos(\alpha+\beta)$ la trobarem restant el costat horitzontal del rectangle menys l'altura del triangle rectangle superior dret:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$