

Exercicis resolts (o no) de matemàtiques de 1^r de Batxillerat

Curs 25-26

Índex

1 Successions	7
1.1 Relacions de recurrència, progressions aritmètiques i geomètriques . .	7
<i>Exercici: 1.1.1</i>	7
<i>Exercici: 1.1.2</i>	7
<i>Exercici: 1.1.3</i>	7
<i>Exercici: 1.1.4</i>	8
<i>Solució:</i>	8
<i>Exercici: 1.1.5</i>	9
<i>Exercici: 1.1.6</i>	9
<i>Exercici: 1.1.7</i>	9
<i>Exercici: 1.1.8</i>	9
<i>Exercici: 1.1.9</i>	10
<i>Exercici: 1.1.10</i>	10
<i>Exercici: 1.1.11</i>	10
<i>Exercici: 1.1.12</i>	10
<i>Exercici: 1.1.13</i>	10
<i>Exercici: 1.1.14</i>	10
<i>Exercici: 1.1.15</i>	11
<i>Exercici: 1.1.16</i>	11
<i>Exercici: 1.1.17</i>	11
1.2 Límits de successions	11
1.2.1 Successions racionals	11
<i>Exercici: 1.2.18</i>	11

1.2.2 Successions exponencials	12
<i>Exercici: 1.2.19</i>	12
1.2.3 Indeterminació $\infty - \infty$	12
<i>Exercici: 1.2.20</i>	12
Solució: Exercici 1.2.20	12
<i>Exercici: 1.2.21</i>	13
Solució: Exercici 1.2.21	14
<i>Exercici: 1.2.22</i>	15
<i>Exercici: 1.2.23</i>	15
Solució: Exercici 1.2.23	16
1.2.4 Indeterminació del tipus 1^∞	18
<i>Exercici: 1.2.24</i>	18
Solució: Exercici 1.2.24	18
<i>Exercici: 1.2.25</i>	20
<i>Exercici: 1.2.26</i>	20
<i>Exercici: 1.2.27</i>	20
<i>Exercici: 1.2.28</i>	20
<i>Exercici: 1.2.29</i>	21
1.3 Límits barrejats	21
<i>Exercici: 1.3.30</i>	21
<i>Exercici: 1.3.31</i>	21
Solució:	21
<i>Exercici: 1.3.32</i>	23
Solució:	23
<i>Exercici: 1.3.33</i>	24
Solució:	24
1.4 Solucions	25
2 Funcions	26
2.1 Imatge i antiimatge	26
<i>Exercici: 2.1.1</i>	26
<i>Exercici: 2.1.2</i>	26
2.2 Domini, punts de tall	26
<i>Exercici: 2.2.1</i>	26
<i>Exercici: 2.2.2</i>	26
<i>Exercici: 2.2.3</i>	26
<i>Exercici: 2.2.4</i>	27
Solució:	27

<i>Exercici: 2.2.5</i>	27
<i>Solució:</i>	27
<i>Exercici: 2.2.6</i>	29
2.3 Funcions a trossos	29
<i>Exercici: 2.3.1</i>	29
<i>Exercici: 2.3.2</i>	29
2.4 Factorització de polinomis	29
<i>Exercici: 2.4.1 Teorema dels residus</i>	29
<i>Exercici: 2.4.2</i>	29
<i>Exercici: 2.4.3</i>	30
<i>Solució:</i>	30
<i>Exercici: 2.4.4</i>	31
<i>Solució:</i>	31
2.5 Operacions amb funcions	33
<i>Exercici: 2.5.1</i>	33
<i>Solució:</i>	33
<i>Exercici: 2.5.2</i>	37
<i>Solució:</i>	37
2.6 Composició i inversa	39
<i>Exercici: 2.6.1</i>	39
<i>Solució:</i>	39
<i>Exercici: 2.6.2</i>	39
<i>Solució:</i>	40
<i>Exercici: 2.6.3</i>	41
<i>Exercici: 2.6.4</i>	41
<i>Solució:</i>	42
<i>Exercici: 2.6.5</i>	45
<i>Solució:</i>	46
<i>Exercici: 2.6.6</i>	46
<i>Solució:</i>	47
2.7 Continuïtat i límits laterals	47
<i>Exercici: 2.7.1</i>	47
<i>Exercici: 2.7.2</i>	48
<i>Solució:</i>	48
<i>Exercici: 2.7.3</i>	48
<i>Solució:</i>	49
<i>Exercici: 2.7.4</i>	49
<i>Solució:</i>	50

<i>Exercici: 2.7.5</i>	50
<i>Solució:</i>	51
<i>Exercici: 2.7.6</i>	55
<i>Exercici: 2.7.7</i>	55
<i>Solució:</i>	55
<i>Exercici: 2.7.8</i>	56
<i>Solució:</i>	56
<i>Exercici: 2.7.9</i>	57
<i>Solució:</i>	58
<i>Exercici: 2.7.10</i>	58
<i>Solució:</i>	59
<i>Exercici: 2.7.11</i>	61
<i>Solució:</i>	61
<i>Exercici: 2.7.12</i>	61
<i>Solució:</i>	62
<i>Exercici: 2.7.13</i>	62
3 Trigonometria	63
3.1 Raons trigonomètriques	63
<i>Exercici: 3.1.1</i>	63
<i>Exercici: 3.1.2</i>	63
<i>Solució:</i>	63
<i>Exercici: 3.1.3</i>	64
<i>Solució:</i>	64
<i>Exercici: 3.1.4</i>	66
<i>Solució:</i>	66
<i>Exercici: 3.1.5</i>	66
<i>Solució:</i>	66
<i>Exercici: 3.1.6</i>	66
<i>Solució:</i>	66
<i>Exercici: 3.1.7</i>	67
<i>Solució:</i>	67
<i>Exercici: 3.1.8</i>	68
<i>Exercici: 3.1.9</i>	68
<i>Solució:</i>	68
<i>Exercici: 3.1.10</i>	69
<i>Solució:</i>	69
<i>Exercici: 3.1.11</i>	70

<i>Exercici:</i> 3.1.12	71
<i>Solució:</i>	71
<i>Exercici:</i> 3.1.13	71
3.2 Teoremes del sinus i del cosinus	72
<i>Exercici:</i> 3.2.14	72
<i>Exercici:</i> 3.2.15	72
<i>Solució:</i>	72
<i>Exercici:</i> 3.2.16	73
<i>Solució:</i>	73
<i>Exercici:</i> 3.2.17	74
<i>Solució:</i>	74
<i>Exercici:</i> 3.2.18	74
<i>Solució:</i>	75
<i>Exercici:</i> 3.2.19	77
<i>Solució:</i>	77
<i>Exercici:</i> 3.2.20	77
<i>Solució:</i>	78
<i>Exercici:</i> 3.2.21	78
<i>Solució:</i>	79
<i>Exercici:</i> 3.2.22	79
<i>Solució:</i>	80
<i>Exercici:</i> 3.2.23	80
<i>Solució:</i>	81
<i>Exercici:</i> 3.2.24	81
<i>Solució:</i>	81
<i>Exercici:</i> 3.2.25	82
3.3 Funcions trigonomètriques	82
<i>Exercici:</i> 3.3.1	82
<i>Exercici:</i> 3.3.2	83
4 Geometria	84
4.1 Vectors	84
<i>Exercici:</i> 4.1.1	84
<i>Exercici:</i> 4.1.2 Paràmetre k	84
<i>Exercici:</i> 4.1.3	84
<i>Exercici:</i> 4.1.4 Hexàgon	84
<i>Exercici:</i> 4.1.5 Punts a certa distància	84
<i>Exercici:</i> 4.1.6 Extrem d'un segment	84

<i>Exercici:</i> 4.1.7 Triangle isòsceles	84
<i>Exercici:</i> 4.1.8	84
<i>Exercici:</i> 4.1.9	85
<i>Exercici:</i> 4.1.10	85
<i>Exercici:</i> 4.1.11	85
<i>Solució:</i>	85
<i>Exercici:</i> 4.1.12	85
<i>Exercici:</i> 4.1.13	85
<i>Solució:</i>	85
4.2 Rectes	86
<i>Exercici:</i> 4.2.1	86
<i>Exercici:</i> 4.2.2	86
<i>Exercici:</i> 4.2.3	86
<i>Solució:</i>	86
<i>Exercici:</i> 4.2.4	87
<i>Exercici:</i> 4.2.5	87
<i>Exercici:</i> 4.2.6	87
<i>Solució:</i>	87
<i>Exercici:</i> 4.2.7	89
<i>Solució:</i>	89
<i>Exercici:</i> 4.2.8	90
<i>Solució:</i>	90
4.3 Distàncies	90
<i>Exercici:</i> 4.3.1	90
<i>Solució:</i>	90
<i>Exercici:</i> 4.3.2	91
<i>Exercici:</i> 4.3.3	91
<i>Solució:</i>	91
<i>Exercici:</i> 4.3.4	92
<i>Solució:</i>	92
<i>Exercici:</i> 4.3.5	93
<i>Exercici:</i> 4.3.6	93
<i>Exercici:</i> 4.3.7	93
<i>Solució:</i>	93
4.4 Llocs geomètrics	94
<i>Exercici:</i> 4.4.1	94
<i>Exercici:</i> 4.4.2	95
<i>Solució:</i>	95

1 Successions

1.1 Relacions de recurrència, progressions aritmètiques i geomètriques

Exercici 1.1.1.

Digueu si les següents successions són aritmètiques o no. En cas afirmatiu trobeu a_1 , a_{50} i la diferència.

a) $a_n = \frac{n-3}{2}$

b) $a_n = n^2 - 2n + 3$

c) $a_n = 2n + 3$

d) $a_1 = 0$ i $a_n = a_{n-1} - 2$

e) $a_n = \frac{2n}{3} - \frac{n}{5}$

Exercici 1.1.2.

Visualitzeu el següent vídeo:

<https://www.youtube.com/watch?v=LpNHKkFSQII>

Feu servir el mateix raonament per sumar:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 200 =$$

Exercici 1.1.3.

Una successió geomètrica és aquella per la qual existeix algun valor, r , anomenat **raó** pel qual la successió compleix:

$$a_n = r \cdot a_{n-1}$$

Digueu si les següents successions són geomètriques. Doneu-ne la raó en cas que ho siguin.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)$

b) $a_n = 2^{n+3}$

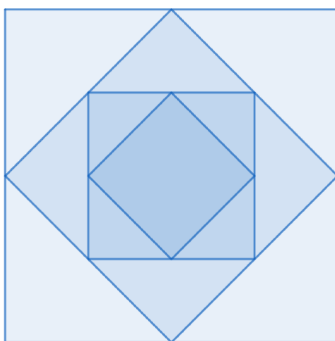
c) $a_n = 3^{2n}$

d) $a_n = 5^{2n-3}$

e) $a_n = 3^{-n+2}$

Exercici 1.1.4.

Considereu el quadrat exterior de la figura, que anomenarem Q_1 . Construïm el quadrat Q_2 unint els punts mitjos de cadascun dels quadrat Q_1 , el quadrat Q_3 unint els punts mitjos del quadrat Q_2 , i així successivament. A la imatge hi teniu representats fins a Q_4 , però el procés de construcció es pot fer indefinidament.



- a) Suposant que el costat del primer quadrat val 4, quant val el perímetre del quadrat Q_{15} ?

Solució .

Diguem P_n al perímetre del quadrat obtingut al pas n . Clarament tenim que

$$P_n = 4 \cdot c_n$$

on c_n és el costat del quadrat n -èssim. Investiguem com s'obté la longitud del costat c_n . La relació entre el costat d'un quadrat i el costat del següent quadrat ens la dona el teorema de Pitàgores:

$$c_{n+1}^2 = \left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_n}{2}\right)^2$$

d'on

$$c_{n+1}^2 = \frac{2c_n^2}{4} \Rightarrow c_{n+1}^2 = \frac{c_n^2}{2} \Rightarrow c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n^2}{2}}$$

D'aquí traiem que

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{\sqrt{2}}$$

Multiplicant per 4 a banda i banda obtindrem la relació entre el perímetre d'un quadrat i el següent:

$$P_{n+1} = 4 \frac{c_n}{\sqrt{2}} \implies P_{n+1} = \frac{P_n}{\sqrt{2}}$$

Per tant, els perímetres segueixen una successió geomètrica de raó $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Com el perímetre inicial és de 16, el terme general serà:

$$P_n = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$$

El perímetre del 15^è quadrat serà:

$$P_{15} = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{14}$$

b) *Si repetíssim el procés indefinidament, quant valdria la suma dels perímetres de tots els quadrats?*

Exercici 1.1.5.

Sabent que una successió aritmètica compleix que $a_2 = 4$ i $a_{15} = 20$, trobeu-ne la diferència, el terme general i el terme a_0 .

Exercici 1.1.6.

La següent successió aritmètica té l'expressió $a_n = a_0 + n \cdot d$, on d és la diferència. La successió també es pot escriure com $a_n = a_3 + \dots$. Completeu-ne l'expressió.

Exercici 1.1.7.

D'una successió aritmètica compleix que:

- $a_3 = 5$
- $\sum_{n=1}^{40} = 5000$

Trobeu-ne el terme general.

Exercici 1.1.8.

Demostreu que la següent successió és geomètrica:

$$a_n = 4^{2n-3}$$

Expresseu-la com a relació de recurrència.

Exercici 1.1.9.

Trobeu la suma dels 100 primers múltiples de 6.

Exercici 1.1.10.

Trobeu la suma dels 100 primers múltiples de 6 però que no siguin múltiples de 5.

Exercici 1.1.11.

Un corredor decideix córrer els dos últims metres que li falten per arribar a la meta de manera que cada passa mesura la meitat de l'anterior. Diguem que l és el que mesura la primera passa.

- a) *Si anomenem n el nombre de passes que ha fet, escriviu en funció de l la successió que ens dona la distància que li falta per arribar a la meta.*
- b) *Digueu per a quins valors de l el corredor podrà creuar la meta en el algun moment i per a quins valors no hi arribarà mai.*

Exercici 1.1.12.

Considereu l'exercici 1.1.4. Feu el mateix amb l'àrea en lloc del perímetre.

Exercici 1.1.13.

D'una successió aritmètica sabem que

$$\begin{aligned} &\bullet \sum_{i=1}^{50} a_i = 200 \\ &\bullet \sum_{i=1}^{100} a_i = 3000 \end{aligned}$$

Trobeu-ne el terme general.

Exercici 1.1.14.

Demostreu si les següents successions són aritmètiques, geomètriques o cap de les dues.

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$

b) $a_n = \frac{2^n}{4^{n+1}}$

c) $a_n = 2n + 1$

d) $a_n = n^2 - 3$

Exercici 1.1.15.

Una pilota per energia en rebotar al terra, de manera que, després de cada bot, l'altura a la que arriba és $\frac{3}{4}$ vegades l'altura anterior.

- a) Raoneu que la successió formada per les altura a la que arriba la pilota a cada bot segueix una successió geomètrica.
- b) Trobeu l'altura a la que arriba la pilota al cap de 15 rebots si s'ha llençat des d'una altura inicial de 2 metres.
- c) Trobeu la suma de les 30 primeres alçades
- d) Si suméssim totes les alçades indefinidament, quin valor acabaríem obtenint?

Exercici 1.1.16.

Obtingueu la suma dels 1000 primers múltiples de 2 però que no són múltiples de 3 ni de 7.

Exercici 1.1.17.

Considereu la successió donada en forma recurrent:

$$a_n = 2 \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

amb $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$

- a) Trobeu a_{1000}

- b) Calculeu $\sum_{i=1}^{200} a_i$

1.2 Límits de successions

1.2.1 Successions racionals

Exercici 1.2.18.

Calculeu el límit de les següents successions

a) $a_n = \frac{n^2 - 3n - 1}{2n^2 + 3n + 1}$

c) $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n + 2}$

b) $a_n = \frac{-n^3 + 2n + 1}{n^4 + 3n^2 + 2n - 1}$

d) $a_n = \frac{n^5 + 2n^4 + 3n - 2}{-n^2 + 3n + 2}$

$$e) a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 - 3n + 10} - \frac{3n^3 + 10}{2n^3 - 2n + 6}$$

1.2.2 Successions exponencials

Exercici 1.2.19.

Calculeu el límit de les següents successions

$$a) a_n = \left(2 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{n^2 - 3}$$

$$f) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{3n^3}$$

$$b) a_n = \left(\frac{3n^2 + n + 10}{4n^2 - 5n + 1}\right)^{-n^3 + 10}$$

$$g) a_n = \left(1 + \frac{2}{3n^2 + 2n + 1}\right)^{n^2 - 6n + 1}$$

$$c) a_n = \left(\pi + \frac{n^2 - 1}{n^4 + 2n^3 - 2n + 1}\right)^{\frac{2n^2 - n - 1}{4n^2 - 2n + 1}}$$

$$h) a_n = \left(2 - \frac{3n^2 - 1}{3n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1}$$

$$d) a_n = 1 - \left(\frac{13}{10}\right)^{-n^2}$$

$$e) \lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} =$$

$$i) a_n = \left(1 + \frac{n}{n^2 - 2n + 1}\right)^{-n^2 + 1}$$

1.2.3 Indeterminació $\infty - \infty$

Exercici 1.2.20.

Calculeu, si existeixen, els límits de les següents successions

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{n^2} - \frac{3n^2 + 1}{2n} =$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{n + 2} - \frac{-n^2 + 5}{n - 2} =$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{n^2 + n} - \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} =$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n^2 - 6n + 2} - \frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^2 + 3} =$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n^3 + 2n + 2}{n^2 - 1} - \frac{n^2 + 5n - 1}{n + 2} =$$

Solució

Solució Exercici 1.2.20.

a) Simplificant els termes de grau més baix obtenim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{n^2} - \frac{3n^2 + 1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n - \frac{2n}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{3} = \infty$$

b) Si simplifiquem els ordre més petits el límit s'anul·len els més grans. Per tant, cal considerar els ordre més baixos també i agrupar. Resulta que, al numerador, s'anul·len tots els ordres fins a grau 2. Al denominador, en canvi, ens queda grau 5. Per tant, el límit és 0:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{n^2 + n} - \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + n)(n^2 - 1) - (n^3 - 1)(n^2 + n)}{(n^3 + n)(n^2 - 1)} = \\ &= \frac{\cancel{n^5} - \cancel{n^4} + \cancel{n^3} - \cancel{n^2} + n^2 + \dots}{n^5 + \dots} = 0 \end{aligned}$$

c) Simplificant els ordres més petits obtenim que el primer terme és de grau 2 i el segon (el que resta) de grau 1. Per tant, la successió és divergent (el límit no existeix):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n^3 + 2n + 2}{n^2 - 1} - \frac{n^2 + 5n - 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^2} - \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = \infty$$

d) No es tracta cap indeterminació, el límit dona $\infty + \infty$ perquè hi ha un doble signe negatiu. Per tant, la successió és divergent.

e) En aquest cas, en simplificar els ordres més petits, els ordre més grans s'anul·len. Per tant, hem de tenir en compte els ordres més petits:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n^2 - 6n + 2} - \frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^5 - n^4 + 2n^2 - 1)(n^2 + 3) - (n^4 - 3n^2 + 1)(n^3 + 2n^2 - 6n + 2)}{(n^3 + 2n^2 - 6n + 2)(n^2 + 3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^7} - \cancel{n^6} - n^6 - 2n^6 + \dots}{n^5 + \dots} = -\infty \end{aligned}$$

Exercici 1.2.21.

Calculeu el límit de les següents successions

$$\begin{aligned} a) \quad a_n &= \frac{n^2 - 3n + 1}{n + 3} - \frac{n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{n^2 - 1} & c) \quad a_n &= \frac{n^5 + 3n^2 - 2n + 1}{n^4 + 10n^3 - 5n^2 + 1} - \frac{n^5 + 6n^4 - 10n^3 + 3n^2 - 2n + 2}{n^3 - n^2 + n - 2} \\ b) \quad a_n &= \frac{n^4 + 3n + 1}{n^2 - 1} - \frac{n^3 + 2n - 1}{n + 1} \end{aligned}$$

Solució

Solució Exercici 1.2.21.

a)

$$a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n + 3} - \frac{n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{n^2 - 1}.$$

Menyspreant ordres menors:

$$\frac{n^2 - 3n + 1}{n + 3} \sim n, \quad \frac{n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{n^2 - 1} \sim n.$$

Dominants s'anul·len $\rightarrow$ cal agrupar:

$$\frac{(n^2 - 3n + 1)(n^2 - 1) - (n^3 - 2n^2 + 3n + 1)(n + 3)}{(n + 3)(n^2 - 1)}.$$

Numerador dominant:

$$n^4 - n^3 - (n^4 + 3n^3) = -4n^3.$$

Denominador dominant (n^3), per tant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^3}{n^3} = -4.$$

$$\boxed{-4.}$$

b)

$$a_n = \frac{n^4 + 3n + 1}{n^2 - 1} - \frac{n^3 + 2n - 1}{n + 1}.$$

Menyspreant ordres menors:

$$\frac{n^4 + 3n + 1}{n^2 - 1} \sim n^2, \quad \frac{n^3 + 2n - 1}{n + 1} \sim n^2.$$

Dominants s'anul·len $\rightarrow$ agrupar:

$$\frac{(n^4 + 3n + 1)(n + 1) - (n^3 + 2n - 1)(n^2 - 1)}{(n^2 - 1)(n + 1)}.$$

Numerador dominant:

$$n^4 n = n^5 \quad (\text{cancel·lat amb } n^3 n^2 = n^5), \quad 3nn = 3n^2 (\text{dominant següent}), \text{ etc.}$$

Simplificant els primers termes dominants, s'obté $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

$$\boxed{+\infty}.$$

c)

$$a_n = \frac{n^5 + 3n^2 - 2n + 1}{n^4 + 10n^3 - 5n^2 + 1} - \frac{n^5 + 6n^4 - 10n^3 + \dots}{n^3 - n^2 + n - 2}.$$

Menyspreant ordres menors:

$$\frac{n^5 + \dots}{n^4 + \dots} \sim n, \quad \frac{n^5 + \dots}{n^3 + \dots} \sim n^2.$$

El segon terme domina, per tant $a_n \rightarrow -\infty$.

$$\boxed{-\infty}.$$

Exercici 1.2.22.

Calculeu el límit de les següents successions

$$\begin{aligned} a) \ a_n &= \frac{n^2 - 3n + 1}{n + 3} - \frac{n^3 - 2n^2 + 3n + 1}{n^2 - 1} & c) \ a_n &= \frac{n^5 + 3n^2 - 2n + 1}{n^4 + 10n^3 - 5n^2 + 1} - \frac{n^5 + 6n^4 - 10n^3 + 3n^2 - 2n + 2}{n^3 - n^2 + n - 2} \\ b) \ a_n &= \frac{n^4 + 3n + 1}{n^2 - 1} - \frac{n^3 + 2n - 1}{n + 1} \end{aligned}$$

Exercici 1.2.23.

Calculeu els límits, si existeixen, de les següents successions:

$$\begin{aligned} a) \ a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2n}{n^2 + 1} - n \right) \\ b) \ a_n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x - 1} \right) \end{aligned}$$

$$c) a_n = \frac{2n^2 + 3n}{n + 1} - 2n$$

$$d) a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + n}$$

$$e) a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

$$f) a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 4n + 1}{n + 1} - \frac{4n^4 - 2n^3 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 1}$$

$$g) a_n = \frac{4n^{10} + 5n^9 - 3n^2 + 3n + 10}{n^7 - 2n^4 + 5n^2 + 1} - \frac{3n^{20} - 2n^{15} + 3n^2 + 3n - 5}{5n^{18} - 3n^5 + 1000n^3 - 2n^2 + 30}$$

Solució

Solució Exercici 1.2.23.

a)

$$a_n = \frac{n^3 + 2n}{n^2 + 1} - n$$

Menyspreant ordres menors:

$$\frac{n^3 + 2n}{n^2 + 1} \sim n, \quad n \sim n.$$

Dominants s'anul·len $\rightarrow$ cal agrupar:

$$\frac{n^3 + 2n - n(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0.$$

0.

b)

$$a_n = \sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x - 1}.$$

Dominants s'anul·len $\rightarrow$ multipliquem pel conjugat:

$$\frac{(x^2 + 5x + 4) - (x^2 + 3x - 1)}{\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x^2 + 3x - 1}} = \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x^2 + 3x - 1}}.$$

Menyspreant els termes menors dins les arrels:

$$\frac{2x + 5}{x + x} \sim \frac{2x}{2x} = 1.$$

1.

c)

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{n + 1} - 2n.$$

Dominants s'anul·len $\rightarrow$ cal agrupar:

$$\frac{2n^2 + 3n - 2n(n + 1)}{n + 1} = \frac{n}{n + 1} \rightarrow 1.$$

1.

d)

$$a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + n}.$$

Multipliquem pel conjugat i menyspreem termes menors:

$$\frac{2n}{\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2 + n}} \sim \frac{2n}{n + n} = 1.$$

1.

e)

$$a_n = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}.$$

Multipliquem pel conjugat i menyspreem termes petits dins arrels:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} \sim \frac{x}{x + x} = \frac{1}{2}.$$

1/2.

f)

$$a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 4n + 1}{n + 1} - \frac{4n^4 - 2n^3 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 1}.$$

Menyspreem ordres menors:

$$\frac{2n^3 + \dots}{n + 1} \sim 2n^2, \quad \frac{4n^4 + \dots}{2n^2 + \dots} \sim 2n^2.$$

Dominants s'anul·len $\rightarrow$ cal agrupar:

numerador dominant $\sim -7n^3$, denominador dominant $\sim n^3 \implies a_n \sim -7 \rightarrow -\infty$.

$-\infty$.

g)

$$a_n = \frac{4n^{10} + 5n^9 - 3n^2 + \dots}{n^7 - 2n^4 + \dots} - \frac{3n^{20} - 2n^{15} + \dots}{5n^{18} - 3n^5 + \dots}.$$

Menyspreant ordres menors:

$$\frac{4n^{10}}{n^7} \sim 4n^3, \quad \frac{3n^{20}}{5n^{18}} \sim \frac{3}{5}n^2.$$

Primer terme domina $\rightarrow a_n \rightarrow +\infty$. $\boxed{+\infty.}$

1.2.4 Indeterminació del tipus 1^∞

Exercici 1.2.24.

Calculeu els límits, si existeixen, de les següents successions:

a) $a_n = \left(1 + \frac{2}{3n+1}\right)^{2n}$

b) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n}$

c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$

d) $a_n = \left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

f) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Solució

Solució Exercici 1.2.24.

a)

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{3n+1}\right)^{2n}.$$

La base ja està en forma $1 + X$ amb $X = \frac{2}{3n+1} \rightarrow 0$. Exponent $2n \rightarrow \infty \rightarrow$ indeterminació 1^∞ .

Reescrivim $X = \frac{1}{(3n+1)/2}$ i apliquem la regla:

$$\left(1 + \frac{2}{3n+1}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{(3n+1)/2}\right)^{(3n+1)/2}\right]^{\frac{4n}{3n+1}} \rightarrow e^{4/3}.$$

$$\boxed{e^{4/3}}$$

b)

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n}.$$

$X = -2/n \rightarrow 0$, exponent $2n \rightarrow \infty$.

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n\right]^2 \rightarrow (e^{-2})^2 = e^{-4}.$$

$$\boxed{e^{-4}}$$

c)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}.$$

$X = 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$, exponent $\sqrt{n} \rightarrow \infty$:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \rightarrow e^1 = e.$$

$$\boxed{e}$$

d)

$$a_n = \left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^n.$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right]^{1/2} \rightarrow \sqrt{e}.$$

$$\boxed{\sqrt{e}}$$

e)

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n \rightarrow e^n \rightarrow +\infty.$$

$+\infty$

f)

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e.$$

e

Exercici 1.2.25.

Calculeu el límit de les següents successions

$$a) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{2n^2 - 3n + 1} \qquad c) a_n = \left(2 - \frac{n+1}{n-1}\right)^{3n-1}$$

$$b) a_n = \left(1 + \frac{3}{n+4}\right)^{4n-2} \qquad d) a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}$$

Exercici 1.2.26.

Sabent que $b \in \mathbb{R}$, calculeu el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n$$

Exercici 1.2.27.

Sabent que $c \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, trobeu una fórmula per calcular el límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{b_n}\right)^{b_n}$$

Apliqueu-la per calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2}$$

Exercici 1.2.28.

Sabent que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, trobeu una fórmula per calcular

$$(1 + a_n)^{b_n}$$

Feu-la servir per calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{3n^2}$$

Exercici 1.2.29.

Sabent que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ i que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, trobeu una fórmula per calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n}$$

Feu-la servir per calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{2n^2 - 3n + 10} \right)^{4n+1}$$

1.3 Límits barrejats

Exercici 1.3.30.

Calculeu els següents límits, si existeixen:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 2n - 2} \right)^{2n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^4 - 3n^2 - 2n - 1} - \sqrt{4n^4 + 2n^2 - 3n + 1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2n^3 + 1}{3n^2 + 2n - 1} \right)^{2n^3 - 1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 3}{5n^2 + 2n + 1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{n + 1} - \frac{2n^2 + n + 1}{2n + 3}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 2n^4 + 3n + 1}{n^3 + 2n^2 - 3n - 3} - \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 - 10}{n^2 + 2n + 2}$

Exercici 1.3.31.

Calculeu el següent següent límit d'una successió:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right)^{2n}$$

Solució .

Animació de la solució

Primer analitzem la base de la potència per veure si tenim una indeterminació. Multipliquem i dividim pel conjugat:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + n} = \frac{2n}{2n} = 1\end{aligned}$$

Per tant, tenim una indeterminació del tipus 1^∞ . Apliquem la fórmula del número e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) \cdot b_n}$$

Calculem el límit de l'exponent:

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} - 1 \right) \cdot 2n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - (\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right) \cdot 2n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 2n}}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right) \cdot 2n\end{aligned}$$

Per resoldre aquesta part, tornem a multiplicar pel conjugat, aquest cop el del numerador $(n + \sqrt{n^2 + 2n})$:

$$\begin{aligned}n - \sqrt{n^2 + 2n} &= \frac{(n - \sqrt{n^2 + 2n})(n + \sqrt{n^2 + 2n})}{n + \sqrt{n^2 + 2n}} \\ &= \frac{n^2 - (n^2 + 2n)}{n + \sqrt{n^2 + 2n}} = \frac{-2n}{n + \sqrt{n^2 + 2n}}\end{aligned}$$

Substituïm això en l'expressió del límit L :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2n}{n + \sqrt{n^2 + 2n}}}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \cdot 2n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n \cdot 2n}{(n + \sqrt{n^2 + 2n})(\sqrt{n^2 + 2n} + n)} \\ &\sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2}{(2n)(2n)} = \frac{-4n^2}{4n^2} = -1 \end{aligned}$$

Finalment, el resultat del límit original és:

$$e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Exercici 1.3.32.

Calculeu el següent límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n} \right)^{2n^2+1}$$

Solució .

Animació de la solució

Primer simplifiquem la base fent denominador comú:

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n} &= \frac{n^3 - (n^2+1)(n-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{n^3 - (n^3 - n^2 + n - 1)}{n^2 - n} \\ &= \frac{n^3 - n^3 + n^2 - n + 1}{n^2 - n} \\ &= \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n} \end{aligned}$$

Si calculem el límit de la base quan $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n} = 1$$

Així doncs, tenim una indeterminació del tipus 1^∞ . Apliquem de nou la fórmula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) \cdot b_n}$$

Calculem l'exponent:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n} - 1 \right) \cdot (2n^2 + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 1 - (n^2 - n)}{n^2 - n} \right) \cdot (2n^2 + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 - n} \right) \cdot (2n^2 + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - n} \end{aligned}$$

Com que els graus del numerador i del denominador són iguals (grau 2), dividim els coeficients principals:

$$L = \frac{2}{1} = 2$$

Per tant, el resultat final del límit és:

$$\boxed{e^2}$$

Exercici 1.3.33.

Calculeu els següents límits:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n - 1} - \frac{n^2 + 2}{n + 1} \right)^{2n+1}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n + 1} - \frac{2n^2}{2n + 1} \right)^{\frac{2n^2+1}{2n-1}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5n}{n + 1} - \frac{n^2 + n}{n - 1} \right)^{\frac{n^2+1}{2n^2+2n-1}}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} - \frac{n^2}{2n + 1} \right)^{\frac{2n+1}{4n+3}}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 4n}{n + 1} - 3n \right)^{2n+1}$$

Solució .

$$a) 2^\infty = \infty$$

$$d) 0$$

$$b) \sqrt{2}$$

$$c) \frac{1}{e^2}$$

$$e) \frac{1}{2}$$

1.4 Solucions

2 Funcions

2.1 Imatge i antiimatge

Exercici 2.1.1.

Digueu quines de les gràfiques de les següents funcions passen pel punt $(1, -1)$:

1. $f(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = -\frac{\sqrt{x^2+3}}{2}$

3. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$

Exercici 2.1.2.

Trobeu el valor de a per tal que la funció

$$f(x) = \frac{2x + a}{x^2 + 4}$$

passi pel punt $(-1, 3)$.

2.2 Domini, punts de tall

Exercici 2.2.1.

Trobeu el domini i els punts de tall amb els eixos de les següents funcions

a) $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{2x + 4}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$

Exercici 2.2.2.

Trobeu els dominis i els punts de tall de les següents funcions

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 1}}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x + 1}}$

Exercici 2.2.3.

Discutiu segons els valors del paràmetre b el domini i els punts de tall amb els eixos de la següent funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + bx + 1}$$

Exercici 2.2.4.

Trobeu el domini de la funció

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

Solució .

El radicand ha de ser positiu o nul. Busquem arrels del polinomi $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Com és de grau 3 buscarem arrels enteres. Els candidats són els divisors del terme independent (6): $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Provem, per Ruffini, amb $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Com que el residu és 0, -1 és una arrel. El polinomi resultant és $x^2 - 5x + 6$. Ara trobem les altres arrels resolent l'equació de segon grau:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Les arrels són $-1, 2$ i 3 . Situem aquests punts a la recta real i estudiem el signe del polinomi en cada interval resultant:



El domini és la unió dels intervals on el radicand és positiu o nul:

$$\text{Dom}(f) = [-1, 2] \cup [3, +\infty)$$

Exercici 2.2.5.

Trobeu el domini de la funció

$$f(x) = \frac{2x}{x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 18x}$$

Solució .

El domini d'una funció racional són tots els reals excepte els valors que anul·len el denominador. Hem de resoldre l'equació $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 18x = 0$.

Primer, traiem factor comú x :

$$x(x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 15x + 18) = 0$$

Ja tenim la primera arrel: $x_1 = 0$.

Ara busquem les arrels del polinomi de grau 4: $Q(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 15x + 18$. Els divisors del terme independent (18) són $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Comencem provant amb el candidat més senzill, $x = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 9 & -15 & 18 \\ & & 1 & -4 & 5 & -10 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -10 & 8 \end{array}$$

Com veiem, el residu és $8 \neq 0$, per tant $x = 1$ **no** és arrel. Provem amb el següent candidat, $x = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & 9 & -15 & 18 \\ & & 2 & -6 & 6 & -18 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -9 & 0 \end{array}$$

Aquí el residu és 0, així que $x_2 = 2$ sí que és arrel. El polinomi es redueix a $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$. Continuem aplicant Ruffini sobre aquest resultat, provant ara amb $x = 3$:

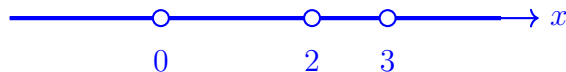
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 3 & -9 \\ & & 3 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

El residu és 0, per tant $x_3 = 3$ és arrel. El quocient resultant és $x^2 + 3$. Si l'igualem a 0:

$$x^2 + 3 = 0 \implies x^2 = -3 \implies x = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

Aquesta part no té solucions reals.

Per tant, els punts a excloure del domini són 0, 2 i 3. Representem la recta real amb aquests punts buits:



Finalment, el domini és:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}$$

Exercici 2.2.6.

Trobeu el domini i els punts de tall de les següents funcions

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 3} & \end{cases}$$

2.3 Funcions a trossos

Exercici 2.3.1.

Trobeu el domini i els punts de tall amb els eixos de la següent funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 6} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercici 2.3.2.

Feu la gràfica de la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2.4 Factorització de polinomis

Exercici 2.4.1: Teorema dels residus.

Considereu el polinomi:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

amb a_i coeficients enters.

Demostreu que, si $x = c$ és una arrel entera de $p(x)$, aleshores c divideix a_0 .

Exercici 2.4.2.

Factoritzeu els següents polinomis i comproveu el resultat desfent els parèntesis de la factorització:

a) $p(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $p(x) = x^2 - 4$

c) $p(x) = 3x^2 - 6x - 9$

d) $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

Exercici 2.4.3.

Trobeu el residu i el quocient de les següents divisions. Comproveu la relació entre els 4 polinomis implicats (divident, divisor, quocient i residu).

a) $(x^2 - 2x + 3) : (x^2 + 4)$

b) $(x^4 - x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x)$

d) $(x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2) : (x^2)$

Solució .

Trobem el quocient i el residu i comprovem la relació $D = d \cdot q + r$.

a) $(x^2 - 2x + 3) : (x^2 + 4)$

Fem la divisió:

$$\begin{array}{r} (x^2 - 2x + 3) : (x^2 + 4) = 1 + \frac{-2x - 1}{x^2 + 4} \\ \underline{-x^2 \quad -4} \\ -2x - 1 \end{array}$$

Resultat: $q(x) = 1$, $r(x) = -2x - 1$.

Comprovació: $(x^2 + 4) \cdot 1 + (-2x - 1) = x^2 - 2x + 3 \quad \checkmark$

b) $(x^4 - x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 1)$

Fem la divisió:

$$\begin{array}{r} (x^4 - x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 1) = x^2 + x + 3 + \frac{5x - 2}{x^2 - 2x + 1} \\ \underline{-x^4 + 2x^3 - x^2} \\ x^3 + x^2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2 - x} \\ 3x^2 - x + 1 \\ \underline{-3x^2 + 6x - 3} \\ 5x - 2 \end{array}$$

Resultat: $q(x) = x^2 + x + 3$, $r(x) = 5x - 2$.

Comprovació: $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x + 3) + (5x - 2) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 \quad \checkmark$

c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : x$

Simplifiquem la fracció directament:

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x} = x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x}$$

Quocient: $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, Residu: $r(x) = 1$.

d) $(x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2) : x^2$

Simplifiquem:

$$\frac{x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2}{x^2} = x^4 + x^2 + 2x + 1$$

Quocient: $q(x) = x^4 + x^2 + 2x + 1$, Residu: $r(x) = 0$.

Exercici 2.4.4.

Factoritzeu els següents polinomis utilitzant la regla de Ruffini per trobar les arrels enteres:

a) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

c) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

d) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

e) $p(x) = x^3 - 7x + 6$

f) $p(x) = x^3 - 3x - 2$

g) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

h) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Solució .

a) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Provem amb $x = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Queda $x^2 - x - 2$. Factoritzant: $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

b) $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Provem amb $x = 1$:

$$1 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right.$$

Queda $x^2 + 5x + 6$. Factoritzant: $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$.

c) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Provem amb $x = 1$:

$$1 \left| \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ & & 1 & 1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array} \right.$$

Seguim factoritzant el quocient $x^3 + x^2 - 4x - 4$. Arrels finals: $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

d) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$. Provem amb $x = -1$:

$$-1 \left| \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & -3 & 2 \\ & & -2 & 5 & -2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & 0 \end{array} \right.$$

Queda $2x^2 - 5x + 2$. Resolem l'equació de 2n grau ($x = 2, x = 1/2$). Factorització: $(x + 1)(x - 2)(2x - 1)$.

e) $p(x) = x^3 - 7x + 6$. (Observa que falta el terme x^2 , Ruffini posarà un 0). Provem amb $x = 1$:

$$1 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right.$$

Queda $x^2 + x - 6$. Factoritzant: $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

f) $p(x) = x^3 - 3x - 2$. Provem amb $x = -1$:

$$-1 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right.$$

Queda $x^2 - x - 2$. Factoritzant: $(x + 1)^2(x - 2)$.

g) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Provem amb $x = 1$:

$$1 \left| \begin{array}{rrrr} 1 & -6 & 11 & -6 \\ & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \right.$$

Queda $x^2 - 5x + 6$. Factoritzant: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

h) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$. Biquadrada. Provem amb $x = 2$:

$$2 \left| \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -13 & 0 & 36 \\ & 2 & 4 & -18 & -36 \\ \hline & 1 & 2 & -9 & -18 & 0 \end{array} \right.$$

Si seguim factoritzant: $(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

2.5 Operacions amb funcions

Exercici 2.5.1.

Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 7x - 6} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

- Trobeu el domini de f i g
- Trobeu els punts de tall de f i g amb els eixos.
- Trobeu el domini i els punts de tall de les funcions $(f \cdot g)(x)$ i $(f/g)(x)$
- Trobeu el domini i els punts de tall de les funcions

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq -1 \\ g(x) & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad i(x) = \begin{cases} (f \cdot g) & \text{si } x < 0 \\ (f/g) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solució .

a) **Dominis de f i g**

Per a $f(x)$, el denominador no pot ser nul. Busquem les arrels de $x^3 - 7x - 6$. Provem amb els divisors de 6 ($\pm 1, \pm 2, \dots$). Provem $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

El residu és 0. Resolem l'equació de 2n grau resultant $x^2 - x - 6 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \implies \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Les arrels del denominador són $\{-2, -1, 3\}$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3\}$$

Per a $g(x)$, el radicand ha de ser no negatiu: $x^2 - 4 \geq 0 \implies x^2 \geq 4 \implies |x| \geq 2$.

$$\text{Dom}(g) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

b) **Punts de tall amb els eixos**

Funció $f(x)$:

- Eix Y ($x = 0$): $f(0) = 4/(-6) = -2/3$. Punt: $(0, -2/3)$.
- Eix X ($f(x) = 0$): Numerator $x^2 - 5x + 4 = 0$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \implies x = 4, x = 1$$

Com que $1, 4 \in \text{Dom}(f)$, els punts són $(1, 0)$ i $(4, 0)$.

Funció $g(x)$:

- Eix Y ($x = 0$): $0 \notin \text{Dom}(g)$, per tant no talla l'eix vertical.
- Eix X ($g(x) = 0$): $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$. Punts: $(-2, 0)$ i $(2, 0)$.

c) **Operacions $(f \cdot g)$ i (f/g)**

El domini base per a les operacions és la intersecció $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.



La intersecció és: $D_{\cap} = (-\infty, -2) \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$. (El -2 s'exclou perquè no està a f , el 2 s'inclou).

Producte $(f \cdot g)$:

- Domini: $D_{\cap} = (-\infty, -2) \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$.
- Tall Eixos:
 - Eix Y: No definit en 0.
 - Eix X: $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$ dins del domini. Arrels possibles: $1, 4$ (de f) i ± 2 (de g). Comprovem validesa al domini comú: $1 \notin D_{\cap}$, $-2 \notin D_{\cap}$. $4 \in D_{\cap}$, $2 \in D_{\cap}$. Punts: $(2, 0)$ i $(4, 0)$.

Quocient (f/g) :

- Domini: $D_{\cap} \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Hem de treure ± 2 . El -2 ja estava fora, ara traiem el 2 . Dom: $(-\infty, -2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.
- Tall Eixos: Només on $f(x) = 0$. Arrels $1, 4$. El 1 no és al domini. El 4 sí. Punt: $(4, 0)$.

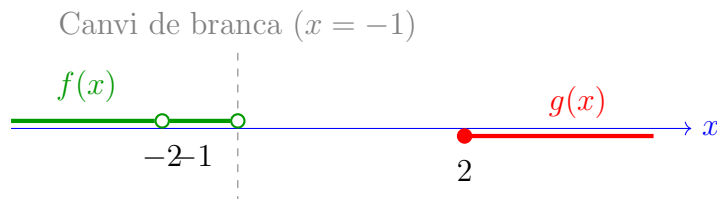
d) **Funcions a trossos** $h(x)$ i $i(x)$

Funció $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq -1 \\ g(x) & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudiem el domini per parts:

- **Zona** $x \leq -1$ (**funció** f): El domini de f exclou $\{-2, -1, 3\}$. Dins la zona $x \leq -1$, hem d'excloure el -2 i el -1 .
- **Zona** $x > -1$ (**funció** g): El domini de g és $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Dins la zona $x > -1$, només ens queda $[2, +\infty)$.



$$\text{Dom}(h) = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup [2, +\infty)$$

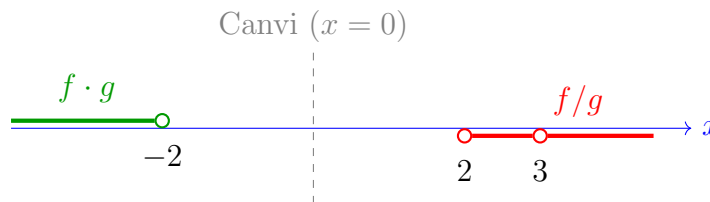
Dit d'una altra manera:

- Si $x \leq -1$ (fem servir f): Intersecció $(-\infty, -1] \cap \text{Dom}(f) \Rightarrow (-\infty, -2) \cup (-2, -1)$. (f no definida en -1).
- Si $x > -1$ (fem servir g): Intersecció $(-1, +\infty) \cap \text{Dom}(g) \Rightarrow [2, +\infty)$.
- $\text{Dom}(h) = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup [2, +\infty)$.
- Punts de tall:
 - Eix Y ($x = 0$): Toca branca g . $0 \notin \text{Dom}(g)$. Cap tall.
 - Eix X: A f (zona ≤ -1) no hi ha arrels ($1, 4 > -1$). A g (zona > -1) arrels ± 2 . Només 2 és vàlida. Punt: $(2, 0)$.

Funció $i(x)$:

$$i(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x)/g(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- **Zona $x < 0$ (Producte):** El domini intersecció era $(-\infty, -2) \cup [2, 3) \cup (3, \infty)$. Dins $x < 0$, només serveix $(-\infty, -2)$.
- **Zona $x \geq 0$ (Quocient):** El domini del quocient era $(-\infty, -2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$. Dins $x \geq 0$, ens queda $(2, 3) \cup (3, \infty)$.



$$\text{Dom}(i) = (-\infty, -2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$$

- Si $x < 0$ (fem servir $f \cdot g$): Domini $(-\infty, -2)$.
- Si $x \geq 0$ (fem servir f/g): Domini $(2, 3) \cup (3, +\infty)$.
- $\text{Dom}(i) = (-\infty, -2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

- Punts de tall:
 - Eix Y ($x = 0$): Branca f/g . No definit.
 - Eix X: A $x < 0$, arrels de producte $(2, 4, -2)$ cap és vàlida (-2 obert) . A $x \geq 0$, arrel de quocient (4) . Punt: $(4, 0)$.

Exercici 2.5.2.

Considereu la funció

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2$$

- a) Trobeu els punts de tall amb els eixos
- b) Trobeu el domini i punts de tall amb els eixos de la funció $(1/f)(x)$
- c) Trobeu el domini i punts de tall amb els eixos de la funció $g(x) = \sqrt{f(x)}$
- d) Trobeu el domini i punts de tall amb els eixos de la funció

$$h(x) = \begin{cases} (1/f)(x) & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{f(x)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solució .

Primer factoritzem el polinomi $f(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2$. Traiem factor comú x^2 :

$$f(x) = x^2(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2)$$

Ara apliquem la regla de Ruffini al polinomi del parèntesi, $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Provem amb $x = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ & & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Obtenim el quocient $x^3 - 2x^2 + x - 2$. Tornem a aplicar Ruffini a aquest nou polinomi provant amb $x = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

El residu és 0 i el quocient és $x^2 + 1$. Aquest últim factor no té arrels reals ($x^2 + 1 = 0$ no té solució). Per tant, la factorització completa és:

$$f(x) = x^2(x-1)(x-2)(x^2+1)$$

a) **Punts de tall de $f(x)$:**

- Eix Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$.
- Eix X: Arrels trobades $x = 0, 1, 2$. Punts: $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$.

b) **Funció $(1/f)(x)$:**

- **Domini:** $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ (valors que anul·len el denominador).
- **Punts de tall:** No talla l'eix Y (0 no és del domini) ni l'eix X ($1 \neq 0$).

c) **Funció $g(x) = \sqrt{f(x)}$:** Cal estudiar el signe de $f(x)$. Com $f(x)$ és un polinomi de grau parell, f serà positiva si x és prou gran, independentment del signe de x . D'altra banda, $x = 0$ és un arrel doble i f no canviarà el signe. En canvi les dues altres arrels són simples, i f canviarà de signe.

També ho podem pensar de la següent manera: els factors x^2 i $(x^2 + 1)$ són sempre positius. El signe depèn de $(x-1)(x-2)$.

Sigui com sigui, el signe de f quedarà de la següent manera:



- **Domini:** $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.
- **Punts de tall:** $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$.

d) **Funció $h(x)$:**

- Si $x < 1$: La funció és $1/f$. Hem d'excloure $x = 0$. Interval: $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
- Si $x \geq 1$: La funció és $\sqrt{f}$. Vàlid quan $f \geq 0$, és a dir, $x = 1$ o $x \geq 2$.

Domini final: $(-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$. **Punts de tall:** $(1, 0)$ i $(2, 0)$. ($x = 0$ no és del domini).

2.6 Composició i inversa

Exercici 2.6.1.

Considereu les funcions:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 3} \quad g(x) = 2x + 1$$

- a) Trobeu el domini de f i el de g
- b) Calculeu $f \circ g$ i $g \circ f$.
- c) A partir de $D(f)$ i $D(g)$ trobeu $D(f \circ g)$ i $D(g \circ f)$.

Solució .

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ i $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.
- b) Calculem les composicions de les funcions:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \frac{(2x+1)^2+3}{(2x+1)-3} = \frac{4x^2+4x+1+3}{2x-2} = \frac{4x^2+4x+4}{2x-2} = \frac{2x^2+2x+2}{x-1}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2+3}{x-3}\right) = 2\left(\frac{x^2+3}{x-3}\right) + 1 = \frac{2x^2+6}{x-3} + \frac{x-3}{x-3} = \frac{2x^2+x+3}{x-3}$

- c) Determinació dels dominis:

- Per a $\text{Dom}(f \circ g)$, busquem els valors on $g(x) = 3$ per excloure'ls: $2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Per tant, $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Per a $\text{Dom}(g \circ f)$, com que g és una funció polinòmica, la composició només fallarà quan la funció interior f no estigui definida. Com que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, aleshores $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Exercici 2.6.2.

Trobeu les funcions inverses de les següents funcions i comproveu el resultat (fent la composició).

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = \frac{x+1}{3}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$

d) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

Solució .

Només cal escriure la variable x en funció de y . És a dir, aïllar x de l'equació $f(x) = y$. A l'hora de comprovar és preferible comprovar que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

a) $f(x) = 2x + 3$. Aïllem la x de manera directa:

$$\begin{aligned}y &= 2x + 3 \\y - 3 &= 2x \implies x = \frac{y - 3}{2}\end{aligned}$$

Per tant, la inversa és $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$. **Comprovació:**

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{(2x + 3) - 3}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

b) $f(x) = \frac{x+1}{3}$. Procedim de manera similar:

$$\begin{aligned}y &= \frac{x + 1}{3} \\3y &= x + 1 \implies x = 3y - 1\end{aligned}$$

La inversa és $f^{-1}(x) = 3x - 1$. **Comprovació:**

$$(f^{-1} \circ f)(x) = 3\left(\frac{x+1}{3}\right) - 1 = (x+1) - 1 = x$$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$. En aquest cas, com que la x apareix al numerador i al denominador, hem de passar el denominador multiplicant i agrupar tots els termes amb x a un costat per treure factor comú:

$$\begin{aligned}y &= \frac{x + 2}{x + 3} \\y(x + 3) &= x + 2 \\xy + 3y &= x + 2 \\xy - x &= 2 - 3y \\x(y - 1) &= 2 - 3y \implies x = \frac{2 - 3y}{y - 1}\end{aligned}$$

La inversa és $f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{x-1}$. **Comprovació:** Substituïm $f(x)$ dins de la inversa:

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= \frac{2 - 3\left(\frac{x+2}{x+3}\right)}{\frac{x+2}{x+3} - 1} \\&= \frac{\frac{2(x+3) - 3(x+2)}{x+3}}{\frac{(x+2) - (x+3)}{x+3}} \\&= \frac{2x + 6 - 3x - 6}{x + 2 - x - 3} = \frac{-x}{-1} = x\end{aligned}$$

- d) $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Per aïllar la x quan tenim termes quadràtics i lineals barrejats, hem de tractar l'expressió com una equació de segon grau igualada a zero, on y forma part del terme independent:

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 3x + 1 \\0 &= x^2 - 3x + (1 - y)\end{aligned}$$

Apliquem la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ amb $a = 1$, $b = -3$ i $c = (1 - y)$:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1 - y)}}{2(1)} \\x &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 + 4y}}{2} \\x &= \frac{3 \pm \sqrt{5 + 4y}}{2}\end{aligned}$$

Fixem-nos que tenim dues opcions. Això és degut a que, com la funció f és una paràbola, cada valor de y que quedi per sobre el seu vèrtex té dues antiimatges. Per tal que sigui funció, escollim una de les branques (per exemple, la positiva). La inversa és: Les dues funcions inverses seran:

$$f^{-1}(x) = \frac{3 + \sqrt{5 + 4x}}{2} \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = \frac{3 - \sqrt{5 + 4x}}{2}$$

Exercici 2.6.3.

Trobeu la inversa de la següent funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{2} & \text{Si } x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

Exercici 2.6.4.

Calculeu les inverses de les següents funcions i comproveu el resultat:

a)	$f(x) = \frac{5}{x+2}$	e)	$q(x) = \frac{x}{3-x}$
b)	$g(x) = \sqrt{4x-8}$	f)	$r(x) = 5 - \sqrt{2x}$
c)	$h(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$	g)	$s(x) = 3 \tan(x)$
d)	$p(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$	h)	$t(x) = 2^x + 5$

Solució .

a) **Animació de la solució.** $f(x) = \frac{5}{x+2}$. Sigui $y = f(x)$.

Càlcul: Aillem x :

$$y = \frac{5}{x+2} \iff x+2 = \frac{5}{y} \iff x = \frac{5}{y} - 2 = \frac{5-2y}{y}$$

Fent el canvi de variable final ($y \rightarrow x$):

$$f^{-1}(x) = \frac{5-2x}{x}$$

Comprovació ($f^{-1}(f(x)) = x$):

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{5-2f(x)}{f(x)} = \frac{5-2\left(\frac{5}{x+2}\right)}{\frac{5}{x+2}} = \frac{\frac{5(x+2)-10}{x+2}}{\frac{5}{x+2}} = \frac{5x+10-10}{5} = \frac{5x}{5} = x$$

b) $g(x) = \sqrt{4x-8}$. Sigui $y = g(x)$.

Càlcul: Aillem x :

$$y = \sqrt{4x-8} \implies y^2 = 4x-8 \iff 4x = y^2+8 \iff x = \frac{y^2}{4} + 2$$

Fent el canvi de variable final:

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 2$$

Comprovació ($g^{-1}(g(x)) = x$):

$$g^{-1}(g(x)) = \frac{(g(x))^2}{4} + 2 = \frac{(\sqrt{4x-8})^2}{4} + 2 = \frac{4x-8}{4} + 2 = (x-2) + 2 = x$$

c) **Animació de la solució** $h(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$. Sigui $y = h(x)$.

Càlcul: Aïllem x :

$$y = \frac{3x+2}{2x-1} \iff y(2x-1) = 3x+2 \iff 2xy - y = 3x+2$$

Agrupem les x :

$$2xy - 3x = y + 2 \iff x(2y - 3) = y + 2 \iff x = \frac{y+2}{2y-3}$$

Fent el canvi de variable final:

$$h^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x-3}$$

Comprovació ($h^{-1}(h(x)) = x$):

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(x)) &= \frac{h(x)+2}{2h(x)-3} = \frac{\frac{3x+2}{2x-1} + 2}{2\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right) - 3} = \frac{\frac{3x+2+2(2x-1)}{2x-1}}{\frac{2(3x+2)-3(2x-1)}{2x-1}} \\ &= \frac{3x+2+4x-2}{6x+4-6x+3} = \frac{7x}{7} = x \end{aligned}$$

d) $p(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$. Sigui $y = p(x)$.

Càlcul: Aïllem x :

$$\begin{aligned} y &= 2 + \sqrt[3]{x-1} \iff y-2 = \sqrt[3]{x-1} \implies (y-2)^3 = x-1 \\ x &= (y-2)^3 + 1 \end{aligned}$$

Fent el canvi de variable final:

$$p^{-1}(x) = (x-2)^3 + 1$$

Comprovació ($p^{-1}(p(x)) = x$):

$$p^{-1}(p(x)) = (p(x)-2)^3 + 1 = ((2 + \sqrt[3]{x-1}) - 2)^3 + 1 = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = (x-1) + 1 = x$$

e) $q(x) = \frac{x}{3-x}$. Sigui $y = q(x)$.

Càlcul: Aïllem x :

$$y = \frac{x}{3-x} \iff y(3-x) = x \iff 3y - xy = x$$

Agrupem les x :

$$3y = x + xy \iff 3y = x(1+y) \iff x = \frac{3y}{1+y}$$

Fent el canvi de variable final:

$$q^{-1}(x) = \frac{3x}{1+x}$$

Comprovació ($q^{-1}(q(x)) = x$):

$$q^{-1}(q(x)) = \frac{3q(x)}{1+q(x)} = \frac{3\left(\frac{x}{3-x}\right)}{1+\frac{x}{3-x}} = \frac{\frac{3x}{3-x}}{\frac{(3-x)+x}{3-x}} = \frac{3x}{3} = x$$

f) $r(x) = 5 - \sqrt{2x}$. Sigui $y = r(x)$.

Càlcul: Aïllem x :

$$y = 5 - \sqrt{2x} \iff \sqrt{2x} = 5 - y \implies 2x = (5 - y)^2$$

$$x = \frac{(5 - y)^2}{2}$$

Fent el canvi de variable final:

$$r^{-1}(x) = \frac{(x - 5)^2}{2}$$

Comprovació ($r^{-1}(r(x)) = x$):

$$r^{-1}(r(x)) = \frac{(r(x) - 5)^2}{2} = \frac{((5 - \sqrt{2x}) - 5)^2}{2} = \frac{(-\sqrt{2x})^2}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

g) $s(x) = 3 \tan(x)$. Sigui $y = s(x)$.

Càlcul: Aillem x :

$$y = 3 \tan(x) \iff \frac{y}{3} = \tan(x) \iff x = \arctan\left(\frac{y}{3}\right)$$

Fent el canvi de variable final:

$$s^{-1}(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

Comprovació ($s^{-1}(s(x)) = x$):

$$s^{-1}(s(x)) = \arctan\left(\frac{s(x)}{3}\right) = \arctan\left(\frac{3 \tan(x)}{3}\right) = \arctan(\tan(x)) = x$$

h) $t(x) = 2^x + 5$. Sigui $y = t(x)$.

Càlcul: Aillem x :

$$y = 2^x + 5 \iff y - 5 = 2^x$$

Apliquem logaritmes en base 2:

$$x = \log_2(y - 5)$$

Fent el canvi de variable final:

$$t^{-1}(x) = \log_2(x - 5)$$

Comprovació ($t^{-1}(t(x)) = x$):

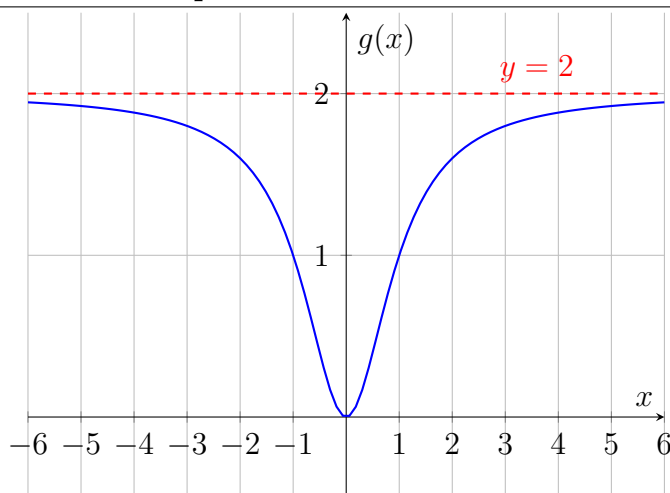
$$t^{-1}(t(x)) = \log_2(t(x) - 5) = \log_2((2^x + 5) - 5) = \log_2(2^x) = x$$

Exercici 2.6.5.

D'una funció f sabem que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

Tenim també una altra funció $g(x)$ la gràfica de la qual es mostra a continuació.



Trobeu el domini de la funció $(f \circ g)(x)$.

Solució .

Preguntem-nos per a quins valors falla la funció $f \circ g$. Això passarà quan falli la funció g (ja que és la primera que es fa) o bé quan aquesta retorni un valor on falla la funció f . Gràficament veiem que la funció g no falla: $D(g) = \mathbb{R}$. Com la funció $f(x)$ falla quan rep -1 , 0 , 1 o 2 , caldrà trobar per a quins valors de x la funció g retorna algun d'aquests valors:

$$g(x) = -1$$

$$g(x) = 0$$

$$g(x) = 1$$

$$g(x) = 2$$

Com la funció g és positiva, la primera equació no té solució. La quarta tampoc, perquè g no assoleix mai aquest valor.

La segona equació té només una solució: $x = 0$.

La tercera té dues solucions: $x = -1$ i $x = 1$.

Per tant:

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$$

Exercici 2.6.6.

Calculeu les inverses de les següents funcions:

a)

$$f(x) = \frac{4}{2x-6}$$

b)

$$g(x) = \sqrt[3]{1-x}$$

c)

$$h(x) = \frac{x+5}{3-2x}$$

d)

$$p(x) = \sqrt{x+4} - 1$$

e)

$$q(x) = 4 \cos(x)$$

f)

$$r(x) = 1 + \tan(2x)$$

Solució .

a)

$$f^{-1}(x) = \frac{2+3x}{x}$$

b)

$$g^{-1}(x) = 1 - x^3$$

c)

$$h^{-1}(x) = \frac{3x-5}{2x+1}$$

d)

$$p^{-1}(x) = x^2 + 2x - 3$$

e)

$$q^{-1}(x) = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$$

f)

$$r^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arctan(x-1)$$

2.7 Continuitat i límits laterals

Exercici 2.7.1.

Feu els següents límits indicant en tot moment si el valor que s'obté és “per la dreta” o “per l'esquerra”.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x + 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x + 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ on

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} -1 - x =$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x^2}$

Exercici 2.7.2.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a, & x < 2 \\ ax - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

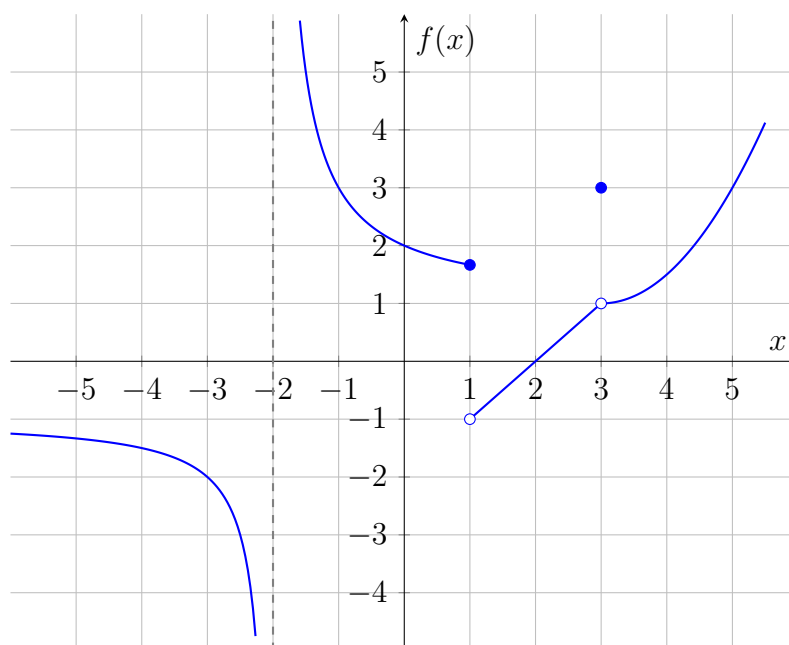
on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre real. Trobeu el valor de a per tal que f sigui contínua en $x = 2$.

Solució .

$$a = 3$$

Exercici 2.7.3.

Considereu la gràfica de la següent figura:



Feu el següent:

a) Obtingueu $f(1)$, $f(3)$ i $f(-2)$

b) Feu els límits laterals en $x = -2$, $x = 1$ i $x = 3$

c) Trobeu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

d) Té alguna asímptota la funció $f(x)$? Quines són les seves equacions?

Solució .

a) $f(1) \approx 1.8$, $f(3) = 3$ i $f(-2) \nexists$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \approx 1.8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \approx -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$$

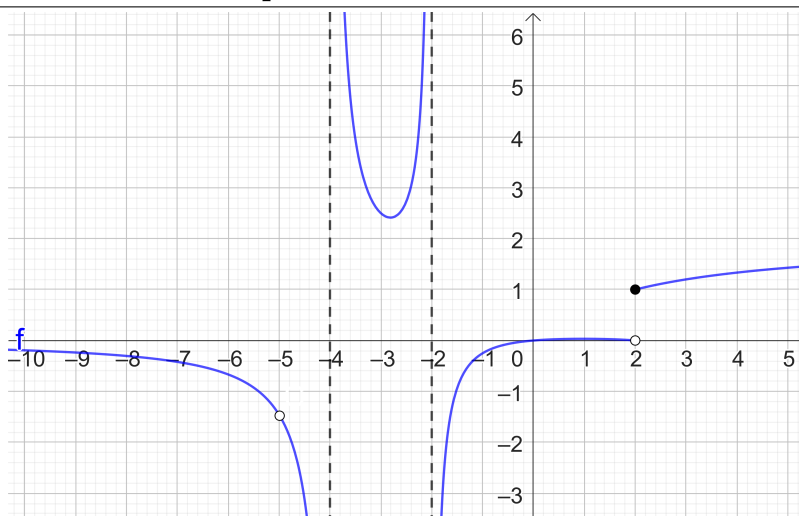
c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercici 2.7.4.

Considereu la funció de la següent gràfica.



- a) Trobeu-ne el domini
- b) Calculeu $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, distingint entre límits laterals, si cal.
- c) Digueu quin tipus de discontinuïtats té aquesta funció.

Solució .

- a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5, -4, -2\}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$
- c) Evitable en $x = -5$, asimptòtica en $x = -4$ i $x = -2$, de salt en $x = 2$.

Exercici 2.7.5.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne el domini
- b) Trobeu-ne els punts de tall amb els eixos

c) Estudieu la seva continuïtat

d) Trobeu, si n'hi ha, totes les asímptotes

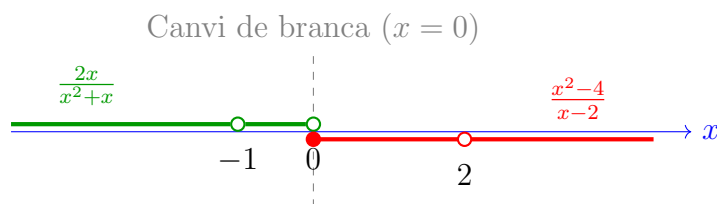
Solució .

a) **Domini:** Estudiem on s'anul·len els denominadors de cada branca dins del seu interval de definició:

- **Branca $x < 0$:** El denominador és $x^2 + x$. S'anul·la si $x^2 + x = 0 \implies x(x+1) = 0 \implies x = 0$ i $x = -1$. Com que estem en l'interval $x < 0$, el valor $x = 0$ no pertany estrictament a aquesta branca, però sí que excloem el punt $x = -1$.
- **Branca $x \geq 0$:** El denominador és $x - 2$. S'anul·la si $x - 2 = 0 \implies x = 2$. Com que estem en l'interval $x \geq 0$, excloem el punt $x = 2$.

Per tant, el domini de la funció són tots els nombres reals excepte aquests dos valors:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$



b) **Punts de tall amb els eixos:**

- **Tall amb l'eix y (fem $x = 0$):** Com que $x = 0$ pertany a la segona branca ($x \geq 0$), avaluem allà:

$$f(0) = \frac{0^2 - 4}{0 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2 \implies \text{Punt } (0, 2)$$

- **Tall amb l'eix x (fem $f(x) = 0$):** Igualet a zero cada branca en el seu interval:

– Si $x < 0$:

$$\frac{2x}{x^2 + x} = 0 \implies 2x = 0 \implies x = 0$$

Però $x = 0$ no compleix la condició $x < 0$, així que aquí no hi ha punt de tall.

– Si $x \geq 0$:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0 \implies x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$$

El valor $x = -2$ no compleix $x \geq 0$. El valor $x = 2$ compleix la condició però no pertany al domini (anul·la el denominador). Per tant, tampoc hi ha punt de tall.

L'únic punt de tall amb els eixos és el $(0, 2)$.

c) **Estudi de la continuïtat**

Per defecte la funció serà contínua a tot arreu excepte als punts problemàtics. Aquests són:

- Punts que no són del domini: $x = -1$ i $x = 2$
- Canvis de branca en funcions a trossos: $x = 0$

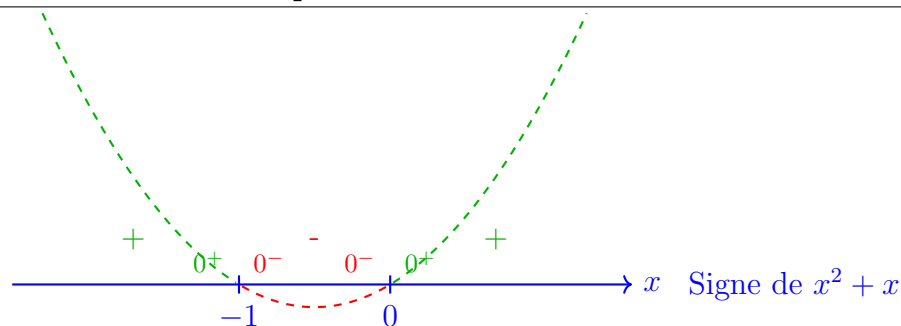
Estudiem doncs la continuïtat en cadascun d'aquests punts.

1. En $x = -1$ (punt de no domini, branca esquerra)

Comencem apropant-nos a $x = -1$ sense distingir entre dreta ni esquerra, per fer una primera inspecció:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 + x} = \frac{-2}{0} \implies \text{Asíptota vertical}$$

Amb això ja sabem que la funció té una discontinuïtat del tipus asimptòtica en $x = -1$, perquè s'anul·la un denominador però el numerador no. Cal estudiar però els límits laterals, per saber si per cada banda si la funció va a infinit o a menys infinit. Això ho fem estudiant el signe del denominador $x^2 + x$. Ja sabem que les seves arrels són $x = 0$ i $x = -1$. Com és una paràbola còncaua ($\smile$) i té dues arrels, la seqüència de signes és $+$ $-$ $+$:



Com que el numerador en $x = -1$ val -2 (negatiu), tenim:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x^2 + x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x^2 + x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Hi ha una **discontinuitat asimptòtica** en $x = -1$.

2. En $x = 2$ (punt de no domini, branca dreta):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \implies \text{Indeterminació}$$

Factoritzem i simplifiquem:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Com que el límit existeix i és finit però la funció no està definida, hi ha una **discontinuitat evitable** en $x = 2$.

3. En $x = 0$ (canvi de branca): Calculem $f(0)$ i els límits laterals:

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \text{ Indet. Cal factoritzar}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0^2 - 4}{0 - 2} = 2$$

Com que els límits laterals coincideixen amb el valor de la funció, $f(x)$ és contínua en $x = 0$.

Conclusió: La funció és contínua a tot $\mathbb{R}$ excepte en $x = -1$ (salt infinit) i en $x = 2$ (evitable).

d) **Asímtotes**

Asímtotes verticals

En tenir una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$, la funció té una asímtota vertical, l'equació de la qual és $x = -1$.

Asímtotes horitzontals

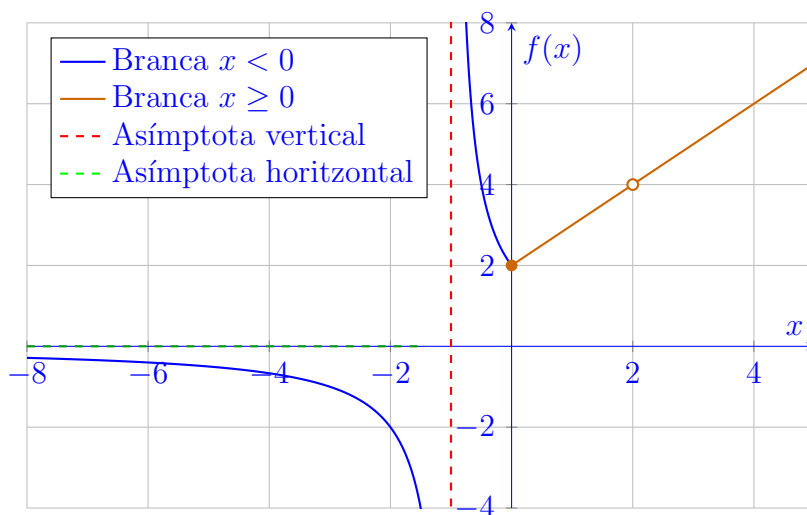
Per veure si té asímtotes horitzontals, haurem d'estudiar el seu comportament a l'infinit. Notem que, en ser una funció a trossos, caldrà escollir la branca addient segons si mirem a l'infinit i al menys infinit:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + x} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \infty$$

La funció té una asímtota horitzontal per l'esquerra, l'equació de la qual és $y = 0$. Per la dreta no té.

A continuació es mostra una gràfica de la funció. Observeu que surt tot tal i com hem previst:

- Té una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$. Per la seva dreta la funció se'n va "amunt" $(+\infty)$ i per la seva esquerra se'n va "avall" $(-\infty)$.
- Té una discontinuïtat evitable en $x = 2$ (un forat)
- És contínua en $x = 0$
- Té una asímtota horitzontal per l'esquerra en $y = 0$ i per la dreta no en té (se'n va "amunt")



Exercici 2.7.6.

Discutiu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercici 2.7.7.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+x}{x^2-4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Trobeu-ne el domini
- Discutiu-ne la continuïtat
- Fels els límits

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Solució .

- a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$
- b) Té una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$ ($+\infty$ per l'esquerra i $-\infty$ per la dreta). També té una discontinuïtat asimptòtica en $x = 2$ ($-\infty$ per l'esquerra i $+\infty$ per la dreta).
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Exercici 2.7.8.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3-x^2}$$

Solució .

1. Estudi del domini

Primer, igualem el denominador a zero per trobar els punts singulars. Traiem factor comú x^2 :

$$x^3 - x^2 = 0 \iff x^2(x-1) = 0$$

D'aquí obtenim dues arrels:

- $x = 0$ (arrel doble).
- $x = 1$ (arrel simple).

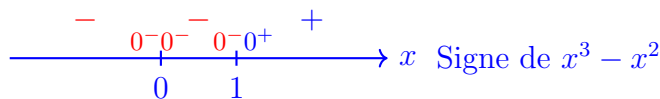
Per tant, el domini és:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

La funció és contínua en tot el seu domini (per ser racional). Els punts de discontinuïtat són $x = 0$ i $x = 1$.

2. Estudi del signe del denominador

Com que el numerador en $x = 0$ val -2 i en $x = 1$ val -1 (diferents de 0), els límits seran infinits (asíptotes verticals). Per determinar el signe de l'infini, estudiem el signe del denominador $D(x) = x^2(x-1)$ prop de les arrels:



3. Càlcul de límits laterals

Usant l'esquema anterior i sabent que el numerador és negatiu en aquests punts:

- En $x = 0$ (Numerador $\rightarrow -2$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = +\infty$$

Tenim una asímptota vertical en $x = 0$ (ambdues branques cap a dalt).

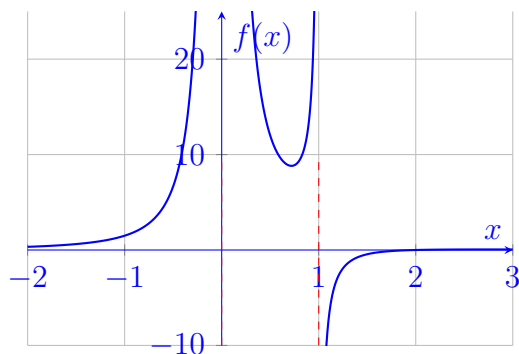
- En $x = 1$ (Numerador $\rightarrow -1$):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Tenim una asímptota vertical en $x = 1$.

4. Representació gràfica

Finalment, visualitzem el comportament a prop de les discontinuïtats:



Exercici 2.7.9.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 3x^2 - 10x - 24}, & x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 5}, & x > 2 \end{cases}$$

- Trobeu el domini de la funció $f(x)$. Haureu de fer Ruffini!
- Trobeu els punts de tall amb els eixos.

- c) Calculeu el comportament local (a prop) dels valors que no siguin del domini i també a prop de $x = 2$.
- d) Discutiu quin tipus de discontinuïtats té la funció en aquests valors, si és que en té.

Solució .

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 5\}$

b) Eix Y: $(0, 0)$, eix X: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$$

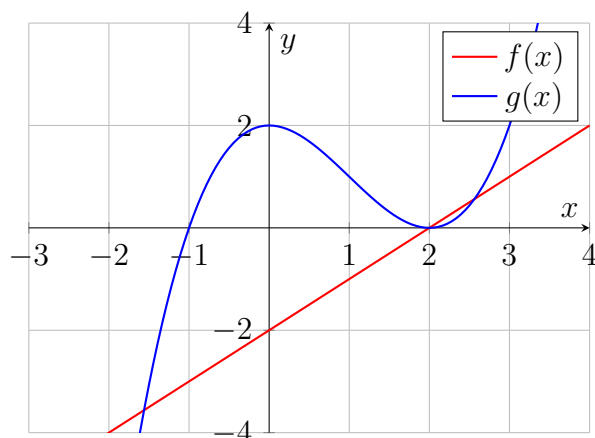
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{5}{3}$$

d) Asimptòtica en $x = -4$, $x = -2$ i $x = 5$. De salt en $x = 2$.

Exercici 2.7.10.

Considereu les funcions de les gràfiques següents:



a) Estudieu la continuïtat de la funció f/g

b) Estudieu la continuïtat de la funció g/f

Solució .

Les funcions f i g , per separat, no presenten cap problema i són funcions contínues. Ara bé, en dividir-les poden aparèixer problemes si el denominador val 0. Analitzem els dos casos, segons qui estigui al denominador.

a) La funció f/g tindrà problemes pels valor de x que facin que g valgui 0. És a dir, als punts de tall de g amb l'eix horitzontal, que són $x = -1$ i $x = 2$. Analitzem els dos casos per separat:

- En $x = -1$. Comencem apront-nos a $x = -1$ per analitzar què passa. El valor de $f(-1)$ no queda massa clar, assumirem que $f(-1) = -3$. Per tant, el límit quedarà.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-3}{0}$$

Podem afirmar que la funció f/g té una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$. Ara caldria estudiar els límits laterals, per saber si s'aproxima a ∞ o $-\infty$ segons la banda. Fixem-nos que g és negativa a l'esquerra de $x = -1$ i positiva a la seva dreta. Per tant, els límits laterals quedaran:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{-3}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

- En $x = 2$. En aquest cas el numerador també val 0, ja que $f(2) = 0$. Per tant, tenim una indeterminació:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

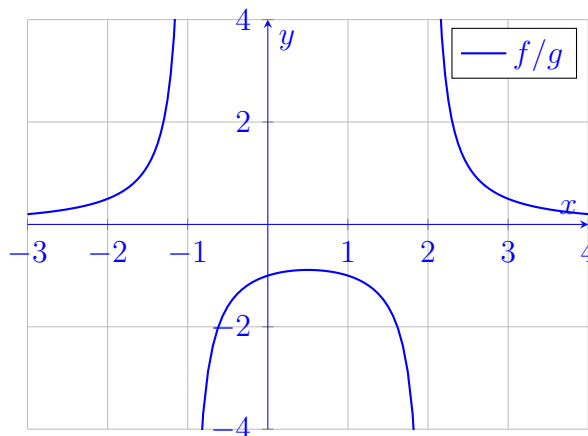
Per resoldre-la caldria factoritzar f i g i cancel·lar l'arrel que tenen en comú (assumint que siguin polinomis). Fixem-nos que la funció g té un arrel doble en $x = 2$, mentre que f la té simple. Així, en factoritzar i simplificar, el denominador seguirà tenint una arrel en $x = 2$. Ho podem resumir de la següent manera:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot P(x)}{(x-2)^2 \cdot Q(x)} = \frac{P(2)}{0}$$

amb $P(2) \neq 0$. Així, la funció f/g també té una discontinuïtat del tipus asimptòtic en $x = 2$. Estudiem ara els límits laterals. Fixem-nos que a la dreta de $x = 2$ totes dues funcions són positives, mentre que a la seva esquerra la funció f és negativa i g positiva. Per tant tindrem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= +\infty \end{aligned}$$

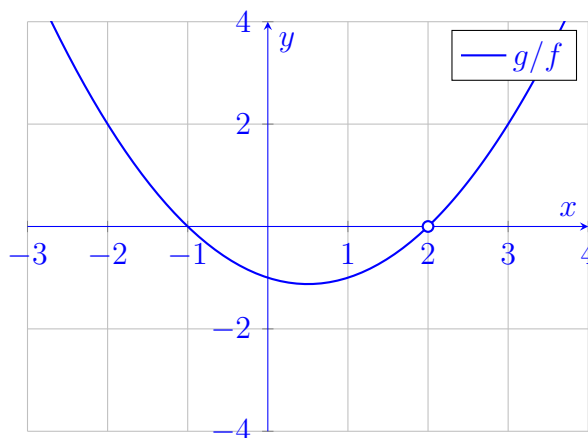
A continuació es mostra un esbós de la funció f/g .



- b) Pel que fa a la funció g/f , podem aprofitar tots els càlculs i raonaments fets a l'apartat anterior. Aquest cop només tenim un punt problemàtic, $x = 2$, que és l'únic valor on s'anul·la la funció f . Raonant igual que abans veiem ara que el límit serà:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(x-2)^2 \cdot Q(2)}{(x-2) \cdot P(2)} = 0$$

Com el límit existeix, la funció té una discontinuïtat evitable en $x = 0$. A continuació podem veure una esbós de la gràfica de la funció g/f :



Exercici 2.7.11.

Estudieu la continuïtat de la funció

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+4}$$

Solució .

Té una discontinuïtat asimptòtica en $x = -2$, per l'esquerra val $-\infty$ i per la dreta $+\infty$.

Exercici 2.7.12.

Trobeu el valor del paràmetre c per tal que la següent funció sigui contínua

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < \pi \\ \frac{x^2 + 2x - \pi}{\pi} + c & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Solució .

$$0 = \frac{\pi^2 + 2\pi - \pi}{\pi} + c \longrightarrow 0 = \pi + 1 + c$$

Exercici 2.7.13.

Considereu la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3 Trigonometria

3.1 Raons trigonomètriques

Exercici 3.1.1.

Considereu un polígon de n costats (n -àgon) de radi r .

- a) Calculeu-ne el perímetre i l'àrea en funció del nombre de costats
- b) Deduïu el perímetre i l'àrea d'una circumferència fent el límit $n \rightarrow \infty$.

Exercici 3.1.2.

Ajudant-vos *d'aquest applet de Geogebra* trobeu fórmules pels següents càlculs en funció de $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ i $\tan(\alpha)$:

- | | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| a) $\sin(-\alpha) =$ | j) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ |
| b) $\cos(-\alpha) =$ | k) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ |
| c) $\tan(-\alpha) =$ | l) $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ |
| d) $\sin(\alpha + \pi) =$ | m) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ |
| e) $\cos(\alpha + \pi) =$ | n) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ |
| f) $\tan(\alpha + \pi) =$ | o) $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ |
| g) $\sin(\pi - \alpha) =$ | p) $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$ |
| h) $\cos(\pi - \alpha) =$ | q) $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$ |
| i) $\tan(\pi - \alpha) =$ | r) $\tan(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$ |

Solució .

- | | |
|---|---|
| a) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ | e) $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ |
| b) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ | f) $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$ |
| c) $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ | g) $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ |
| d) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$ | h) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ |

i) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

n) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha)$

j) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$

o) $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$

k) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$

p) $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) = -\cos(\alpha)$

l) $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$

q) $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{2}) = \sin(\alpha)$

m) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha)$

r) $\tan(\alpha + \frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$

Exercici 3.1.3.

Feu servir *aquesta applet de Geogebra* per respondre les següents preguntes:

a) Trobeu fórmules per calcular

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

b) Feu servir les fórmules per trobar noves fórmules per calcular:

$$\sin(2\alpha) =$$

$$\cos(2\alpha) =$$

$$\sin(\alpha - \beta) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) =$$

c) Fent servir aquestes fórmules comproveu les següents igualtats de l'exercici 3.1.2: a), d), h), j) i q).

Solució .

a) Fet a classe. Les fórmules són:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

b) Per tal de calcular els sinus i cosinus de l'angle doble a partir de les fórmules anteriors fem el següent:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \\ &= \boxed{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)} \\ \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \sin(\alpha) = \\ &= \boxed{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}\end{aligned}$$

El fet que $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ve del fet que $\sin(\alpha)$ és una funció senar (anti-simètrica), i que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ve del fet que $\cos(\alpha)$ és una funció parella (simètrica).

Pel que fa a l'angle resta podem fer el següent:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin(\alpha) \underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos(\beta)} + \cos(\alpha) \underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)} = \\ &= \boxed{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)} \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos(\alpha) \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \sin(-\beta) = \\ &= \boxed{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= \sin(0 - \alpha) = \overbrace{\sin(0)}^0 \cdot \cos(\alpha) - \overbrace{\cos(0)}^1 \cdot \sin(\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha + \pi) &= \sin(\alpha) \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} + \cos(\alpha) \cdot \overbrace{\sin(\pi)}^0 = -\sin(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) &= \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} \cdot \cos(\alpha) + \overbrace{\sin(\pi)}^0 \cdot \sin(\alpha) = -\cos(\alpha) \\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\alpha) \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^0 + \cos(\alpha) \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^1 = \cos(\alpha) \\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) &= \cos(\alpha) \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^0 - \sin(\alpha) \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{-1} = -(-\sin(\alpha)) = \sin(\alpha)\end{aligned}$$

Exercici 3.1.4.

Calculeu

$$\cos(2 \arcsin(0.6))$$

Solució .

Fixem-nos que $\arcsin(0.6)$ és un angle, anomenem-lo α . Amb la fórmula de l'angle doble tenim

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Trobem $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 0.64$ i quedarà

$$\cos(2 \arcsin(0.6)) = 0.64 - 0.6^2 = 0.64 - 0.36 = \boxed{0.28}$$

Exercici 3.1.5.

Sabent que $\cos(\alpha) = 0.8$ i que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, trobeu de manera exacta i sense trobar els angles quant val $\sin(2\alpha + \beta)$

Solució .

Si escrivim

$$\sin(2\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \alpha + \beta) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) = 0.8$$

Exercici 3.1.6.

Sabent que $\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$ i que α pertany al primer quadrant, calculeu de manera exacta i sense calcular l'angle:

a) $\sin(\alpha)$

b) $\tan(-\alpha)$

Solució .

a) Fent servir que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ trobem

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}.$$

Com ens diu que l'angle és la primer quadrant, la solució correcte és la positiva, $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$.

b) Fem servir que

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{12}{5}.$$

La primera igualtat simplement ve de canviar el signe a un angle (feu un dibuix pintant els angles α i $-\alpha$ a la circumferència unitat i ho veureu clar). La segona igualtat s'ha de saber.

Exercici 3.1.7.

Sabent que $\tan(\alpha) = \frac{15}{8}$ i que α és un angle del tercer quadrant, trobeu de manera exacta i sense calcular l'angle els valors de $\sin(\alpha)$ i $\cos(\alpha)$.

Solució .

Plantejem un sistema d'equacions utilitzant la definició de la tangent i la identitat fonamental de la trigonometria:

$$\begin{cases} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{15}{8} \implies \sin(\alpha) = \frac{15}{8} \cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \end{cases}$$

Substituïm la primera equació en la segona:

$$\begin{aligned} \left(\frac{15}{8} \cos(\alpha)\right)^2 + \cos^2(\alpha) &= 1 \\ \frac{225}{64} \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \\ \left(\frac{225}{64} + 1\right) \cos^2(\alpha) &= 1 \implies \frac{289}{64} \cos^2(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

Aïllem el cosinus al quadrat:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{64}{289} \implies \cos(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{64}{289}} = \pm \frac{8}{17}$$

Com que α és un angle del tercer quadrant, sabem que el seu cosinus ha de ser negatiu. Per tant, prenem el valor negatiu:

$$\cos(\alpha) = -\frac{8}{17}$$

Finalment, substituïm aquest valor a la primera equació del sistema per trobar el sinus:

$$\sin(\alpha) = \frac{15}{8} \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) = -\frac{15}{17}$$

Exercici 3.1.8.

Sabent que $\sin(\beta) = \frac{3}{5}$ (essent β un angle del primer quadrant) i que $\alpha - \beta = \pi$, trobeu de manera exacta i sense trobar els angles quant val $\cos(\alpha - 2\beta)$

Exercici 3.1.9.

Sabent que $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$ i que $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$, trobeu de manera exacta i sense trobar els angles quant val $\sin(4\alpha + \beta)$

Solució .

Primer, reescrivim l'expressió que volem calcular per aprofitar la dada de l'enunciat $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$:

$$4\alpha + \beta = 2\alpha + (2\alpha + \beta) = 2\alpha + \frac{3\pi}{2}$$

Ara, substituïm això dins del sinus i apliquem la fórmula trigonomètrica de la suma d'angles ($\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$):

$$\sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(2\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Sabem que $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ i que $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$. Ens queda:

$$\sin(2\alpha) \cdot 0 + \cos(2\alpha) \cdot (-1) = -\cos(2\alpha)$$

Per no fer servir cap fórmula d'angle doble, desenvoluparem el $\cos(2\alpha)$ escrivint-lo com la suma $\cos(\alpha + \alpha)$ i aplicant la fórmula $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$:

$$-\cos(\alpha + \alpha) = -(\cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha)) = -(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) = \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)$$

Ara només necessitem conèixer $\sin^2(\alpha)$ i $\cos^2(\alpha)$. Podem deduir-los a partir de $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$ plantejant un sistema com en l'exercici anterior:

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{5}{12} \cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \end{cases}$$

Substituïnt la primera a la segona:

$$\left(\frac{5}{12} \cos(\alpha)\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \implies \frac{25}{144} \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \implies \frac{169}{144} \cos^2(\alpha) = 1$$

D'aquí aïllem $\cos^2(\alpha) = \frac{144}{169}$. Substituïnt això a la identitat fonamental, obtenim que $\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$. Finalment, substituïm aquests valors a l'expressió que havíem deduït:

$$\sin(4\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$$

Exercici 3.1.10.

Sabent que $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$, que α es troba al tercer quadrant i que $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$, trobeu de manera exacta i sense trobar els angles quant val $\sin(3\alpha + \beta)$

Solució .

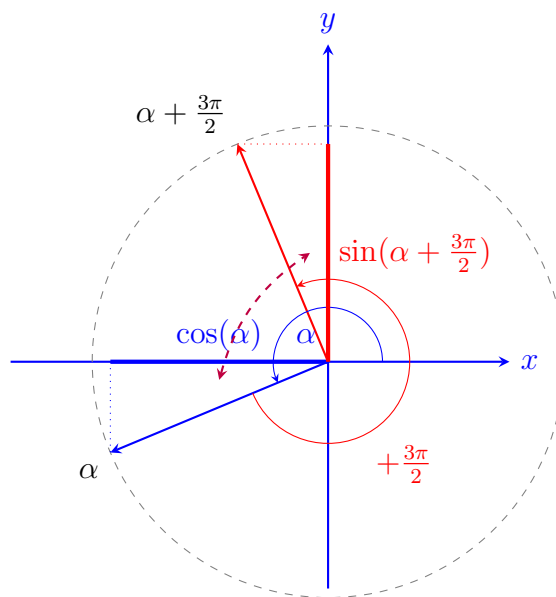
Primer, reescrivim l'expressió que volem calcular per poder substituir-hi la dada $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$:

$$3\alpha + \beta = \alpha + (2\alpha + \beta) = \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

Per tant, l'expressió equival a:

$$\sin(3\alpha + \beta) = \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Podem deduir aquest valor pensant en la circumferència goniomètrica. Si a un angle α li sumem $\frac{3\pi}{2}$ (tres quarts de volta), estem fent una rotació de 270° . Això és el mateix que girar 90° en sentit horari. En aquesta nova posició, els valors s'intercanvien: la nova coordenada vertical (el sinus de l'angle girat) equival a la coordenada horitzontal de l'angle original (el cosinus), però amb el signe invertit. Vegeu la següent figura:



Per tant:

$$\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha)$$

Ara hem de trobar el valor de $\cos(\alpha)$. Ho farem plantejant un sistema d'equacions a partir de la definició de la tangent ($\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$) i la identitat fonamental:

$$\begin{cases} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{12} \implies \sin(\alpha) = \frac{5}{12} \cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \end{cases}$$

Substituïm la primera equació dins de la segona:

$$\left(\frac{5}{12} \cos(\alpha)\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\frac{25}{144} \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Traient factor comú $\cos^2(\alpha)$ i sumant:

$$\left(\frac{25}{144} + 1\right) \cos^2(\alpha) = 1 \implies \frac{169}{144} \cos^2(\alpha) = 1$$

Aïllem el cosinus al quadrat i apliquem l'arrel:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{144}{169} \implies \cos(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}$$

L'enunciat ens indica que α és un angle del tercer quadrant. En aquest quadrant, tant la coordenada x com la y són negatives, de manera que el cosinus ha de ser negatiu. Ens quedem amb aquesta solució:

$$\cos(\alpha) = -\frac{12}{13}$$

Finalment, tornem a l'expressió inicial que havíem deduït i hi substituïm aquest valor:

$$\sin(3\alpha + \beta) = -\cos(\alpha) = -\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

Exercici 3.1.11.

Calculeu els límits:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin(x))^{\tan(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2^x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\sin(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x^2}{\cos(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)}{\tan(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x + \frac{\pi}{2})}$

Exercici 3.1.12.

Trobeu tots els angles que compleixen les següents equacions:

a) $\sin(x) = -1$

c) $\sin(x + \pi) = 1$

b) $\tan(x) = 1$

d) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -1$

Solució .

a) l'angle x correspon als angles que “cauen” als $\frac{3\pi}{2}$. Per tant, els angles seran de la forma $\frac{3\pi}{2}$ més voltes, és a dir:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) l'angle x correspon als angles que cauen a $\frac{\pi}{4}$ o bé $\frac{5\pi}{4}$. Per tant, seran angles de la forma $\frac{\pi}{4}$ més mitges voltes, és a dir:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

c) l'angle $x + \pi$ ha de caure als $\frac{\pi}{2}$. Per tant, l'angle x ha de caure a $\frac{3\pi}{2}$. Per tant x serà de la forma:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

d) l'angle $x + \frac{\pi}{2}$ ha de caure a l'angle π . Per tant, x ha de caure a $\frac{\pi}{2}$, i serà de la forma:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Exercici 3.1.13.

Trobeu tots els angles que compleixen les següents equacions:

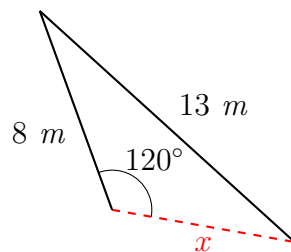
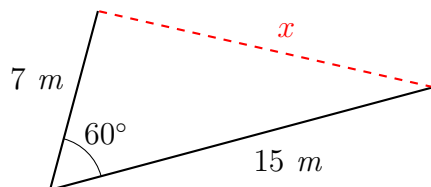
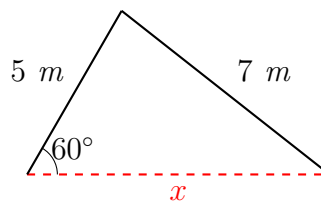
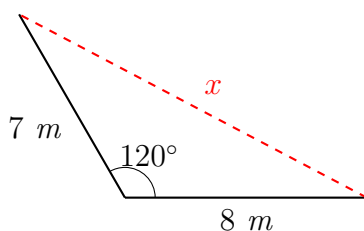
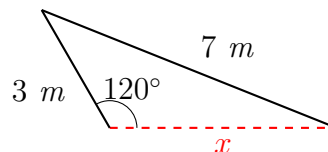
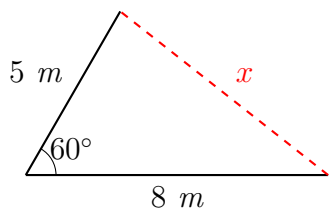
a) $\tan(x) - \sin(x) \cdot \tan(x) = 0$

b) $\sin(2x) = \tan(x)$

3.2 Teoremes del sinus i del cosinus

Exercici 3.2.14.

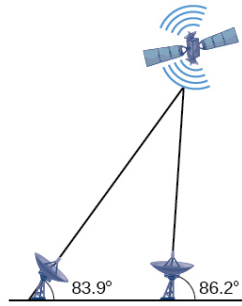
Trobeu la longitud del costat que falta (x) a cadascun dels següents triangles:



Exercici 3.2.15.

Dues antenes separades 10 Km apunten a un satèl·lit tal com es mostra a la següent figura. A quina altura orbita el satèl·lit?

Solució .



El satèl·lit i les antenes formen un triangle d'angles:

$$A = 83.9^\circ$$

$$B = 180 - 86.2 = 93.8^\circ$$

$$C = 180 - A - B = 2.3^\circ$$

L'altura a la que “vola” el satèl·lit la podem trobar fent:

$$h = b \cdot \sin(A),$$

on b és el costat oposat a l'angle B .

Per trobar b només cal aplicar el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{10}{\sin(2.3)} \implies b = 248.63 \text{ Km}$$

Per tant

$$h = 247.22 \text{ Km}$$

Exercici 3.2.16.

Una persona observa un objecte que té davant i a la seva esquerra. L'ull esquerra apunta amb un angle de 7° respecte la frontal (perpendicular sortint del front), mentre que el dret ho fa amb un angle de 10° . Sabent que la distància entre els ulls és de 63mm , a quina distància es troba l'objecte de l'ull més proper?

Solució .

Els dos ulls i l'objecte formen un triangle obtusangle d'angles 97° (ull esquerra), 80° (ull dret) i $180 - 97 - 80 = 3^\circ$. L'ull més proper és l'esquerra, i amb el teorema del sinus trobem la distància a la que es troba:

$$\frac{x}{\sin(80)} = \frac{63}{\sin(3)} \implies x = 1.185\text{m}$$

Exercici 3.2.17.

Els costats d'un paral·lelogram mesuren 12 i 7 cm, i l'angle que formen és 115° .
Quant mesuren les diagonals d'aquest paral·lelogram?

Solució .

Si fem un dibuix del paral·lelogram i les seves diagonals, veurem que hem de resoldre dos triangles (no rectangles!). D'un d'ells (el de la diagonal més gran) sabem dos costats i un angle, i volem conèixer el costat "oposat a l'angle". El teorema del cosinus ens el dóna directament:

$$D^2 = 12^2 + 7^2 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cos 115^\circ,$$

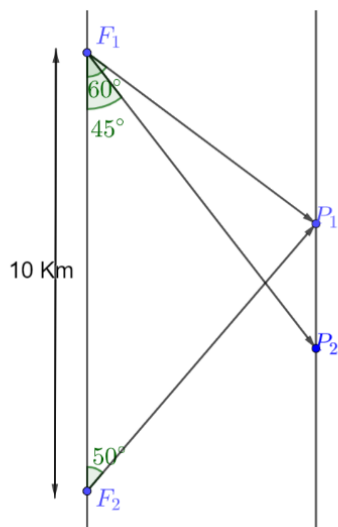
d'on $D = 16.248\text{cm}$. L'altre triangle el podem resoldre de la mateixa manera, però ens falta un angle, que és $180 - 115 = 65^\circ$. Per tant, tenim

$$d^2 = 12^2 + 7^2 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cos 65^\circ,$$

d'on $d = 11.045\text{cm}$.

Exercici 3.2.18.

Un vaixell navega paral·lelament a la línia que uneix dos fars F_1 i F_2 , situats a una distància de 10km un de l'altre. En un moment donat, la visual dirigida al vaixell des del far F_1 forma un angle de 60° amb F_1F_2 , i la visual des de F_2 forma un angle de 50° amb aquesta mateixa recta. Al cap de 10 minuts, la visual des de F_1 forma un angle de 45° amb F_1F_2 . A quina velocitat navega el vaixell? (suposeu que navega a velocitat constant).



Solució .

Tot seguit es presenten dues possibles solucions:

1. La situació es resumeix a la següent figura A la Figura 1 hi ha representat el

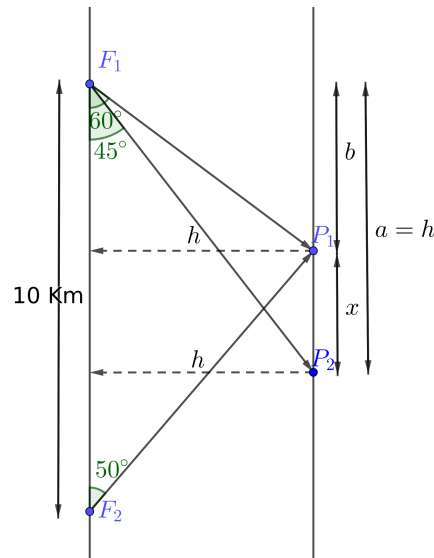


Figura 1: Situació solució 1

punt P_1 on es troba el vaixell en el moment de la primer a mesura, i P_2 en el moment de la segona. Per tal de saber a quina velocitat es mou el vaixell només cal saber la distància $x = P_1P_2$ recorreguda en 10 min. Per tal de conèixer la distància x fixem-nos que

$$x = a - b$$

Per tal de trobar b només caldrà trobar la distància F_1P_1 i fer

$$b = F_1P_1 \cos(60)$$

Podem trobar la distància F_1P_1 aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{F_1P_1}{\sin(50)} = \frac{10}{\sin(180 - 60 - 50)}$$

d'on

$$F_1P_1 = 8.152 \text{ Km}$$

i

$$b = 8.152 \cos(60) = 4.076 \text{ Km}$$

Ara, per trobar a , fixem-nos que en ser l'angle corresponent de 45° , tindrem que

$$a = h$$

Per tant, només cal trobar h fent servir

$$h = F_1 P_1 \sin(60) = 7.06 \text{ Km}$$

Per tant:

$$x = a - b = 2.983 \text{ Km}$$

i la velocitat serà:

$$\frac{x}{10 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \boxed{17.9 \text{ Km/h}}$$

2. La segona opció és més directa. A partir dels angles que ens han donat podem trobar els angles marcats en rosa a la Figura 2.

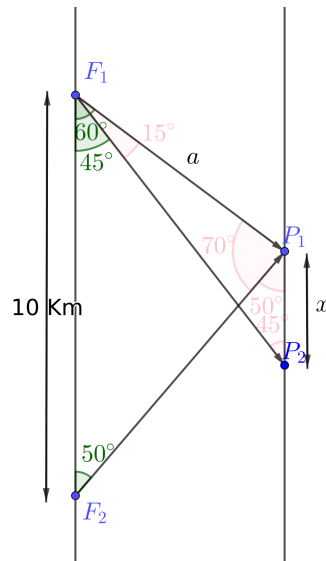


Figura 2: Situació solució 2.

- L'angle de 15° surt de restar $60^\circ - 45^\circ$

- L'angle de 70° surt del fet que els angles del triangle $F_1F_2P_1$ han de sumar 180° : $180 - 60 - 50 = 70$
- L'angle de 50° surt del fet que les dues rectes són paral·leles i aquest angle queda emparellat amb l'angle de 50°
- L'angle de 45° també surt del fet que les dues rectes són paral·leles, i aquest angle queda emparellat amb l'angle de 45°

Diem ara a a la distància entre F_1 i P_1 . Aplicant el teorema del sinus al triangle $F_1F_2P_1$ tindrem:

$$\frac{\sin(50)}{a} = \frac{\sin(70)}{10} \Rightarrow a = \frac{10 \sin(50)}{\sin(70)}$$

Un cop tenim a podem trobar x tornant a aplicar el teorema del sinus amb el triangle $F_1P_1P_2$:

$$\frac{\sin(45)}{a} = \frac{\sin(15)}{x} \Rightarrow x = \frac{a \sin(15)}{\sin(45)} = \frac{10 \cdot \sin(50) \cdot \sin(15)}{\sin(70) \cdot \sin(45)} = 2.983 \text{ km}$$

Per tant, la velocitat serà de

$$\frac{x}{10 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \boxed{17.9 \text{ Km/h}}$$

Exercici 3.2.19.

Dues torres d'observació forestal, A i B , estan separades per una distància en línia recta de 10 km. Des de la torre A es detecta un incendi i es mesura que la línia visual cap a l'incendi forma un angle de 42° amb la línia que uneix les dues torres. Des de la torre B , la visual cap a l'incendi forma un angle de 65° amb la mateixa línia d'unió entre les torres. A quina distància es troba l'incendi de la torre A ?

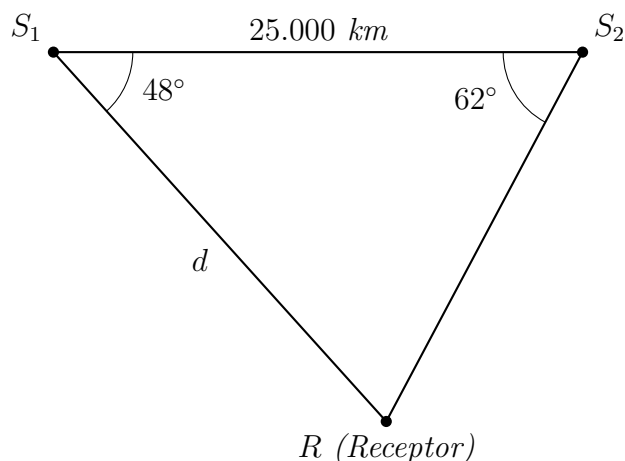
Solució .

L'incendi es troba a aproximadament 9.48 km de la torre A .

Exercici 3.2.20.

Per determinar la seva posició exacta a la Terra, un receptor GPS R rep el senyal de dos satèl·lits, S_1 i S_2 . En un instant donat, se sap que la distància en línia recta entre els dos satèl·lits és de 25.000 km. Mitjançant les dades transmises, el sistema determina que l'angle sota el qual el satèl·lit S_1 veu el receptor R i el satèl·lit S_2 és de 48° . D'altra banda, l'angle sota el qual el satèl·lit S_2 veu el receptor R i el satèl·lit S_1 és de 62° .

Observa l'esquema de la situació i calcula quin és el valor de la distància d entre el satèl·lit S_1 i el receptor R .



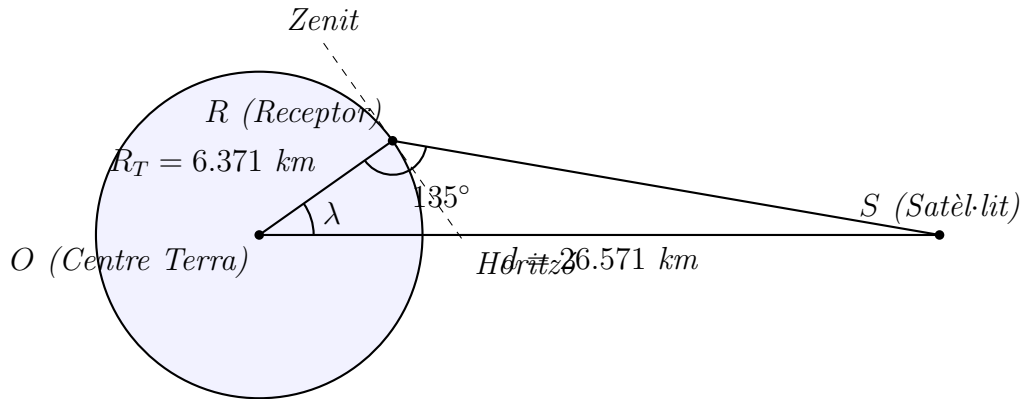
Solució .

La distància d des del satèl·lit S_1 fins al receptor R és d'aproximadament 23.490 km .

Exercici 3.2.21.

Un satèl·lit GPS S orbita a una distància de 26.571 km del centre de la Terra i es troba verticalment sobre l'equador al meridià de Greenwich (longitud 0°). Un receptor R , situat a la superfície de la Terra i sobre el mateix meridià, observa el satèl·lit amb un angle d'elevació de 45° respecte al seu horitzó local.

Sabent que el radi de la Terra és $R_T = 6.371 \text{ km}$ i que l'horitzó és sempre perpendicular al radi terrestre que passa pel receptor, troba la latitud λ i la longitud a la qual es troba el receptor.



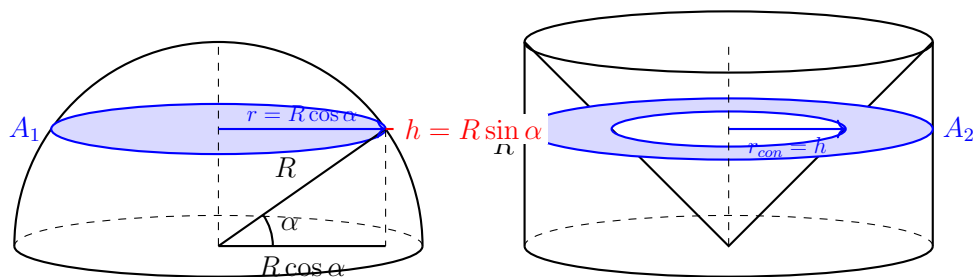
Solució .

El receptor es troba a una latitud de $\lambda \approx 35,24^\circ$ Nord i a una longitud de 0° .

Exercici 3.2.22.

L'antiga demostració d'Arquímedes per trobar el volum de l'esfera consisteix a comparar una semiesfera de radi R amb un cilindre de radi R i alçada R al qual se li ha extret un con invertit de radi R i alçada R .

Imagina que tallem els dos sòlids horitzontalment. Podem definir l'alçada d'aquest tall fent servir un angle d'elevació α des de la base ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$). Per tant, el tall es fa a una alçada $h = R \sin(\alpha)$.



- A la semiesfera, el radi del tall horitzontal forma un triangle rectangle amb el radi de l'esfera R i l'angle α . Demosta que l'àrea d'aquest tall circular és $A_1 = \pi R^2 \cos^2(\alpha)$.
- Al cilindre buidat, el radi exterior sempre és R , però el forat cònic té un radi que creix linealment amb l'alçada, sent $r_{con} = h = R \sin(\alpha)$. Demosta que l'àrea del tall d'aquest sòlid (l'àrea de l'anell) és $A_2 = \pi R^2 (1 - \sin^2(\alpha))$.

- c) Fent servir la trigonometria, dedueix que $A_1 = A_2$ per a qualsevol angle α .
- d) El Principi de Cavalieri diu que si dos sòlids tenen la mateixa àrea en totes les seves seccions paral·leles, tenen el mateix volum. Sabent que el volum del cilindre és πR^3 i el del con és $\frac{1}{3}\pi R^3$, dedueix el volum de la semiesfera i demostra que el volum de l'esfera completa és $\frac{2}{3}$ del volum d'un cilindre que la circumscriu (de radi R i alçada $2R$).

Solució .

a) El radi circular del tall de l'esfera correspon al catet contigu de l'angle α , per tant $r = R \cos(\alpha)$. L'àrea del cercle és $A_1 = \pi r^2 = \pi(R \cos(\alpha))^2 = \pi R^2 \cos^2(\alpha)$.

b) L'àrea de l'anell del segon sòlid és l'àrea del tall del cilindre menys l'àrea del tall del con: $A_2 = \pi R^2 - \pi(r_{con})^2 = \pi R^2 - \pi(R \sin(\alpha))^2 = \pi R^2 - \pi R^2 \sin^2(\alpha)$. Traient factor comú, queda $A_2 = \pi R^2(1 - \sin^2(\alpha))$.

c) Per la identitat trigonomètrica fonamental, sabem que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, el que implica que $1 - \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$. Substituint a l'expressió anterior, tenim $A_2 = \pi R^2 \cos^2(\alpha)$, per tant, $A_1 = A_2$.

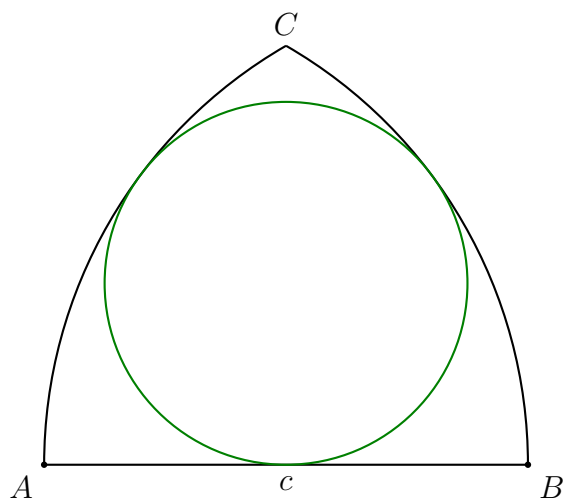
d) Pel Principi de Cavalieri, $V_{semiesfera} = V_{cilindre} - V_{con} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$. El volum de l'esfera sencera és el doble: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$. El volum d'un cilindre circumscriu (que té radi R i alçada $2R$) és $V_{circ} = \pi R^2 \cdot (2R) = 2\pi R^3$. La proporció entre l'esfera i el cilindre circumscriu és:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{circ}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

Arquímedes tenia raó!

Exercici 3.2.23.

En la següent figura els arcs $\widehat{AC}$ i $\widehat{BC}$ tenen centres B i A , respectivament. Sabent que la longitud del segment AB és c , calculeu el radi de la circumferència que és tangent al segment AB i als dos arcs.



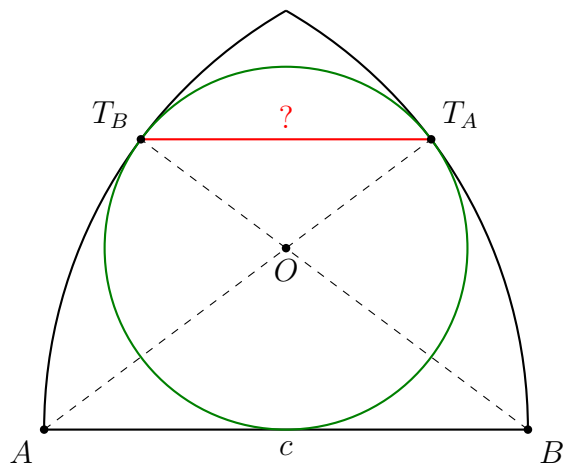
Solució .

El radi de la circumferència és $r = \frac{3c}{8}$.

Exercici 3.2.24.

Recuperant la figura del problema anterior [3.2.23](#), anomenem O el centre de la circumferència petita (de radi $r = \frac{3c}{8}$). Aquesta circumferència és tangent als arcs de centre A i centre B en els punts T_A i T_B respectivament.

Fent servir la trigonometria, calcula quina és la distància en línia recta entre aquests dos punts de tangència (T_A i T_B) en funció de la longitud c del segment AB .

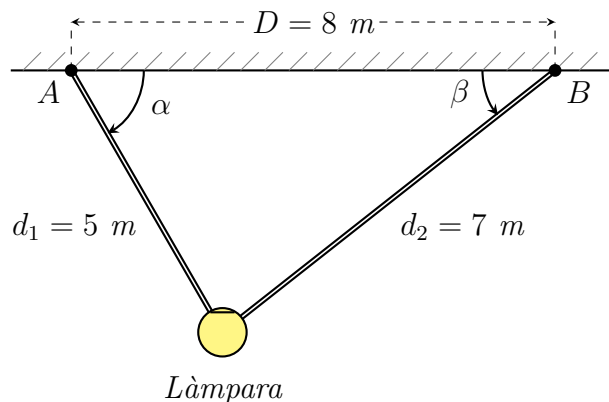


Solució .

La distància entre els dos punts de tangència és $T_A T_B = \frac{3c}{5}$.

Exercici 3.2.25.

Una làmpara de sostre està penjada mitjançant un cordill que està lligat als seus dos extrems a dos punts diferents del sostre, els quals es troben a una distància horitzontal $D = 8 \text{ m}$ l'un de l'altre. El cordill té una longitud total de $L = 12 \text{ m}$ i la làmpara està lligada a un punt del cordill que es troba a $d_1 = 5 \text{ m}$ d'un dels extrems lligats al sostre (digueu-li punt A).



- Trobeu els angles α i β que formen els dos segments del cordill amb el sostre a cada punt d'ancoratge.
- Trobeu la distància a la que es troba la làmpara del sostre.

3.3 Funcions trigonomètriques

Exercici 3.3.1.

Calculeu els límits:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\sin(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{x^2}{\cos(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)}{\tan(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x + \frac{\pi}{2})}$

Exercici 3.3.2.

Considereu la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \pi^2}{\pi x - \pi^2} & \text{si } x < \pi \\ 2 \cdot \frac{\cos(x - \pi)}{\sin(x - \frac{\pi}{2})} & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne el domini
- b) Trobeu-ne els punts de tall amb els eixos
- c) Discussiu-ne la continuïtat

4 Geometria

4.1 Vectors

Exercici 4.1.1.

Calculeu l'angle que formen els següents vectors amb l'eix d'abscisses:

- a) $(1, 3)$
- b) $(-1, -3)$
- c) $(1, -2)$
- d) $(-2, 4)$
- e) $(-2, -3)$

Exercici 4.1.2: Paràmetre k .

Calculeu el valor del paràmetre k per tal que els vectors $\vec{u} = (k, -2)$ i $\vec{v} = (3, 4)$ tinguin la mateixa direcció

Exercici 4.1.3.

Calculeu el valor del paràmetre k per tal que els vectors $\vec{u} = (0, -2)$ i $\vec{v} = (3, k)$ tinguin la mateixa direcció.

Exercici 4.1.4: Hexàgon.

Els punts $A = (3, 1)$, $B = (1, 5)$, $C = (3, 9)$, $D = (7, 9)$, $E = (9, 5)$ i $F = (7, 1)$ són els vèrtexs d'un hexàgon. Digueu si es tracta d'un hexàgon regular o no.

Exercici 4.1.5: Punts a certa distància.

Trobeu les coordenades exactes dels dos punts que es troben a distància 2 del punt $(1, 3)$ en la direcció del vector $(1, 3)$.

Exercici 4.1.6: Extrem d'un segment.

D'un segment, AB sabem que $A = (2, 0)$ i que el seu punt mig és el punt $(3, -4)$. Trobeu les coordenades el punt B .

Exercici 4.1.7: Triangle isòsceles.

Considereu els punts $A = (2, 1)$, $B = (6, 1)$ i $C = (4, 5)$

- a) Comproveu que es tracta d'un triangle isòscel·les.
- b) Trobeu el seu perímetre i la seva àrea.

Exercici 4.1.8.

Trobeu:

a) $\text{proj}_{(2,1)}(3, 2)$

b) $\text{proj}_{(0,1)}(2, -3)$

c) $\text{proj}_{(1,-3)}(3, 1)$

Exercici 4.1.9.

Trobeu l'angle entre els vectors $(1, -2)$ i $(1, 5)$.

Exercici 4.1.10.

Trobeu el baricentre d'un triangle de vèrtexs $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ i $C = (2, 3)$.

Exercici 4.1.11.

D'un triangle coneixem dos vèrtexs, $V_1 = (1, 0)$ i $V_2 = (0, 3)$, i el seu baricentre, $B = (2, 1)$. Trobeu les coordenades del tercer vèrtex.

Solució .

Sabem que el baricentre d'un triangle es troba a $1/3$ entre el punt mig de dos vèrtexs i el vèrtex oposat. Si $M = \frac{V_1 + V_2}{2}$ és el punt mitjà entre V_1 i V_2 , el tercer vèrtex l'obtidrem col·locant el vector $\overrightarrow{MB}$ allargat el triple sortint de M :

$$\begin{aligned} V_3 &= M + 3 \cdot \overrightarrow{MB} = M + 3(B - M) = M + 3B - 3M = 3B - 2 \cdot M \\ &= 3 \cdot B - 2 \cdot \frac{V_1 + V_2}{2} = 3B - V_1 - V_2 = (6, 3) - (1, 0) - (0, 3) = \boxed{(5, 0)} \end{aligned}$$

Exercici 4.1.12.

Els punts $A = (1, 3)$ i $B = (-1, 2)$ són dos vèrtexs consecutius d'un rectangle d'àrea 8. Trobeu els 4 possibles altres vèrtexs.

Exercici 4.1.13.

Els punts $A = (1, 1)$ i $B = (2, 5)$ pertanyen al costat desigual d'un triangle isòsceles d'àrea $3\sqrt{15}$. Trobeu les coordenades de tots els possibles altres vèrtexs.

Solució .

Com l'àrea és $3\sqrt{15}$ i el costat desigual mesura $\|\vec{AB}\| = \|(2, 5) - (1, 1)\| = \|(1, 4)\| = \sqrt{17}$, l'altura del triangle serà:

$$\frac{\sqrt{17} \cdot h}{2} = 3\sqrt{15} \implies h = \frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{17}}$$

Per trobar el tercer vèrtex només caldrà girar el vector $\vec{AB}$ 90° , posar-lo sortint del punt mig del segment AB i fer que tingui mòdul h . Per tal que tingui mòdul h caldrà

normalitzar-lo (dividint entre el seu mòdul) i multiplicar-lo per h . És a dir, els dos altres possibles vèrtexs seran:

$$C = \frac{A+B}{2} + \frac{\frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{17}}}{\sqrt{17}} \cdot (4, -1) = \frac{A+B}{2} + \frac{6\sqrt{15}}{17}(4, -1) = (6.96, 1.63)$$
$$C' = \frac{A+B}{2} - \frac{6\sqrt{15}}{17} \cdot (4, -1) = (-3.96, 4.36)$$

4.2 Rectes

Exercici 4.2.1.

Donada la recta

$$r : (x, y) = (1, 3) + \lambda \cdot (1, 2)$$

- a) Digueu si els punts $(-1, -1)$, $(0, 1)$ i $(3, 6)$ pertanyen a la recta o no.
- b) Trobeu l'equació vectorial de la recta que és paral·lela a recta r però que passi pel punt $(2, 3)$.
- c) Trobeu l'equació vectorial de la recta perpendicular a r que passi pel punt $(0, 0)$.

Exercici 4.2.2.

Donat un triangle de vèrtexs $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$ i $C = (-1, -1)$ trobeu:

- a) Les equacions vectorials de les tres mitjanes
- b) Les equacions vectorials de les tres mediatrises
- c) Les equacions vectorials de les tres altures

Exercici 4.2.3.

Considereu la recta l'equació general de la qual és

$$r : 2x - y + 3 = 0$$

Digueu si el vector $(3, 6)$ és un vector director o no.

Solució .

Si $(3, 6)$ és un vector director aleshores haurà de ser perpendicular al vector gradient $(2, -1)$. Ho comprovem fent servir el producte escalar:

$$(3, 6) \cdot (2, -1) = 6 - 6 = 0$$

Efectivament, és un vector director.

Exercici 4.2.4.

Trobeu el valor de q per tal que les rectes

$$r : (x, y) = (2, 3) + \lambda(3q, 2q)$$

$$s : qx - y + 3 = 0$$

siguin:

a) Paral·leles

b) Perpendiculars

Exercici 4.2.5.

Donats els punts $A = (1, 2)$, $B = (-1, 3)$ i $C = (2, 3)$, trobeu el circumcentre (punt on es tallen les mediatrises) del triangle ABC . Comproveu que aquest punt és el centre de la circumferència circumscrita al triangle. És a dir, és el centre de la circumferència que passa pels tres vèrtexs del triangle.

Exercici 4.2.6.

Donat un triangle de vèrtexs $A = (0, 2)$, $B = (1, 4)$ i $C = (-2, 1)$, trobeu:

a) Les coordenades del baricentre

b) Les coordenades del punt on es tallen les mediatrises (circumcentre)

c) Les coordenades del punt on es tallen les altures (ortocentre)

Solució .

a) El baricentre es troba a un terç entre el punt mig d'un costat i el vèrtex oposat:

$$\begin{aligned} B &= M_{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{A+B}{2} + \frac{C-M}{3} = \frac{3A+3B+2C-2M}{6} \\ &= \frac{3A+3B+2C-2\frac{A+B}{2}}{6} = \frac{3A+3B+2C-A-B}{6} \\ &= \frac{2A+2B+2C}{6} = \frac{A+B+C}{3} = \frac{(0, 2) + (1, 4) + (-2, 1)}{3} = \frac{(-1, 7)}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right) \end{aligned}$$

- b) Només caldrà calcular la intersecció entre dues mediatrïus, m_{AB} i m_{BC} , per exemple. Els vectors gradients seran $B-A = (1, 2)$ i $B-C = (-3, -3)$, respectivament. Per comoditat, canviarem el gradient de m_{BC} pel vector $(1, 1)$, que té la mateixa direcció que $(-3, -3)$. Per tant, les equacions generals seran:

$$m_{AB} : x + 2y + C_{AB} = 0$$

$$m_{BC} : x + y + C_{BC} = 0$$

Ara cal trobar les constants C_{AB} i C_{BC} imposant que aquestes rectes passin per $M_{AB} = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, 3)$ i $M_{BC} = \frac{B+C}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, respectivament:

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot 3 + C_{AB} = 0 \implies C_{AB} = -\frac{13}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + C_{BC} = 0 \implies C_{BC} = -2$$

Ara, per trobar el punt d'intersecció només caldrà resoldre el següent sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - \frac{13}{2} = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

Fent reducció restant la primera equació menys la segona obtenim:

$$y - \frac{13}{2} + 2 = 0 \implies y = \frac{9}{2}$$

Substituint a la segona equació obtenim

$$x + \frac{9}{2} - 2 = 0 \implies x = -\frac{5}{2}$$

i circumcentre serà el punt $(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$.

- c) Les altures són paral·leles a les mediatrïus, però passant pel vèrtex oposat enlloc del punt mig. Així només recalculer les constants C de l'apartat anterior:

$$h_c : x + 2y + C_C = 0$$

$$h_A : x + y + C_A = 0$$

Imposant ara que h_c passi per C i h_A passi per A obtenim:

$$-2 + 2 \cdot 1 + C_C = 0 \implies C_C = 0$$

$$0 + 2 + C_A = 0 \implies C_A = -2$$

Ara, per trobar l'ortocentre, només caldrà resoldre els sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

Restant la primera equació menys la segona obtenim $y + 2 = 0 \implies y = -2$, i substituint a la segona equació obtenim $x - 2 - 2 = 0 \implies x = 4$. Per tant, l'ortocentre estarà al punt $(4, -2)$.

Exercici 4.2.7.

Considereu la recta $r : 2x - y + 2 = 0$ i el punt $P = (0, 0)$.

- a) Trobeu l'equació de la recta s perpendicular a r que passa per P .
- b) Trobeu el punt de tall entre r i s .
- c) Trobeu el punt simètric del punt P respecte la recta r .

Solució .

Podeu seguir la solució a l'applet de Geogebra:

<https://www.geogebra.org/classic/thdrkash>

- a) Una recta perpendicular a r serà de la forma $x + 2y + C = 0$, ja que només cal girar el gradient 90° . Ara imposem que passi per P : $0 + 0 + C = 0 \implies C = 0$, i la recta serà $x + 2y = 0$.
- b) Només cal resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\}$$

Si multipliquem la segona equació per 2 i li restem la primera obtenim l'equació $5y - 2 = 0 \implies y = \frac{2}{5}$. Substituïm a la segona obtenim $x + 2 \cdot \frac{2}{5} = 0 \implies x = -\frac{4}{5}$. L'ortocentre serà doncs el punt $(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) = (-0.8, 0.4)$.

- c) Anomenem $Q = (-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ al punt d'intersecció que hem trobat a l'apartat anterior. Per trobar el punt simètric de P respecte de r només cal situar a Q el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = Q + Q - P = 2Q - P$$

Exercici 4.2.8.

Trobeu els valors del paràmetre q per tal que les rectes

$$\begin{aligned}2x - qy + 3 &= 0 \\(q - 1)x + 3qy + 4 &= 0\end{aligned}$$

compleixin

- a) Siguin paral·leles
- b) Siguin coincidents
- c) Siguin secants
- d) Es tallin al punt $(1, -1)$
- e) Es tallin al punt $(-\frac{3}{2}, 0)$
- f) Siguin perpendiculars
- g) Formin un angle de 30° entre elles

Solució .

D'una banda el producte escalar entre $(2, -q)$ i $(q - 1, 3q)$ és $2(q - 1) - q3q = 2q - 2 - 3q^2$.

4.3 Distàncies

Exercici 4.3.1.

Trobeu la distància entre el punt $P = (1, 3)$ i la recta $r : (x, y) = (2, 2) + \lambda(1, 1)$

Solució .

Per tal de trobar $d(P, r)$ ens aniria bé escriure la recta r en forma general. Com $(1, 1)$ és un vector director, el vector $(1, -1)$ en serà el gradient, i la recta serà:

$$x - y + C = 0$$

Ara trobem C imposant que el punt $(2, 2)$ compleixi l'equació:

$$2 - 2 + C = 0 \implies C = 0$$

Per tant, la recta en forma general tindrà la forma $x - y = 0$. Ara podem aplicar la fórmula de la distància entre un punt i la recta:

$$d(P, r) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

Exercici 4.3.2.

Considereu el punt $P(2, 3)$ i la recta $r : 2x + y + 1 = 0$.

- a) Trobeu $d(P, r)$
- b) Trobeu el punt simètric de P respecte de r .

Exercici 4.3.3.

Trobeu la posició relativa entre les rectes:

$$\begin{aligned} r : (x, y) &= (3, 1) + \lambda(2, -1) \\ s : 2x + 4y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

- a) Trobeu la posició relativa entre elles
- b) En cas que siguin secants trobeu-ne l'angle de tall i el punt d'intersecció. En cas que siguin paral·leles trobeu-ne la distància entre elles. En cas que siguin coincidents no feu res més.

Solució .

- a) Observem que els vector directors de r i el gradient de s són perpendiculars:

$$(2, -1) \cdot (2, 4) = 4 - 4 = 0$$

Per tant, les rectes són paral·lels i bé la mateixa. Per distingir-ho comprovem si el punt $(3, 1)$ pertany a s simplement comprovant si compleix l'equació:

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 4 = 6 + 4 + 4 = 14 \neq 0$$

Per tant, les dues rectes són paral·leles.

- b) Per trobar la distància entre elles només caldrà calcular la distància entre un punt qualsevol d'una d'elles i l'altra. Com s està en vectorial escollim el punt $P = (3, 1)$ de la recta r , i obtenim:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{14}{\sqrt{20}} = \frac{14}{\sqrt{4 \cdot 5}} = \frac{2 \cdot 7}{2\sqrt{5}} = \boxed{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$$

Exercici 4.3.4.

D'un triangle d'àrea 4 en coneixem dos vèrtex, $V_1 = (-1, 2)$ i $V_2 = (1, 0)$. Trobeu les coordenades del tercer vèrtex sabent que aquest es troba sobre la recta $2x + y - 4 = 0$.

Solució .

Podeu seguir la solució a l'applet de Geogebra:

<https://www.geogebra.org/classic/hxmn4m8f>

L'àrea d'un triangle és la meitat del producte d'una base per l'altura corresponent. Com tenim dos vèrtexs podem calcular una base:

$$b = \|\overrightarrow{V_1V_2}\| = \|(2, -2)\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Per tant, l'altura serà

$$\frac{h \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4 \implies h = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Ara ens caldrà trobar un punt de la recta $r : 2x + y - 4 = 0$ que estigui a distància h de la recta que passa per V_1 i V_2 . Trobem aquesta darrera recta en forma general. El gradient l'obtidrem girant 90° el vector $\overrightarrow{V_1V_2} = V_2 - V_1 = (2, -2)$, que serà el vector $(2, 2)$. Ara, per facilitar els càlculs, agafem com a gradient el vector $(1, 1)$, que té la mateixa direcció que el vector $(2, 2)$. Per tant, la recta que passa per V_1 i V_2 té és de la forma

$$x + y + C = 0$$

Troblem C imposant que passi per V_2 : $1 + 0 + C = 0 \implies C = -1$, i la recta que passa per aquests dos vèrtexs és la recta

$$s : x + y - 1 = 0$$

Ara ens caldrà buscar un punt de la recta de l'enunciat que estigui a distància $2\sqrt{2}$ de r :

$$d((x, y), r) = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

Com el punt (x, y) ha de ser de la recta $2x + y - 4 = 0$, podem aïllar $y = -2x + 4$ i substituir-ho a l'equació anterior:

$$\frac{x - 2x + 4 - 1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \implies |-x + 3| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \implies |-x + 3| = 4$$

L'equació $|3 - x| = 4$ té dues possibles solucions: $3 - x = 4 \implies x = -1$ o bé $-(3 - x) = 4 \implies x = -7$. Substituint a l'equació de la recta de l'enunciat trobem els corresponents valors de y , i obtenim els punts:

$$V_3 = (-1, 6) \quad V_3 = (7, -10)$$

Exercici 4.3.5.

Demostreu que el baricentre d'un triangle es troba a distància $\frac{1}{3}$ entre el punt mig d'un costat i el vèrtex oposat.

Exercici 4.3.6.

Donades les rectes

$$\begin{aligned} r : (x, y) &= (2, 0) + \lambda(1, -1) \\ s : \frac{x - 2}{3} &= y + 1 \end{aligned}$$

- a) Trobeu-ne la posició relativa
- b) En cas que sigui paral·lel trobeu-ne la distància entre ells, en cas que sigui iguals no feu res, i en cas que siguin secants trobeu-ne el punt d'intersecció i l'angle de tall

Exercici 4.3.7.

Trobeu tots els punts que es troben a la mateixa distància de les rectes

$$\begin{aligned} r : 2x + 3y + 1 &= 0 \\ s : y &= -\frac{2}{3}x + 4 \end{aligned}$$

Solució .

Fixem-nos que les rectes són paral·leles. En efecte, si passem s a general tenim $s : 2x + 3y - 12 = 0$. Com els gradients són iguals, però les constant no ho són, les rectes tenen la mateixa direcció però passen per punts diferents: són paral·leles. Els punts que es troben a la mateixa distància de les rectes es trobaran sobre una altra recta que estarà entre r i s . Diguem $P = (x, y)$ a un punt d'aquesta recta. Aleshores $P = (x, y)$ haurà de complir:

$$d(P, r) = d(P, s) \implies \frac{|2x + 3y + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2x + 3y - 12|}{\sqrt{13}}$$

Per tant, l'equació de la recta vindrà de l'equació:

$$|2x + 3y + 1| = |2x + 3y - 12|$$

Ara caldrà eliminar els valors absoluts. Una equació de l'estil $|f(x)| = |g(x)|$ té 4 opcions, que acaben sent dues:

$$f(x) = g(x)$$

$$-f(x) = g(x)$$

$$f(x) = -g(x) \text{ Com la segona}$$

$$-f(x) = -g(x) \implies f(x) = g(x) \text{ Com la primera}$$

Per tant provem:

$$2x + 3y + 1 = 2x + 3y - 12 \implies 1 = -12? \text{ No pot ser}$$

$$-(2x + 3y + 1) = 2x + 3y - 12 \implies -2x - 3y - 1 = 2x + 3y - 12 \implies 4x + 6y - 11 = 0$$

I aquesta darrera és la solució.

4.4 Llocs geomètrics

Exercici 4.4.1.

Trobeu l'equació de la circumferència que:

- a) Té centre $(1, -2)$ i radi 2.
- b) Té centre $(1, 4)$ i és tangent a l'eix d'ordenades
- c) Té centre $(1, 4)$ i és tangent a l'eix d'abscisses
- d) Està circumscrita al triangle de vèrtexs $(1, 0)$, $(0, 3)$ i $(0, 0)$.
- e) Té centre $(1, 3)$ i és tangent a la recta $2x + 3y + 2 = 0$
- f) Té centre $(2, 5)$ i és tangent a la circumferència $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ (alerta que n'hi ha dues!)
- g) Té centre $(1, 2)$ i és tangent a la circumferència $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ (alerta que n'hi ha dues!).

Exercici 4.4.2.

Trobeu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ i $C = (4, 0)$.

Solució .

Es tracta de la circumferència circumscripita al triangle ABC , el centre de la qual es troba al punt on es tallen les mediatrises. Trobem-les.

- Mediatriu AB . Com és perpendicular a AB , el vector $\overrightarrow{AB}$ serà el gradient: $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1)$. Per tant la recta té la forma $x + y + C = 0$. Ara impossem que passi pel punt mig del segment AB , $M = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, d'on traïem que $c = -1$.
- Mediatriu AC . Com els punts A i C es troben a l'eix d'abscisses, la mediatriu serà una recta vertical passant per la meitat: $x = 2$. Sinó, procedint com amb la mediatriu del segment AB obtindríem el mateix.

Ara caldria trobar el punt on es tallen aquestes mediatrises, cosa que farem resolent el sistema:

$$x + y - 1 = 0 \quad x = 2$$

I el centre de la circumferència serà el punt $O = (2, -1)$.

Ara ens cal trobar el radi. Aquest serà la distància entre el punt O i qualsevol dels 3 vèrtexs:

$$R = d(O, B) = d(O, C) = d(O, A) = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Per tant, l'equació de la circumferència que estem buscant serà:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

Recordeu que el radi apareix elevat al quadrat i l'arrel marxa.