

Exercicis resolts (o no) de matemàtiques de $2n$ de Batxillerat CCSS

Curs 25-26

Índex

1 Funcions	11
<i>Exercici: 1.1</i>	11
<i>Exercici: 1.2</i>	11
<i>Exercici: 1.3</i>	11
<i>Exercici: 1.4</i>	12
<i>Exercici: 1.5</i>	12
<i>Exercici: 1.6</i>	12
<i>Exercici: 1.7</i>	13
<i>Exercici: 1.8</i>	13
<i>Exercici: 1.9</i>	13
<i>Exercici: 1.10 PAU juny 2016</i>	14
<i>Exercici: 1.11 PAU setembre 2016</i>	14
<i>Exercici: 1.12 PAU Setembre 2016 a)</i>	14
<i>Exercici: 1.13</i>	14
<i>Exercici: 1.14</i>	15
<i>Exercici: 1.15</i>	15
<i>Exercici: 1.16 PAU 2020, S4 número 2</i>	15
<i>Exercici: 1.17 PAU 2020, S4 número 4, apartat a)</i>	16
<i>Exercici: 1.18 PAU 2021, S1 número 4</i>	16
<i>Exercici: 1.19 PAU 2021, S1 número 5</i>	16
<i>Exercici: 1.20 PAU 2022, S2 número 2</i>	16
<i>Exercici: 1.21</i>	17
<i>Exercici: 1.22</i>	17

<i>Exercici:</i> 1.23	18
<i>Exercici:</i> 1.24 Examen final 24-25	18
<i>Exercici:</i> 1.25 Recuperació/millora 24-25	18
<i>Exercici:</i> 1.26 Convocatòria extraordinària juny 2025	19
<i>Exercici:</i> 1.27 PAU Juny 2025	19
<i>Exercici:</i> 1.28	20
<i>Exercici:</i> 1.29	20
<i>Exercici:</i> 1.30	20
<i>Exercici:</i> 1.31 PAU 2025	20
2 Derivades	22
2.1 Taxa de variació mitjana	22
<i>Exercici:</i> 2.1.1	22
<i>Exercici:</i> 2.1.2	22
<i>Exercici:</i> 2.1.3	22
<i>Exercici:</i> 2.1.4	22
2.2 Derivades	22
<i>Exercici:</i> 2.2.5	22
<i>Exercici:</i> 2.2.6	23
<i>Exercici:</i> 2.2.7	23
<i>Exercici:</i> 2.2.8	23
<i>Exercici:</i> 2.2.9	23
<i>Exercici:</i> 2.2.10	23
<i>Exercici:</i> 2.2.11	24
<i>Exercici:</i> 2.2.12	24
<i>Exercici:</i> 2.2.13	24
<i>Exercici:</i> 2.2.14	24
2.3 Monotonia i extrems relatius	24
<i>Exercici:</i> 2.3.15	24
<i>Exercici:</i> 2.3.16	25
<i>Exercici:</i> 2.3.17	25
<i>Exercici:</i> 2.3.18	25
<i>Exercici:</i> 2.3.19 PAU 2023, setembre	25
<i>Exercici:</i> 2.3.20 PAU 2021, S1 número 4	25
<i>Exercici:</i> 2.3.21 PAU 2023, juny	26
<i>Exercici:</i> 2.3.22	26
<i>Exercici:</i> 2.3.23	26
<i>Exercici:</i> 2.3.24	26

<i>Exercici: 2.3.25</i>	26
<i>Exercici: 2.3.26 PAU Juny 2021</i>	27
<i>Exercici: 2.3.27</i>	27
<i>Exercici: 2.3.28 PAU Juny 2024, número 1</i>	27
<i>Exercici: 2.3.29 PAU Juny 2025</i>	28
<i>Exercici: 2.3.30 PAU 2025</i>	28
<i>Exercici: 2.3.31 PAU 2021</i>	28
<i>Exercici: 2.3.32</i>	29
2.4 Solucions	29
Solució: Exercici 2.2.5	29
Solució: Exercici 2.2.6	30
Solució: Exercici 2.2.7	30
Solució: Exercici 2.2.8	31
Solució: Exercici 2.2.9	31
Solució: Exercici 2.2.10	32
Solució: Exercici 2.2.11	33
Solució: Exercici 2.2.12	33
Solució: Exercici 2.2.13	33
Solució: Exercici 2.3.15	34
Solució: Exercici 2.3.16	35
Solució: Exercici 2.3.17	35
Solució: Exercici 2.3.28	35
Solució: Exercici 2.3.29	36
Solució: Exercici 2.3.30	37
3 Optimització	39
3.1 Oferta/demanda	39
<i>Exercici: 3.1.1 PAU Juny 2024</i>	39
<i>Exercici: 3.1.2 PAU Setembre 2025</i>	39
<i>Exercici: 3.1.3</i>	40
<i>Exercici: 3.1.4</i>	40
<i>Exercici: 3.1.5</i>	40
<i>Exercici: 3.1.6 PAU juny 2023</i>	41
<i>Exercici: 3.1.7</i>	41
3.2 Geomètries	41
<i>Exercici: 3.2.1</i>	41
<i>Exercici: 3.2.2</i>	42
<i>Exercici: 3.2.3</i>	42

3.3	Altres	42
<i>Exercici:</i>	3.3.1	42
3.4	Amb la funció donada	43
<i>Exercici:</i>	3.4.1	43
<i>Exercici:</i>	3.4.2	43
<i>Exercici:</i>	3.4.3	43
3.5	Tècnics	44
<i>Exercici:</i>	3.5.1	44
<i>Exercici:</i>	3.5.2	44
<i>Exercici:</i>	3.5.3 PAU Juny 2024	44
Solució:		45
<i>Exercici:</i>	3.5.4 PAU Setembre 2023	45
Solució:		45
<i>Exercici:</i>	3.5.5	46
<i>Exercici:</i>	3.5.6	46
<i>Exercici:</i>	3.5.7	46
<i>Exercici:</i>	3.5.8	47
<i>Exercici:</i>	3.5.9	47
<i>Exercici:</i>	3.5.10	47
<i>Exercici:</i>	3.5.11	48
<i>Exercici:</i>	3.5.12 PAU Juny 2016	48
<i>Exercici:</i>	3.5.13 PAU Juny 2015	48
3.6	Solucions	48
Solució:	Exercici 3.1.2	48
Solució:	Exercici 3.1.3	49
Solució:	Exercici 3.1.7	50
Solució:		51
Solució:	Exercici 3.2.3	51
Solució:	Exercici 3.4.3	52
Solució:	Exercici 3.2.1	52
Solució:	Exercici 3.2.2	53
Solució:	Exercici 3.5.5	54
Solució:	Exercici 3.5.6	55
Solució:	Exercici 3.5.9	56
Solució:	Exercici 3.5.10	57

4	Matrius	59
4.1	Operacions amb matrius	59
<i>Exercici:</i>	4.1.1 Valors de paràmetres	59
<i>Exercici:</i>	4.1.2	59
<i>Exercici:</i>	4.1.3	59
<i>Exercici:</i>	4.1.4 Propietat distributiva	59
<i>Exercici:</i>	4.1.5 Propietat associativa	59
<i>Exercici:</i>	4.1.6 Identitats notables	60
<i>Exercici:</i>	4.1.7 PAU, Juny 2019, número 1	60
<i>Exercici:</i>	4.1.8 PAU Juny 2016	60
<i>Exercici:</i>	4.1.9 PAU Juny 2015	61
<i>Exercici:</i>	4.1.10 PAU Juny 2017	61
<i>Exercici:</i>	4.1.11 PAU Setembre 2018	61
<i>Exercici:</i>	4.1.12 Commutativitat paràmetres	61
4.2	Potències	62
<i>Exercici:</i>	4.2.1 Potències cícliques	62
4.3	Determinants	62
<i>Exercici:</i>	4.3.1	62
4.4	Càlcul del rang	62
<i>Exercici:</i>	4.4.1 Rang de matrius	62
4.5	Matriu inversa	63
<i>Exercici:</i>	4.5.1 Determinant variable x	63
<i>Exercici:</i>	4.5.2 PAU, juny 2020, número 5	64
<i>Exercici:</i>	4.5.3 PAU setembre 20, número 1	64
<i>Exercici:</i>	4.5.4 PAU Juny 2018	64
4.6	Equacions matricials	64
<i>Exercici:</i>	4.6.1 Equacions matricials bàsiques	64
<i>Exercici:</i>	4.6.2 Miscel·lània d'equacions	65
<i>Exercici:</i>	4.6.3	66
<i>Exercici:</i>	4.6.4 PAU Juny 2017	66
4.7	Problemes amb matrius	67
<i>Exercici:</i>	4.7.1 PAU 2024 sèrie 1	67
<i>Exercici:</i>	4.7.2 PAU 2024 sèrie 5	67
<i>Exercici:</i>	4.7.3 PAU 2024 sèrie 3	68
<i>Exercici:</i>	4.7.4 PAU 2025 sèrie 0	69
<i>Exercici:</i>	4.7.5 PAU 2024 sèrie 1	69
<i>Exercici:</i>	4.7.6 PAU 2025 sèrie 4	70
4.8	Solucions	71

Solució: Exercici 4.1.1	71
Solució: Exercici 4.1.2	71
Solució: Exercici 4.1.3	71
Solució: Exercici 4.1.4	71
Solució: Exercici 4.1.5	71
Solució: Exercici 4.1.6	71
Solució: Exercici 4.1.7	72
Solució: Exercici 4.1.8	72
Solució: Exercici 4.1.9	72
Solució: Exercici 4.1.10	72
Solució: Exercici 4.1.11	72
Solució: Exercici 4.1.12	73
Solució: Exercici 4.2.1	73
Solució: Exercici 4.5.1	73
Solució: Exercici 4.5.2	73
Solució: Exercici 4.5.3	73
Solució: Exercici 4.5.4	73
Solució: Exercici 4.6.1	73
Solució: Exercici 4.6.2	74
Solució: Exercici 4.6.3	75
Solució: Exercici 4.6.4	75
Solució: Exercici 4.4.1	75
5 Sistemes d'equacions lineals	77
5.1 Resolució de sistemes	77
<i>Exercici: 5.1.1</i>	77
5.2 Classificació de sistemes	77
<i>Exercici: 5.2.1</i>	77
<i>Exercici: 5.2.2</i>	77
5.3 Problemes	78
<i>Exercici: 5.3.1 PAU Juny 2024</i>	78
<i>Exercici: 5.3.2 PAU Juny 2023 número 2</i>	78
<i>Exercici: 5.3.3 PAU setembre 2023</i>	79
<i>Exercici: 5.3.4 PAU Juny 2021, número 3</i>	79
<i>Exercici: 5.3.5 PAU Setembre 2021, número 2</i>	80
<i>Exercici: 5.3.6 PAU, Juny 2020</i>	80
<i>Exercici: 5.3.7</i>	80
<i>Exercici: 5.3.8</i>	80

<i>Exercici:</i> 5.3.9	81
<i>Exercici:</i> 5.3.10 PAU Setembre 2024	81
<i>Exercici:</i> 5.3.11 PAU Juny 2024	81
<i>Exercici:</i> 5.3.12	82
<i>Exercici:</i> 5.3.13 PAU Juny 2017	82
6 Probabilitat	83
6.1 Laplace i conjunts (diagrames de Venn)	83
<i>Exercici:</i> 6.1.1 Daus i monedes	83
<i>Exercici:</i> 6.1.2 Diagrama de Venn 1	83
<i>Exercici:</i> 6.1.3 Joc de daus Quim i Carla	83
<i>Exercici:</i> 6.1.4 Escola d'enginyeria	84
<i>Exercici:</i> 6.1.5 Viatges d'en Marc	84
<i>Exercici:</i> 6.1.6 Propietats de successos	84
<i>Exercici:</i> 6.1.7 Suma de dos daus	84
<i>Exercici:</i> 6.1.8 Llançament dau 4 vegades	84
<i>Exercici:</i> 6.1.9 Esports al centre escolar	85
<i>Exercici:</i> 6.1.10 Més cares que creus	85
<i>Exercici:</i> 6.1.11 Sèries espanyoles i nord-americanes	85
<i>Exercici:</i> 6.1.12 Diagrama de Venn 2	85
6.2 Probabilitat condicionada	85
<i>Exercici:</i> 6.2.1 Targetes debit i credit	85
<i>Exercici:</i> 6.2.2 Restaurant d'hamburgueses	86
<i>Exercici:</i> 6.2.3 Planta telèfons mòbils	86
<i>Exercici:</i> 6.2.4 Seguidors equips esportius	86
<i>Exercici:</i> 6.2.5 Cotxe compartit Anna i Lluís	87
<i>Exercici:</i> 6.2.6 Anar a la universitat 1	87
<i>Exercici:</i> 6.2.7 Bols de bales	87
<i>Exercici:</i> 6.2.8 Wallapop i Vibbo	87
<i>Exercici:</i> 6.2.9 Temps a l'estiu	88
<i>Exercici:</i> 6.2.10 Bateria ions liti	88
<i>Exercici:</i> 6.2.11 Planta de circuits	88
<i>Exercici:</i> 6.2.12 Club esportiu i natació	88
<i>Exercici:</i> 6.2.13 Nois, noies i escacs	89
<i>Exercici:</i> 6.2.14 Joves estudien i treballen	89
<i>Exercici:</i> 6.2.15 Independència successos	89
<i>Exercici:</i> 6.2.16 Anar a la universitat 2	89
<i>Exercici:</i> 6.2.17 Jutges i acusats	90

<i>Exercici:</i> 6.2.18 Protectora animals	90
<i>Exercici:</i> 6.2.19 PAU Juny 2024 Pel·lícules	90
<i>Exercici:</i> 6.2.20 PAU Setembre 2024 Centre esportiu	91
<i>Exercici:</i> 6.2.21 Joc de daus Miquel i Carla	91
6.3 Independència de successos	91
<i>Exercici:</i> 6.3.1 Escola d'enginyeria	91
<i>Exercici:</i> 6.3.2	92
<i>Exercici:</i> 6.3.3	92
<i>Exercici:</i> 6.3.4	92
6.4 Solucions	93
Solució: Exercici 6.1.1	93
Solució: Exercici 6.1.2	93
Solució: Exercici 6.1.3	93
Solució: Exercici 6.1.4	93
Solució: Exercici 6.1.5	94
Solució: Exercici 6.1.6	94
Solució: Exercici 6.1.7	95
Solució: Exercici 6.1.8	95
Solució: Exercici 6.1.9	96
Solució: Exercici 6.1.10	96
Solució: Exercici 6.1.11	96
Solució: Exercici 6.1.12	96
Solució: Exercici 6.2.1	96
Solució: Exercici 6.2.2	96
Solució: Exercici 6.2.3	97
Solució: Exercici 6.2.4	97
Solució: Exercici 6.2.5	97
Solució: Exercici 6.2.6	97
Solució: Exercici 6.2.7	97
Solució: Exercici 6.2.8	97
Solució: Exercici 6.2.9	97
Solució: Exercici 6.2.10	97
Solució: Exercici 6.2.11	97
Solució: Exercici 6.2.12	97
Solució: Exercici 6.2.13	97
Solució: Exercici 6.2.14	97
Solució: Exercici 6.2.15	97
Solució: Exercici 6.2.16	97

Solució: Exercici 6.2.17	97
Solució: Exercici 6.2.18	98
Solució: Exercici 6.2.19	98
Solució: Exercici 6.2.20	98
Solució: Exercici 6.2.21	98
Solució: Exercici 6.3.1	98
7 Distribucions de probabilitat	99
7.1 Indicadors estadístics (repàs)	99
Exercici: 7.1.1	99
Exercici: 7.1.2	100
7.2 Variable aleatòria i distribucions	100
Exercici: 7.2.1	100
Exercici: 7.2.2	100
7.3 Distribució normal	100
Exercici: 7.3.1	100
Solució:	101
Exercici: 7.3.2	101
Solució:	101
Exercici: 7.3.3	101
Exercici: 7.3.4	102
7.4 Teorema central del límit i intervals de confiança	102
Exercici: 7.4.1	102
Exercici: 7.4.2	102
Exercici: 7.4.3	103
Exercici: 7.4.4	103
Exercici: 7.4.5	103
Exercici: 7.4.6	103
Solució:	104
Exercici: 7.4.7	104
Solució:	104
Exercici: 7.4.8	105
Solució:	105
Exercici: 7.4.9	105
Exercici: 7.4.10 PAU Setembre 2024	105
Exercici: 7.4.11	106
7.5 Distribució binomial	106
Exercici: 7.5.1	106

Solució:	106
<i>Exercici: 7.5.2</i>	106
Solució:	107
<i>Exercici: 7.5.3 Exemples PAU</i>	107
Solució:	107
7.6 Intervals de confiança per una proporció	108
<i>Exercici: 7.6.1 PAU Juny 2024</i>	108
<i>Exercici: 7.6.2</i>	108
Solució:	108
<i>Exercici: 7.6.3</i>	108
Solució:	108

1 Funcions

Exercici 1.1.

Per les següents funcions, trobeu:

1. El domini
2. Els punts de tall amb els eixos
3. Els límits al $+\infty$ i $-\infty$
4. Els límits laterals als punts que no siguin del domini

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}$

b) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

Exercici 1.2.

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x+1}{x^2+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne el domini
- b) Estudieu-ne la continuïtat als punts que no són del domini
- c) Trobeu els límits al $+\infty$ i al $-\infty$.

Exercici 1.3.

Feu els següents límits laterals.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, on $\begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x+2}{x+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, on $\begin{cases} \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ (x+2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Exercici 1.4.

De les següents funcions, trobeu-ne el domini, feu els límits laterals als valors que no siguin del domini i digueu de quin tipus de discontinuïtat es tracta.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$

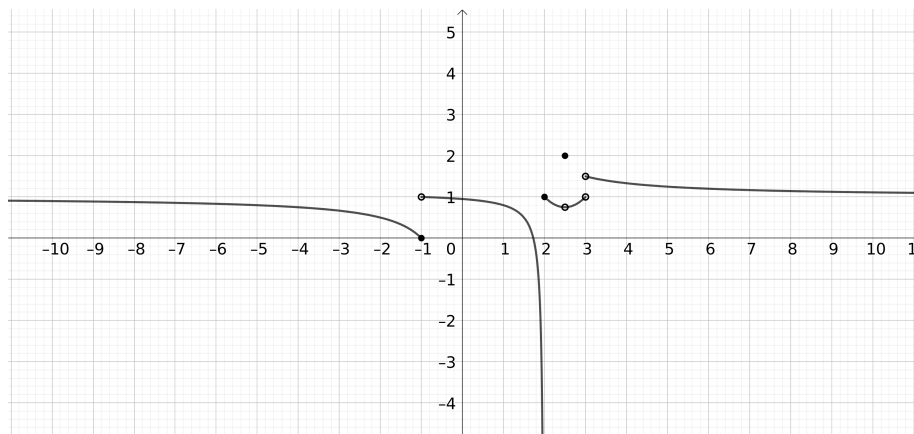
b) $f(x) = \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 7x + 10}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$

Exercici 1.5.

Exercici 1.6.

Considereu la funció de la gràfica



Trobeu

a) el domini

b) els valors de $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(2.5)$ i $f(3)$.

c) els límits laterals a $x = -1$, $x = 2$, $x = 2.5$ i a $x = 3$.

d) el valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercici 1.7.

De les següents funcions trobeu-ne el domini, els punts de tall amb eixos, estudieu-ne la continuïtat i trobeu les asímptotes verticals (fent els límits laterals) i horitzontals. Finalment, feu-ne un petit esbós.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$

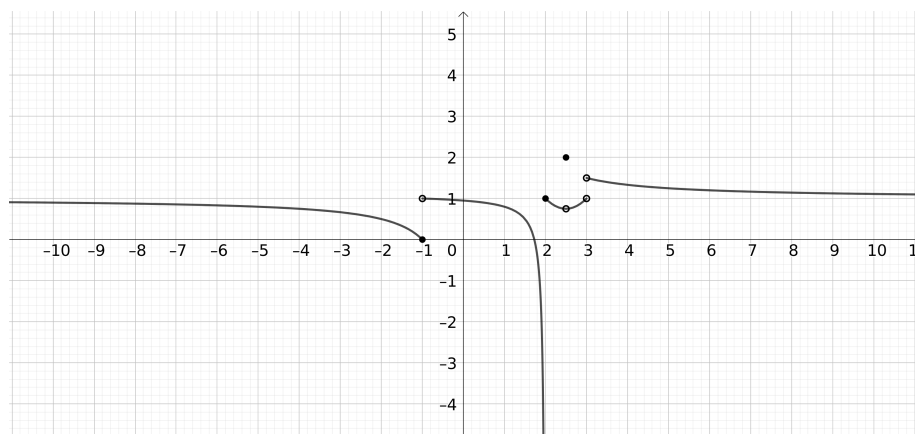
b) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+3}$

c) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Exercici 1.8.

Considereu la funció de la gràfica



Discutiue-ne la continuïtat tot trobant els límits laterals allà on calgui. Trobeu també les asímptotes que pugui tenir, tant horitzontals com verticals.

Exercici 1.9.

Trobeu el valor dels paràmetres a i b per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x+b}{x^2+2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sigui contínua.

Exercici 1.10: PAU juny 2016.

Exercici 30 del recull de funcions.

Exercici 1.11: PAU setembre 2016.

La fotografia matemàtica següent sembla indicar que les branques de les ulleres formen una paràbola. Tanmateix, no totes les corbes en forma de “U” són paràboles. Hem marcat sobre uns eixos de coordenades alguns dels punts: $(0,2.5)$, $(1,0)$, $(3,-1)$ i $(5,0)$. Justifiqueu si la gràfica correspon a una paràbola o no.

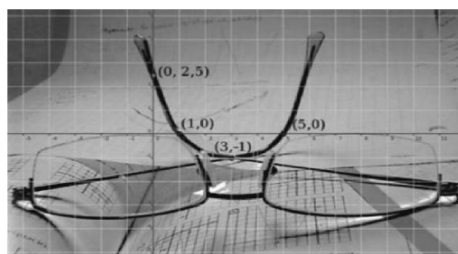


Figura 1: Font: www.fotografiamatematica.cat

Exercici 1.12: PAU Setembre 2016 a).

Considereu la funció

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

- a) *Determineu els punts en què la funció f talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals on la funció f és positiva.*

Exercici 1.13.

La temperatura exterior a un hivernacle es pot modelar segons la funció definida a trossos

$$T(t) = \begin{cases} 0.26t^2 - 2.91t + 4.15 & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ -0.24t^2 + 8.35t - 59.43 & \text{si } 12 \leq t < 24 \end{cases}$$

- a) *Feu una gràfica de la funció*
- b) *Per tal de regular la temperatura dins l'hivernacle, es decideix instal·lar-hi una boma de calor. Es desitja programar la bomba de calor de manera que aquesta funcioni en mode hivern quan la temperatura exterior sigui inferior a 3 graus centígrads i en mode estiu quan aquesta sigui superior a 26 graus. Digueu en*

quin moment del dia caldria programar la bomba de calor perquè estigui en mode hivern, apagada i en mode estiu.

Exercici 1.14.

Escriviu les següents funcions com a composició de dues funcions. Per a cada exercici trobeu dues funcions f i g .

a) $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$

d) $(g \circ f)(x) = e^{2x-3}$

b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

e) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 3} + 4$

c) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $(f \circ g)(x) = \ln(\sqrt{x+2}) - \sqrt{x+2}$

Exercici 1.15.

Per tal de constituir una determinada empresa els socis capitalistes abonen una inversió inicial de 10 mil euros en total, amb el que, en el moment de constituir-se, podríem dir que l'empresa presenta 10 mil euros de pèrdues. Al cap d'un mes l'empresa ha guanyat 19 mil euros, amb el que ha obtingut uns beneficis de 9 mil euros. En aquest moment han passat dos mesos des de la constitució de l'empresa, i s'han obtingut uns beneficis totals de 26 mil euros des del moment de la seva constitució. Considereu que la funció $B(t)$, que dona els beneficis de l'empresa en milers d'euros on t són els mesos transcorreguts des del moment de la seva constitució, és una paràbola.

a) Trobeu la funció $B(t)$

b) Digueu quins seran els beneficis totals al cap de 5 mesos d'haver-se constituït l'empresa

c) Digueu en quin moment els beneficis de l'empresa seran màxims, i quins seran aquests beneficis

d) Digueu si segons aquesta funció, en algun moment l'empresa tornarà a tenir pèrdues, i en quin moment seria.

Exercici 1.16: PAU 2020, S4 número 2.

Un fabricant va tenir un producte a la venda durant deu anys. Durant aquest temps, el preu del producte P , en euros, va estar relacionat amb el temps que feia que estava a la venda t , expressat en anys, seguint la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & \text{si } 2 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Indiqueu els intervals de creixement i decreixement del preu del producte durant aquests deu anys.
- b) Trobeu el preu màxim que va assolir el producte durant el temps que va estar a la venda.

Exercici 1.17: PAU 2020, S4 número 4, apartat a).

Considerem les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = -x^2 + c$. Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que les gràfiques de les funcions f i g es tallin als punts $(-1, 3)$ i $(3, -5)$.

Exercici 1.18: PAU 2021, S1 número 4.

La funció

$$C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$$

en què t són els anys transcorregut i $C(t)$ la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi.

- a) Calculeu quants clients tenia l'empresa en el moment inicial i quants tenia al cap d'un any.
- b) Calculeu quant temps haurà de passar perquè l'empresa aconseguixi tenir de nou el mateix nombre de clients que en el moment d'iniciar l'estudi.
- c) Segons aquesta funció, quin seria el nombre de clients a llarg termini?

Exercici 1.19: PAU 2021, S1 número 5.

Una empresa posa a la venda un producte que distribueix en caixes. El benefici B obtingut per l'empresa, expressat en milers d'euros, és donat per l'expressió $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, en què $x > 0$ és el preu de venda de cada caixa, expressat en euros.

- a) Quin benefici obtindrà si el preu de venda de cada caixa és de 6 euros? Entre quins valors cal fixar el preu de venda d'una caixa per a obtenir beneficis?
- b) A quin preu ha de vendre cada caixa perquè el benefici sigui el més gran possible? Quin és aquest benefici màxim?

Exercici 1.20: PAU 2022, S2 número 2.

Experimentalment s'ha comprovat que la producció d'un tipus de fruita determinat que es cultiva en hivernacles depèn de la temperatura, segons la funció $f(x) = -x^2 + 46x - 360$ en què x representa la temperatura de l'hivernacle en graus Celsius i $f(x)$ és la producció anual en centenars de quilograms per hectàrea. El preu de venda de la fruita es manté estable a 1,2 euros per cada quilogram.

- a) *Determineu l'interval de temperatures entre les quals cal mantenir l'hivernacle perquè hi hagi producció de fruita. Calculeu els ingressos anuals per hectàrea si es manté l'hivernacle a 20°C de temperatura.*
- b) *A quina temperatura s'obté la producció màxima de fruita? Quins ingressos per hectàrea s'obtenen en aquest cas?*

Exercici 1.21.

Una petita empresa paga una quota fixa mensual a la seva companyia elèctrica de 1200 euros. A més de la quota fixa, els primers 250 kWh consumits els paga a 5 euros cada un; els següents, fins als 900 kWh, a 3 euros cadascun; i la resta a 2 euros cadascun.

- a) *A quant puja el rebut d'un mes de l'empresa si aquest mes va consumir 400 kWh?*
- b) *Obtingueu la funció que doni l'import del rebut mensual de l'empresa si consumeix x kWh.*
- c) *Una altra petita empresa, amb la mateixa quota fixa, paga tots els kWh a 3 euros. Pot passar que en un mes les dues empreses consumeixin el mateix i a més els rebuts coincideixin? En cas afirmatiu indica quin serà aquest mes el consum i l'import del rebut de les dues empreses.*

Exercici 1.22.

Quan es dissenyen els esglaons d'una escala hi ha diversos paràmetres que cal tenir en compte, dos dels quals són la petja (la part horitzontal de l'esglaó, on es posa el peu) i la contrapetja (la part vertical del graó, és a dir, l'alçària). L'arquitecte francès François Blondel va establir a finals del segle XVII que la relació ideal entre aquestes dues magnituds era que la suma de dues contrapetges més una petja fos igual a 64 cm. Anomenem y la longitud de la contrapetja i x la longitud de la petja.

- a) *Trobeu la funció que permet calcular la longitud ideal de la contrapetja en funció de la longitud de la petja. Quina seria la longitud ideal de la contrapetja si la petja és de 28 cm?*
- b) *La normativa actual estableix que en el disseny d'escales d'ús públic cal que la petja sigui com a mínim de 28 cm i que la contrapetja estigui compresa entre 13 i 18,5 cm. A més a més, la suma de dues contrapetges més una petja ha d'estar entre 54 i 70 cm. Escriviu aquestes tres condicions en funció de x i de y . Si volem construir una escala amb esglaons de 40 cm de petja, calculeu entre quins valors ha d'estar compresa la contrapetja per a complir amb la normativa actual.*

Exercici 1.23.

Una botiga ven un tipus determinat d'ampolla d'aigua a 70 cèntims. Aquesta setmana fa una oferta de 4×3 , és a dir, que si comprem quatre ampolles d'aigua només en paguem tres. La botiga també ha anunciat que la propera setmana l'oferta de 4×3 ja no serà vigent, però, en canvi, aplicarà un 20% de descompte sobre el total de la compra que facin els clients.

- Calculeu el preu que hurem de pagar per 4 ampolles d'aigua tant aquesta setmana com la propera. En lloc d'un 20%, quin descompte caldria aplicar per a igualar l'oferta de 4×3 ?
- Calculeu, en general, quin descompte caldria aplicar per a igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; és a dir, que consisteix a vendre m ampolles d'aigua pel preu de $m - 1$ ampolles, en què m és un enter més gran que 1.

Exercici 1.24: Examen final 24-25.

Un grup de recerca ha desenvolupat un fertilitzant que és molt respectuós amb el medi ambient. Una empresa comercialitzarà aquest fertilitzant posant-lo a la venda. Les previsions són que els ingressos produïts, $I(x)$, en milers d'euros, vinguin donats per la funció

$$I(x) = x \cdot \frac{170 - 0,85x}{5},$$

en la qual x representa la demanda del producte expressat en milers de litres. D'altra banda, els costos de producció que assumirà l'empresa, en milers d'euros, s'expressen en funció de la demanda mitjançant la funció

$$C(x) = 10 + 2x + x^2.$$

- Troba una expressió per a la funció benefici en termes de la demanda x i troba la quantitat de producte que s'hauria de vendre per maximitzar-lo. Obtingues també el benefici màxim.
- Determina entre quins valors s'hauria de trobar la quantitat demandada de fertilitzant perquè el cost mitjà, $\frac{C(x)}{x}$, no superi els 10.000 €.
- Una nova llei obligarà els agricultors a adquirir una quantitat mínima d'aquest producte, cosa que implicarà una demanda mínima de $x = 15$ milers de litres. Amb aquesta nova llei, quina seria la demanda que maximitzaria els beneficis?

Exercici 1.25: Recuperació/millora 24-25.

Un hotel cobra 45 € per habitació i nit. Per aquest preu, té ocupades 165 habitacions

cada nit. S'ha fet un estudi a partir del qual s'ha deduït que, per cada euro que s'apugi el preu de l'habitació, se n'ocuparà una menys cada nit. Sabent que el cost de neteja diari de cada habitació és de 14 €, responseu:

- a) Si x és la quantitat que s'apuja el preu de l'habitació per sobre dels 45 € inicials, determineu la funció que dona els beneficis diaris de l'hotel segons el valor de x .
- b) Trobeu quin hauria de ser el preu de l'habitació per tal d'obtenir uns beneficis màxims. Justifiqueu que es tracta d'un màxim i digueu quins serien aquests beneficis màxims i quina ocupació tindria l'hotel.
- c) Trobeu entre quins preus hauria de fixar l'hotel el preu de l'habitació per tal d'obtenir beneficis.
- d) Supposeu que l'hotel requereix una ocupació mínima de 100 habitacions per tal d'obrir. Amb aquesta restricció, quin seria ara el preu que maximitza els beneficis?

Exercici 1.26: Convocatòria extraordinària juny 2025.

Una empresa ven entrades per a un espectacle a 20 €. Amb aquest preu, es venen 200 entrades. S'ha observat que per cada 1 € que s'incrementa el preu, es venen 5 entrades menys. Si el cost fix de cada espectacle és de 800 € i el cost variable per entrada és de 4 €, responseu:

- a) Si x representa la quantitat d'euros que s'incrementa el preu, escriviu una expressió per al benefici diari en funció de x .
- b) Quin preu hauria de tenir l'entrada per maximitzar els beneficis? Justifiqueu que es tracta d'un màxim i indiqueu el benefici i el nombre d'entrades venudes.
- c) Determineu els valors del preu per als quals l'empresa obté beneficis positius.
- d) Si l'empresa només obre si es venen almenys 120 entrades, quin preu maximitza els beneficis amb aquesta condició?

Exercici 1.27: PAU Juny 2025.

Un inversor té uns diners invertits en un fons d'inversió molt volàtil. El valor de la seva inversió en euros durant un dia determinat és donat per la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250$$

en què $x \in [0, 24]$ representa el temps en hores.

- a) Calculeu el valor inicial de la inversió en començar el dia i determineu quin benefici o pèrdua haurà tingut al cap de 24 hores.
- b) Hi ha algun moment del dia en què el valor de la inversió és negatiu? Quin és el valor mínim que assoleix?

Exercici 1.28.

Discutiu la continuïtat de les següents funcions:

a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 10 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+1}$

Exercici 1.29.

Trobeu el valor del paràmetre a per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x+a}{x^2+1} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

sigui contínua.

Exercici 1.30.

Calculeu els següents límits

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+2x^2-x}{x^2-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+2x+1}{2x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}$

Exercici 1.31: PAU 2025.

Un estudi estableix que el nombre de microorganismes vius en una mostra de laboratori, mesurat en desenes, és donat per la funció,

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k$$

en què x representa les hores transcorregudes des de l'inici de l'estudi.

- a) Determineu el valor de k si sabem que a l'inici de l'estudi hi havia 50 microorganismes.

- b) Digueu en quins moments hi ha més de 60 microorganismes.*
- c) En quin valor s'estabilitzarà el nombre de microorganismes a llarg termini?*

2 Derivades

2.1 Taxa de variació mitjana

Exercici 2.1.1.

La funció $f(x) = x^3 + 2$ sempre és sempre creixent. Calcula'n la variació mitjana a cadascun dels intervals següents: $[-3, -1]$, $[0, 2]$ i $[5, 7]$. En quin dels tres intervals té un creixement més ràpid?

Exercici 2.1.2.

Considera la funció $f(x) = 3x + 1$. Demuestra que la seva variació mitjana sempre és la mateixa, independent de l'interval $[a, b]$.

Exercici 2.1.3.

Quant val la variació mitjana de la funció $f(x) = 5$ en qualsevol interval $[a, b]$?

Exercici 2.1.4.

Una empresa tecnològica està analitzant el seu **benefici mensual** (en milers d'euros) durant el primer semestre de l'any. El benefici ve donat per la funció següent:

$$B(t) = at^3 - 12t^2 + 24t + k$$

on t és el temps en **mesos** des de l'inici de l'any, i k i a són paràmetres constants.

Dades conegudes:

- Al mes 1, el benefici era de 30 milers d'euros, és a dir: $B(1) = 30$.
- La **variació mitjana del benefici** entre el mes 1 i el mes 4 és de 6 milers d'euros per mes.

Apartats:

1. Calcula els valors dels paràmetres a i k .
2. Amb aquests valors, calculeu el benefici esperat al mes 6 i interpreteu el resultat.
3. Amb els valors trobats, calculeu $TVN_{[1.9, 2.1]}$ per aproximar $f'(2)$. Interpreteu el resultat.

2.2 Derivades

Exercici 2.2.5.

Mitjançant la definició de derivada, calculeu

a) $f'(0)$, $f'(-1)$ i $f'(10)$ si $f(x) = 3x + 2$.

b) $f'(1)$ si $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$

c) $f'(0)$ si $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Solució

Exercici 2.2.6.

Mitjançant la definició de derivada proveu que, si $f(x) = 4x^3$, aleshores

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 12x^2$$

Solució

Exercici 2.2.7.

Calculeu les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 4x - 2) \cdot \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^3 - 2x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{2x^3 \cdot \ln(x)}{x^2 - 3}$

Solució

Exercici 2.2.8.

En quin valor de x la derivada de la funció $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$ es fa igual a 2?

Solució

Exercici 2.2.9.

Trobeu el pendent de la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 - 3x + 4$ en $x = 0$.

Solució

Exercici 2.2.10.

Calculeu el valor de k en la funció

$$f(x) = \frac{x^2 + k}{x^2 - k}$$

per tal que es compleixi $f'(2) = -24$.

Solució

Exercici 2.2.11.

Si $f(x) = x^n \cdot e^x$, trobeu el valor de n per tal que $f'(3) = 0$.

Solució

Exercici 2.2.12.

Calcula que en quins valors de x la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ té inclinació 45° . (Nota: una recta amb inclinació 45° té pendent 1).

Solució

Exercici 2.2.13.

En quins punts de la corba $y = x^3 - 3x^2$ la recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses? En quins punts la tangent forma un angle de 45° amb l'eix d'abscisses?

Solució

Exercici 2.2.14.

Deriveu les següents funcions

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

b) $f(x) = \ln(x^{10} + 2x^2)$

c) $f(x) = e^{2x^3+2x+1} \cdot (x^2 + 1)$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{x^3 - 1}$

f) $f(x) = \ln(2x + 3) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

2.3 Monotonia i extrems relatius

Exercici 2.3.15.

Troba els màxims i mínims relatius de la funció

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Solució

Exercici 2.3.16.

Troba els màxims i mínims relatius de la funció

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Solució

Exercici 2.3.17.

Troba els màxims i mínims relatius de la funció

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 1.$$

Solució

Exercici 2.3.18.

Troba els màxims i mínims relatius de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Exercici 2.3.19: PAU 2023, setembre.

El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular segons la funció

$$f(t) = 10 \left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 \right)$$

on t és el temps en dies i va des de $t = 1$ (dilluns) fins a $t = 8$ (dilluns de la setmana següent).

- Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100kg de menjar.
- Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?

Exercici 2.3.20: PAU 2021, S1 número 4.

La funció

$$C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$$

en què t són els anys transcorregut i $C(t)$ la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi. l'instant en què l'empresa deixa de perdre clients i calculeu quants clients té en aquell instant.

Trobeu l'instant en què el nombre de clients va ser mínim. Justifiqueu que es tracta d'un mínim i digueu quants clients hi havia en aquell moment.

Exercici 2.3.21: PAU 2023, juny.

El nombre de noves persones infectades per una malaltia, en milers, és donat per la funció següent:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} \quad t \geq 0$$

en què t representa el temps transcorregut, en setmanes, des que es va iniciar la infecció.

- a) Quants malalts s'infectaran a la setmana 1 i quants la setmana 2? Podem pensar que, a llarg termini, aquesta infecció desapareixerà?
- b) En quin instant es produeix el nombre màxim d'infectats? Quin és aquest nombre?

Exercici 2.3.22.

La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt $(-2, 6)$ i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix de les abscisses.

- a) Calculeu el valor de a
- b) Calculeu el valor de b

Exercici 2.3.23.

Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6}$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

- a) Justifiqueu que $f(x)$ és estrictament decreixent quan $x \geq 0$
- b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pas a llarg termini? Argumenteu si aquest valor s'assolirà en algun moment.

Exercici 2.3.24.

Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu i classifiqueu els extrems relatius.

Exercici 2.3.25.

Sabem que la derivada d'una funció, f' , d'una funció f , polinòmica de tercer grau, talla l'eix d'abscisses en els punts $x = -1$ i $x = 2$.

- a) Justifiqueu si és possible que f' talli també l'eix d'abscisses en un altre punt diferent.
- b) Si ens diuen que $f'(1) = 2$, indiqueu i classifiqueu els màxim i mínims de f .

Exercici 2.3.26: PAU Juny 2021.

Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció

$$f(x) = \frac{-0.2x^2 + 5x - 20}{x},$$

en què x representa el nombre de tones de confeti venudes

- a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable x perquè la fàbrica no tingui pèrdues.
- b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici

Exercici 2.3.27.

Considereu la paràbola:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- a) Demostreu que té el vèrtex en $x = -\frac{b}{2a}$
- b) Demostreu que, si $a > 0$ es tracta d'un mínim, mentre que, si $a < 0$, serà un màxim.

Exercici 2.3.28: PAU Juny 2024, número 1.

Dues companyies de taxi, A i B, ofereixen tarifes diferents. La companyia A ofereix un cost fix de 20 € més 0,4€ per kilòmetre recorregut, mentre que el preu de la companyia B segueix la funció $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$, en què x representa el nombre de kilòmetres recorreguts.

- a) Quina de les dues companyies ofereix la tarifa més econòmica si fem un recorregut de 10 km? I si en fem un de 80 km? Calculeu la diferència de preu en cada cas. Hi ha cap cost fix en la tarifa de la companyia B només pel sol fet de pujar al taxi?
- b) Determineu per a quin nombre de kilòmetres recorreguts les dues tarifes coincideixen. Si considerem només els trajectes inferiors a aquesta quantitat, per a quin nombre de kilòmetres la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és màxima? Quina és aquesta diferència màxima de preu?

Solució

Exercici 2.3.29: PAU Juny 2025.

Un inversor té uns diners invertits en un fons d'inversió molt volàtil. El valor de la seva inversió en euros durant un dia determinat és donat per la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250$$

en què $x \in [0, 24]$ representa el temps en hores.

- Calculeu el valor inicial de la inversió en començar el dia i determineu quin benefici o pèrdua haurà tingut al cap de 24 hores. Trobeu també a quina hora del dia el valor de la inversió ha estat màxim i quin era aquest valor màxim.
- Hi ha algun moment del dia en què el valor de la inversió és negatiu? Quin és el valor mínim que assoleix?

Solució

Exercici 2.3.30: PAU 2025.

Un estudi estableix que el nombre de microorganismes vius en una mostra de laboratori, mesurat en desenes, és donat per la funció,

$$f(x) = \frac{15x}{9 + x^2} + k$$

en què x representa les hores transcorregudes des de l'inici de l'estudi.

- Determineu el valor de k si sabem que a l'inici de l'estudi hi havia 50 microorganismes. Quin és el valor màxim de microorganismes al qual s'arribarà? En quin instant s'assolirà el màxim?
- En quin valor s'estabilitzarà el nombre de microorganismes a llarg termini?

Solució

Exercici 2.3.31: PAU 2021.

Considereu la funció real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

- Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$
- Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a = 12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los.

Exercici 2.3.32.

Trobeu els intervals de monotonia i els extrems relatius de les següents funcions. Classifiqueu els extrems mitjançant el test de la 2a derivada:

a) $f(x) = 5x^2 - 8x + 4$

b) $f(x) = x^3 - 1$

c) $f(x) = x^4 + 4$

d) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

2.4 Solucions

Solució Exercici 2.2.5.

Mitjançant la definició de derivada:

a) $f(x) = 3x + 2$. Per la definició,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h) + 2 - (3a+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3.$$

Per tant $f'(0) = 3$, $f'(-1) = 3$, $f'(10) = 3$.

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$. Calculem $f'(1)$:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 3(1+h) + 2 - (2 - 3 + 2)}{h}.$$

Expandint el numerador:

$$2(1+2h+h^2) - 3 - 3h + 2 - (1) = 2 + 4h + 2h^2 - 3 - 3h + 2 - 1 = (4h + 2h^2 - 3h) + 0 = h + 2h^2.$$

Així

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2h) = 1.$$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Calculem $f'(0)$ mitjançant la definició:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0+h}{0+h+1} - \frac{0}{0+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1+h} = \frac{1}{1} = 1.$$

Solució Exercici 2.2.6.

Demostrem per la definició que si $f(x) = 4x^3$ aleshores $f'(x) = 12x^2$.

Per la definició de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h} = 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h}.$$

Simplificant el numerador dins del límit:

$$4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 4 \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2).$$

Prenent el límit quan $h \rightarrow 0$ s'obté

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2,$$

com volíem demostrar.

Solució Exercici 2.2.7.

Càlcul de derivades.

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$. Aplicant la regla del producte,

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1).$$

b) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 4x - 2)\sqrt{x} = (x^3 - 2x^2 + 4x - 2)x^{1/2}$. Aplicant la regla del producte:

$$f'(x) = (3x^2 - 4x + 4)x^{1/2} + (x^3 - 2x^2 + 4x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Si es vol, això també es pot escriure com

$$f'(x) = \sqrt{x}(3x^2 - 4x + 4) + \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 2}{2\sqrt{x}}.$$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^3 - 2x^2 + 1}$. Aplicant la regla del quocient, si $u = x^2 - 1$ i $v = 3x^3 - 2x^2 + 1$,

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(3x^3 - 2x^2 + 1) - (x^2 - 1)(9x^2 - 4x)}{(3x^3 - 2x^2 + 1)^2}.$$

Simplificant el numerador:

$$2x(3x^3 - 2x^2 + 1) - (x^2 - 1)(9x^2 - 4x) = -3x^4 + 9x^2 - 2x,$$

per tant

$$f'(x) = \frac{-3x^4 + 9x^2 - 2x}{(3x^3 - 2x^2 + 1)^2}.$$

d) $f(x) = \frac{2x^3 \ln(x)}{x^2 - 3}$. Amb $u = 2x^3 \ln x$ i $v = x^2 - 3$,

$$u' = 6x^2 \ln x + 2x^2 = 2x^2(3 \ln x + 1), \quad v' = 2x,$$

i per la regla del quocient

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(6x^2 \ln x + 2x^2)(x^2 - 3) - (2x^3 \ln x)(2x)}{(x^2 - 3)^2}.$$

Una forma factoritzada és

$$f'(x) = \frac{2x^2((3 \ln x + 1)(x^2 - 3) - 2x^2 \ln x)}{(x^2 - 3)^2}.$$

(Es pot desenvolupar i simplificar més si es desitja.)

Solució Exercici 2.2.8.

(En quin valor de x la derivada de $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$ és 2?)

Calculem la derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^2 - 2x + 5) = 4x - 2.$$

Volem $f'(x) = 2$, així que

$$4x - 2 = 2 \implies 4x = 4 \implies x = 1.$$

Per tant la derivada val 2 en $x = 1$.

Solució Exercici 2.2.9.

Derivem:

$$f'(x) = 2x - 3.$$

Per $x = 0$ obtenim

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3.$$

Així, el pendent de la tangent en $x = 0$ és -3 .

Solució Exercici 2.2.10.

(Trobar k tal que per $f(x) = \frac{x^2 + k}{x^2 - k}$ es compleixi $f'(2) = -24$.)

Posant $u(x) = x^2 + k$ i $v(x) = x^2 - k$ tenim $u' = 2x$ i $v' = 2x$. Per la regla del quocient,

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(x^2 - k) - (x^2 + k)2x}{(x^2 - k)^2} = \frac{2x((x^2 - k) - (x^2 + k))}{(x^2 - k)^2}.$$

Simplificant el factor:

$$f'(x) = \frac{2x(-2k)}{(x^2 - k)^2} = \frac{-4kx}{(x^2 - k)^2}.$$

Avaluant en $x = 2$:

$$f'(2) = \frac{-4k \cdot 2}{(4 - k)^2} = \frac{-8k}{(4 - k)^2}.$$

Exigim $f'(2) = -24$, per tant

$$\frac{-8k}{(4 - k)^2} = -24.$$

Dividint per -8 s'obté

$$\frac{k}{(4 - k)^2} = 3.$$

Resolem l'equació quadràtica:

$$k = 3(4 - k)^2 = 3(16 - 8k + k^2) = 48 - 24k + 3k^2,$$

de manera que

$$0 = 3k^2 - 25k + 48.$$

Calculem el discriminant: $\Delta = 25^2 - 4 \cdot 3 \cdot 48 = 625 - 576 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$. Així

$$k = \frac{25 \pm 7}{6}.$$

Per tant les solucions són

$$k = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \quad \text{o} \quad k = \frac{18}{6} = 3.$$

(Comprovació ràpida: per ambdós valors $4 - k \neq 0$, de manera que l'expressió està ben definida.)

Solució Exercici 2.2.11.

(Si $f(x) = x^n e^x$, trobeu n tal que $f'(3) = 0$.)

Derivem usant la regla del producte:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n)e^x + x^n \frac{d}{dx}(e^x) = nx^{n-1}e^x + x^n e^x = x^{n-1}e^x(n+x).$$

Avaluant en $x = 3$:

$$f'(3) = 3^{n-1}e^3(n+3).$$

Com que $3^{n-1} > 0$ i $e^3 > 0$ per a qualsevol $n \in \mathbb{R}$, l'expressió s'annul·la si i només si $n+3 = 0$. Per tant

$$n = -3.$$

Solució Exercici 2.2.12.

(Trobar x tal que la tangent a $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ té pendent 1.)

Derivem (fent servir la regla del quocient o producte):

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad f'(x) = \frac{(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Volem $f'(x) = 1$, així que

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1 \implies 1+x^2 = (1-x^2)^2.$$

Desenvolupant i simplificant:

$$1+x^2 = 1-2x^2+x^4 \implies 0 = x^4-3x^2 = x^2(x^2-3).$$

Així les solucions són $x = 0$ i $x^2 = 3$, és a dir $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. (Comprovem que $1-x^2 \neq 0$ per a aquestes solucions: $\pm\sqrt{3} \neq \pm 1$, per tant són vàlides.)

Solució Exercici 2.2.13.

(Punts on la tangent a $y = x^3 - 3x^2$ és paral·lela a l'eix d'abscisses i on forma 45° .)

Derivem:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

(a) *Tangent paral·lela a l'eix d'abscisses: això és $y' = 0$. Tenim*

$$3x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 2.$$

Els punts corresponents a la corba són

$$x = 0 \implies y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0, \quad \text{punt } (0, 0),$$

$$x = 2 \implies y = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4, \quad \text{punt } (2, -4).$$

(b) *Tangent amb angle 45° (pendent 1): posem $y' = 1$:*

$$3x^2 - 6x = 1 \implies 3x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Resolent la quadràtica:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Per obtenir els punts, calculem $y = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$. Per $x_1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ i

$x_2 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ obtenim, després de simplificar,

$$y_1 = -\frac{10\sqrt{3} + 18}{9}, \quad y_2 = \frac{10\sqrt{3} - 18}{9}.$$

Per tant els punts on la tangent té pendent 1 són

$$\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{10\sqrt{3} + 18}{9}\right) \quad \text{i} \quad \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{10\sqrt{3} - 18}{9}\right).$$

Solució Exercici 2.3.15.

Derivem:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Punts crítics: $x = 0, 2$.

Fem un estudi del signe de $f'(x)$:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+

Interpretació: - $f'(x)$ passa de + a - a $x = 0 \implies$ màxim relatiu. - $f'(x)$ passa de - a + a $x = 2 \implies$ mínim relatiu.

$f(0) = 2, f(2) = -2. \Rightarrow$ Màxim relatiu en $(0, 2)$ i mínim relatiu en $(2, -2)$.

Solució Exercici 2.3.16.

Derivem:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Punts crítics: $x = \pm 1$.

Estudi del signe de $f'(x)$:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-

Interpretació: - $f'(x)$ passa de - a + a $x = -1 \Rightarrow$ mínim relatiu. - $f'(x)$ passa de + a - a $x = 1 \Rightarrow$ màxim relatiu.

$f(-1) = -1/2, f(1) = 1/2. \Rightarrow$ Màxim relatiu en $(1, 1/2)$ i mínim relatiu en $(-1, -1/2)$.

Solució Exercici 2.3.17.

Derivem:

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$

Punts crítics: $x = 0$.

Estudi del signe de $f'(x)$:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+

Interpretació: - $f'(x)$ passa de - a + a $x = 0 \Rightarrow$ mínim relatiu.

$f(0) = -1 \Rightarrow$ Mínim relatiu en $(0, -1)$. No hi ha màxim relatiu.

Solució Exercici 2.3.28.

1. Distingim entre les dues tarifes:

- Si fem servir la tarifa A pagarem $20 + 10 \cdot 0.4 = 24\text{€}$
- En canvi, si fem servir la tarifa B pagarem $g(10) = 21\text{€}$

Per tant, la tarifa B surt més econòmica per fer un recorregut de 10km.

Si el recorregut és de 80km aleshores:

- Tarifa A: $20 + 0.4 \cdot 80 = 52\text{€}$
- Tarifa B: $g(80) = 82\text{€}$

En aquest cas, la tarifa A surt més econòmica.

Per veure si hi ha algun cost fix a la tarifa B només cal mirar què pagaríem si no féssim cap quilòmetre: $f(0) = 10$. Per tant, la tarifa B sí que té un cost fix, menor que el de la tarifa A.

2. La funció que ens dóna el cost a la tarifa A segons el nombre de km recorreguts és $f(x) = 20 + 0.4x$. Per veure quan coincideixen les dues tarifes només cal igualar les dues funcions:

$$f(x) = g(x) \implies 20 + 0.4x = 0.01x^2 + 0.1x + 10$$

Les solucions d'aquest equació són $x = -20$ i $x = 50$. La primera solució no té sentit. Per tant, les dues tarifes coincidiran en el cas de recórrer 50km.

Ara considerem recorreguts menors a 50km. Sabem que, en aquest cas, la tarifa B és més econòmica. La diferència entre les dues tarifes serà per tant

$$G(x) = f(x) - g(x) = (20 + 0.4x) - (0.01x^2 + 0.1x + 10) = -0.01x^2 + 0.3x + 10$$

Ara voldríem veure quan aquest diferència és màxim. Derivem la funció $G(x)$:

$$G'(x) = -0.02x + 0.3 = 0 \implies x = 15\text{km}$$

Verifiquem ara que es tracta d'un màxim. Com la funció $G(x)$ és de fet una paràbola convexa, el vertex correspondrà a un màxim. A més, la diferència seria de:

$$G(15) = f(15) - g(15) = 12.25\text{€}$$

Per tant, la diferència màxima entre les dues tarifes quan fem menys de 50 km és de 12.25€, cosa que s'assoleix en fer un trajecte de 15km.

Solució Exercici 2.3.29.

Tenim la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250, \quad x \in [0, 24].$$

a) El valor inicial és:

$$f(0) = 250.$$

El valor a les 24 hores és:

$$f(24) = \frac{24^3}{3} - \frac{35 \cdot 24^2}{2} + 300 \cdot 24 + 250 = 1978.$$

Així doncs, el benefici en 24 hores és:

$$1978 - 250 = 1728 \text{ euros.}$$

Calculem ara el màxim del dia. Derivem:

$$f'(x) = x^2 - 35x + 300.$$

Resolem $f'(x) = 0$:

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 300}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2},$$

és a dir, $x = 15$ i $x = 20$.

Mirem ara el signe de la derivada:

x	$(0, 15)$	$(15, 20)$	$(20, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Per tant, $f(x)$ té un màxim relatiu en $x = 15$ i un mínim relatiu en $x = 20$.

Calculem quant val la inversió en $x = 20$: $f(20) = 1916$. Fixem-nos que aquest valor és inferior el que hem obtingut per $x = 24$, que és o no hem “tallat” la funció. Per tant, la funció té un màxim relatiu en $x = 20$ però l'absolut és en $x = 24$.

b) Per veure si és negatiu en principi hauríem d'igualar la funció a 0 per veure si s'anul·la:

$$f(x) = 0 \implies \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250 = 0$$

Malauradament, aquesta equació no sabem resoldre. Podem però trobar un argument alternatiu: comparant el valor mínim d'aquesta funció en $x = 15$ ($f(15) = 1937,5$) i el valor en $x = 0$ ($f(0) = 250$), veiem que el mínim absolut quan $x \in [0, 24]$ és 250. Per tant, la funció és sempre positiva, ja que el valor més petit també ho és.

Solució Exercici 2.3.30.

La funció que dona el nombre de microorganismes (mesurats en desenes) és:

$$f(x) = \frac{15x}{9 + x^2} + k.$$

a) Inicialment hi ha 50 microorganismes, és a dir, 5 desenes. Així:

$$f(0) = k = 5.$$

Anem a trobar el màxim. Derivant obtenim

$$f'(x) = \frac{135 - 15x^2}{(9 + x^2)^2}.$$

Resolem $f'(x) = 0$:

$$135 - 15x^2 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Veiem ara si es tracta d'un màxim o no:

x	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Efectivament, es tracta d'un màxim, i el seu valor és:

$$f(3) = 7,5,$$

que en microorganismes reals són 75 microorganismes.

Per tant: $k = 5$, el màxim és de 75 microorganismes i s'assoleix a les 3 hores.

b) El límit a llarg termini és:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x}{9 + x^2} + k = 0 + 5 = 5.$$

Això correspon a:

$$5 \cdot 10 = 50 \text{ microorganismes.}$$

3 Optimització

3.1 Oferta/demanda

Exercici 3.1.1: PAU Juny 2024.

Una empresa de lloguer de vehicles disposa d'una flota de 250 vehicles. Si el preu del lloguer diari d'un vehicle és de 50 €, aconsegueix llogar-los tots. S'ha observat que la relació entre el preu del lloguer dels vehicles i el nombre de vehicles que es lloguen és lineal, de manera que per cada euro que s'incrementa el preu diari del lloguer es lloguen dos vehicles menys. Cada vehicle llogat genera un cost diari d'1 € de manteniment.

- a) Digueu quins beneficis o pèrdues té l'empresa si lloga cada cotxe a 50 euros.
- b) Digueu quins beneficis o pèrdues tindria l'empresa si augmenta el preu de lloguer en 3 euros.
- c) Digueu quins beneficis o pèrdues tindria l'empresa si disminueix el preu del lloguer en 4 euros.
- d) Si anomenem x el nombre d'euros que s'incrementa el preu del lloguer, escriviu la funció que determina els beneficis obtinguts en funció de x .
- e) A quin preu cal llogar els vehicles per a aconseguir el màxim de beneficis? Quin és aquest benefici màxim?

Exercici 3.1.2: PAU Setembre 2025.

Un agricultor ha observat que si es planten 25 pereres per hectàrea, el rendiment és de 370 peres per arbre. A més a més, també ha comprovat que la relació entre el nombre de peres per arbre i el nombre de pereres per hectàrea és lineal, de manera que per cada arbre plantat de més per hectàrea, el rendiment disminueix en 10 peres per perera.

- a) Anomenem x el nombre de pereres de més que plantem, addicionals a les 25 inicials. Calculeu la funció de la producció total de peres per hectàrea $P(x)$ en funció de x .
- b) Quin és el nombre total de pereres per hectàrea que cal plantar per a obtenir el màxim de producció per hectàrea? Quina és aquesta producció màxima? A partir de quantes pereres per hectàrea no s'obté cap producció?

Solució

Exercici 3.1.3.

El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 euros. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat la conclusió que si el preu del menú és de 18€ aleshores entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és "lineal", de manera que per cada euro que augmentem el preu del menú entren 4 clients menys a dinar.

- Obtingueu la funció que determina el nombre de clients que vindran a dinar en funció del preu del menú.
- Obtingueu la funció que determina els ingressos en funció del preu del menú.
- Obtingueu la funció que determina els beneficis en funció del preu del menú.
- Trobeu el preu òptim del menú (preu que maximitza els beneficis), justifiqueu que es tracta d'un màxim, així com el benefici que s'obtenen amb aquest preu.

Solució

Exercici 3.1.4.

Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0.80€/Kg. Cada setmana que passa s'han de llençar 400kg de fruita perquè es fa malbé, però el preu de venda de la fruita que queda augmenta un cèntim cada kg (perquè està més madura i dolça).

- Quins serien els ingressos si es vengués la fruita al cap de nou setmanes d'haver-la collit?
- Per tal d'obtenir el màxim d'ingressos, quantes setmanes hauríem d'esperar a vendre la fruita des de que s'ha collit?

Exercici 3.1.5.

Un gimnàs cobra una quota de 42 euros mensuals i té 2.000 usuaris. Un estudi de mercat afirma que per cada euro que s'apuja (o s'abaixa) la quota es perden (o es guanyen) 20 usuaris.

- Expresseu el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota, tenint en compte que la relació entre les dues variables és lineal. Per a quin valor de la quota el gimnàs es quedaria sense usuaris?
- Determineu en quin preu cal fixar la quota per a obtenir un benefici mensual màxim. Quin seria aquest benefici i quants usuaris tindria el gimnàs en aquest cas?

Exercici 3.1.6: PAU juny 2023.

El preu d'un vol entre Barcelona i Islàndia és de 500€. Una companyia aèria té capacitat per a 300 passatgers diaris, però hi ha una determinada època de l'any en què només ven 180 bitllets. Després de fer un estudi de mercat, la companyia s'adona que la relació entre el preu del bitllet i el nombre de passatgers és lineal, de manera que per cada 5€ de descompte en el preu del bitllet aconseguir dos passatgers més.

- Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte, escriviu la funció que dona els ingressos diaris de la companyia per la venda de bitllets en funció de x .
- A quin preu cal vendre cada bitllet per a obtenir el màxim d'ingressos? Quins ingressos s'obtidran amb aquest preu?

Exercici 3.1.7.

Els costos de fabricació $C(x)$ en euros d'unes galetes depenen de la quantitat elaborada, x , en Kg segons la funció:

$$C(x) = 10 + 170x \text{ en } \text{€}$$

El fabricant estima que el preu de venda de cada Kg de galetes ve donat per la funció:

$$P(x) = 200 - \frac{25x^2}{100}, \text{ en } \text{€/Kg}$$

- Expliqueu raonadament si el preu de venda disminueix amb la quantitat de galeta elaborada.
- Suposant que es ven tot el que es fabrica, obtingueu la funció que recull els beneficis en funció de la quantitat de galeta produïda.
- Quina quantitat de galeta cal produir per tal d'obtenir uns beneficis màxim? Justifiqueu que es tracta d'un màxim i digueu quins són aquests beneficis.

Solució

3.2 Geomètrics

Exercici 3.2.1.

Un pastor aprofitant una paret existent de 60 metres que li servirà com a tot o una part d'un dels costats vol construir una tanca rectangular per al seu ramat. Si disposa de 100 metres de tanca i es designa x la mesura de cadascuna de les parets laterals i $100 - 2x$ la mesura de la paret frontal:

- a) *expresseu l'àrea de la tanca en funció de x*
b) *Com s'aconsegueix l'àrea més gran? Quant val aquesta àrea?*

Solució

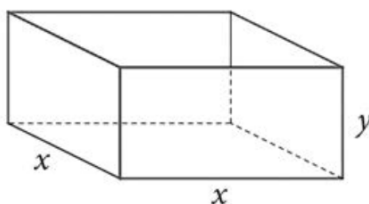
Exercici 3.2.2.

Es vol tancar un camp rectangular que hi ha a la vora del camí. Si la tanca que dóna al camí, que no volem de longitud inferior a 150m ni superior a 200m, costa a 8€/m i la dels altres costats a 1 €/m, trobeu l'àrea màxima de camp que es pot tancar amb 2.880€. I quina és l'àrea mínima?

Solució

Exercici 3.2.3.

[PAU Setembre 2024] Es vol construir una capsa de cartró de base quadrada i oberta (sense tapa) per a posar-hi retoladors i colors, com la de la figura següent:



- a) *Expresseu l'alçària de la capsa (y) en funció de la longitud del costat de la base (x).*
b) *Es vol fer servir el mínim de cartró possible per a construir la capsa. Quants centímetres ha de mesurar el costat de la base (x) perquè la superfície de la capsa sigui mínima? Quants centímetres ha de mesurar l'alçària (y)? Quina quantitat de cartró farà servir per a construir la capsa?*

Solució

3.3 Altres

Exercici 3.3.1.

El preu en euros d'una pedra preciosa és cinc vegades el quadrat del seu pes en grams. Si tenim una pedra periosa de 8 grams i ens plantegem partir-la en dos trossos:

- a) *Quin pes haurà de tenir cada tros perquè el conjunt valgui el mínim possible?*
b) *Quin és el preu mínim i el preu màxim que pot valor aquest conjunt?*

3.4 Amb la funció donada

Exercici 3.4.1.

S'ha construït una presa d'emmagatzematge d'aigua els costos de manteniment diaris de la qual són una funció de la quantitat d'aigua que té emmagatzemada. Aquests costos vénen donats per la següent expressió:

$$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$$

on $C(x)$ representa el cost en milers € i x el volum d'aigua en milions de m^3 .

- Trobeu el volum diari d'aigua òptim que cal mantenir per minimitzar costos.
- Calculeu el cost mínim diari que suposa el manteniment de la instal·lació. Si un dia la presa té emmagatzemats 3 milions de metres cúbics d'aigua quant s'ha gastat de més respecte del cost mínim?

Solució

Exercici 3.4.2.

En valor, en milers d'euros, durant els dos primers anys d'una determinada empresa en un funció del temps t ve donat per la funció

$$v(t) = 1 + 3t + t^2 - t^3$$

- Trobeu el valor de l'empresa en el moment de la seva constitució
- Trobeu el valor màxim i els valors mínims de l'empresa durant els dos primers anys de vida
- Trobeu el moment de màxim creixement de l'empresa.

Exercici 3.4.3.

[PAU Setembre 2024] Els beneficis o pèrdues diaris d'una nova empresa durant el primer any de funcionament són donats per la funció $B(x) = -x^2 + 260x - 12.000$, en què x representa el dia des de l'inici de l'activitat de l'empresa.

- Quin benefici o pèrdua va tenir l'empresa el dia 45? Quins dies va obtenir un benefici de 4.000€?
- Calculeu quin dia l'empresa va obtenir el benefici màxim i quin va ser aquest valor. Calculeu també entre quins dies l'empresa no va tenir pèrdues.

Solució

3.5 Tècnics

Exercici 3.5.1.

Trobeu els màxims i mínims absoluts de les següents funcions:

- a) $x^2 - 4x + 3$ en $[-1, 4]$
- b) $\sqrt{x^3 - x^2 - 6x}$ en $[-2, 0]$
- c) $\frac{x^2-1}{x+2}$ en $[-2, 4]$.

Exercici 3.5.2.

Feu l'estudi complet de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$$

És a dir,

- a) Domini
- b) Punts de tall amb els eixos
- c) Asímtotes
- d) Continuitat
- e) Monotonia i extrems relatius
- f) Esbós

Exercici 3.5.3: PAU Juny 2024.

Una pagesa contracta un conductor perquè porti un tractor fins a un poble que es troba a 300 km de distància. Sabem que el gasoil que fa servir el tractor costa 1,96€ per litre i que el conductor cobra 14,70 € l'hora. Suposem que el conductor farà tot el trajecte a una velocitat constant i que el consum de gasoil (en litres per hora), en funció de la velocitat x (en kilòmetres per hora), és donat per la funció

$$G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}$$

- a) Calculeu el temps que el conductor trigarà a fer el viatge i el cost total del viatge si el tractor fa tot el recorregut a 40 km/h (la velocitat màxima permesa per a aquest tipus de vehicle). Comproveu que la funció que dona el cost total del viatge en funció de la velocitat del tractor es pot expressar com a

$$C(x) = \frac{7350}{x} + 6x$$

- b) Calculeu quina és la velocitat que fa que el cost total del viatge sigui mínim. Quin és aquest cost?

Solució .

- a) El temps total del viatge serà de 7,5 hores si va a 40km/h, i el cost total serà de 423,75€
- b) El cost mínim s'obté per una velocitat de 35km/h, i correspon a 420€.

Exercici 3.5.4: PAU Setembre 2023.

Un fabricant de vehicles elèctrics ha tret al mercat un model nou amb tant d'èxit que ven tots els que fabrica. El preu de venda de cada cotxe és de 35.000€. Fabricar un cert nombre de cotxes li suposa unes despeses de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en què x representa el nombre de vehicles fabricats.

- a) Entre quins valors ha de mantenir la producció per tal de no tenir pèrdues?
- b) Quants vehicles ha de fabricar per tal d'obtenir el màxim benefici? Quin valor pren aquest benefici màxim?

Solució .

- a) La producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles per tal de no tenir pèrdues.
- b) Per tal d'obtenir un benefici màxim caldrà fabricar 60 vehicles, cosa que suposarà uns beneficis de 2500€.

Exercici 3.5.5.

La temperatura, en graus centígrads, d'un hivernacle al llarg del dia d'avui ha vingut donada per la següent funció:

$$f(x) = -\frac{1}{100} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{21x^2}{2} + 90x - 400 \right)$$

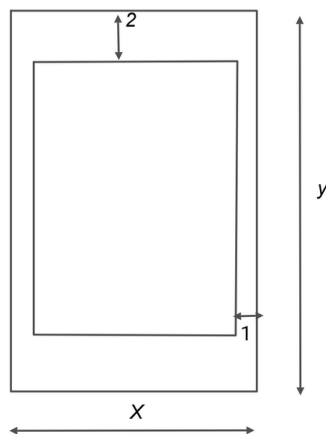
amb $0 \leq x \leq 24$, on $x = 0$ correspon a les 0:00, quan comença el dia, i $x = 24$ a les 0:00 de l'endemà.

- a) Quina temperatura feia en començar el dia?
- b) En quins moments del dia la temperatura ha estat inferior a 4 graus?
- c) Trobeu la temperatura màxima i mínima que s'ha viscut entre les 0:00 i les 24:00.

Solució

Exercici 3.5.6.

Un full de paper ha de tenir 18 cm^2 d'espai pel text imprès, marges superior i inferior de 2 cm d'altura i marges laterals de 1 cm d'amplada, com a la figura



Determineu raonadament les dimensions que minimitzen la superfície de paper total.

Solució

Exercici 3.5.7.

Un estudi ha permès fer una previsió de la població, en milers de persones, d'una ciutat pels següents 20 anys vindrà donada per la funció

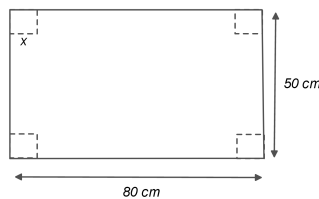
$$f(x) = \frac{x^2 + 28}{x + 2}$$

on $0 \leq x \leq 20$ són els anys des del moment actual.

- a) Determineu la població actual.
- b) Determineu si, en algun moment, la població serà inferior a 10.000 habitants. En cas afirmatiu, digueu quan.
- c) Trobeu la població màxima i mínima durant els propers 20 anys.

Exercici 3.5.8.

Es desitja construir una caixa a partir d'una làmina de cartró dimensions $80\text{cm} \times 50\text{cm}$. Per fer-ho, es retallen les cantonades en forma de quadrat (com a la figura) i s'obté una forma a partir de la qual, plegada convenientment, s'obté la caixa.



Determineu el valor de x per tal que la caixa tingui volum màxim.

Exercici 3.5.9.

Una empresa vitivinícola ha collit un total de 50 tones de raïm que generen un benefici de $1,20\text{€}/\text{kg}$. Cada setmana que passa es deterioren 500 kg de raïm, però el preu de venda del raïm que queda augmenta en 2 cèntims per kg (ja que el raïm es torna més dolç i adequat per a la producció de vi).

- a) Quin seria l'ingrés total si el raïm es vengués després de 6 setmanes d'haver-lo collit?
- b) Quantes setmanes hauríem d'esperar per obtenir el màxim ingrés possible?

Solució

Exercici 3.5.10.

Una empresa fabrica i ven un producte tecnològic. El cost de producció per unitat és de 20€ , i les despeses fixes de producció ascendeixen a 5.000€ . S'ha observat que si el preu de venda és de 50€ per unitat, es venen 300 unitats, i per cada euro que es redueix el preu, es venen 10 unitats més.

- a) Troba una funció que expressi el benefici en funció del preu de venda per unitat.
- b) Quin preu de venda maximitza el benefici?

Solució

Exercici 3.5.11.

Una empresa de transport ofereix serveis de lliurament de mercaderies. El cost per quilòmetre recorregut per camió és de 1,50€. Per altra banda, l'empresa cobra als clients una tarifa inicial fixa de 100€ i 0,80€ per quilòmetre recorregut.

- Troba una funció que representi el benefici en funció de la distància recorreguda (en quilòmetres).
- Quina és la distància que maximitza el benefici de l'empresa?

Exercici 3.5.12: PAU Juny 2016.

Una fàbrica de mobles de cuina ven 1000 unitats mensuals d'un model d'armari a 200€ la unitat. Per tal de reduir-ne l'estoc, fa una oferta als compradors i estima que, per a cada euro de reducció en el preu, les vendes mensuals del producte s'incrementaran en 100 unitats.

- Quantes unitats caldrà vendre per a obtenir un màxim d'ingressos?
- A quant pujaran aquests ingressos?

Exercici 3.5.13: PAU Juny 2015.

Un arbre té un volum de 30m^3 i, per la qualitat de la fusta, es ven a 50€ per metre cúbic. Cada any l'arbre augmenta un volum de 5m^3 . Alhora, la qualitat de la fusta de l'arbre disminueix, i també el preu, que cada any és un euro per metre cúbic més barat. D'aquí a quants anys aconseguirem el màxim d'ingressos per la venda de la fusta de l'arbre? Quina seran aquests ingressos?

3.6 Solucions

Solució Exercici 3.1.2.

Definició de la funció:

$$P(x) = (25 + x)(370 - 10x)$$

- Càlcul inicial:** Si $x = 0$:

$$P(0) = 25 \cdot 370 = 9.250$$

Desenvolupament de la funció:

$$P(x) = -10x^2 - 250x + 370x + 25 \cdot 370$$

$$P(x) = -10x^2 + 120x + 9.250$$

b) Maximització (Vèrtex):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2(-10)} = \frac{-120}{-20} = 6$$

Càlcul de la producció màxima:

$$P(6) = 9.610 \text{ peres}$$

Nombre total d'arbres:

$$\text{Total} = 25 + 6 = 31 \text{ pereres}$$

Producció nul·la (Pàgina 2): Busquem quan $P(x) = 0$:

$$-10x^2 + 120x + 9.250 = 0$$

Simplificant (dividint per -10):

$$x^2 - 12x - 925 = 0$$

Aplicant la fórmula de segon grau:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(1)(-925)}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 3.700}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{3.844}}{2} = \frac{12 \pm 62}{2}$$

Dues solucions possibles:

- $x_1 = \frac{74}{2} = 37$
- $x_2 = \frac{-50}{2} = -25$ (es descarta)

Resultat final (arbres totals): $25 + 37 = 62$ pereres.

Solució Exercici 3.1.3.

Plantejament:

- Si $p = 18\text{€} \rightarrow 120$ clients.
- Si puge x el preu del menú $\rightarrow (18 + x)$.
- Clients: $(120 - 4x)$.

Funcions: Ingressos:

$$I(x) = (18 + x)(120 - 4x)$$

c) Funció de Beneficis:

$$B(x) = (18 + x)(120 - 4x) - (120 - 4x) \cdot 8$$

Treient factor comú $(120 - 4x)$:

$$\begin{aligned} B(x) &= (120 - 4x)(18 + x - 8) \\ &= (120 - 4x)(10 + x) \\ &= 1200 + 120x - 40x - 4x^2 \\ B(x) &= -4x^2 + 80x + 1.200 \end{aligned}$$

d) Optimització: Trobem el vèrtex (és un màxim perquè és una paràbola convexa/invertida):

$$x_v = \frac{-80}{2(-4)} = 10$$

Preu final del menú:

$$18 + 10 = 28\text{€}$$

Beneficis màxims:

$$B(10) = 1.600\text{€}$$

Solució Exercici 3.1.7.

- a) El preu de venda segueix una paràbola que és còncaua cap avall (el coeficient de grau 2 és negatiu, val $-\frac{25}{100}$). Com el coeficient de grau 1 és nul ($b = 0$) el vèrtex de la paràbola està situat a $x_v = 0$. Per tant, la funció $P(x)$ passa de créixer a decreïxer en $x = 0$ (hi té un màxim). Com la quantitat produïda ha de ser positiva ($x > 0$) podem concloure que el preu sí que disminueix amb la quantitat de galeta elaborada.
- b) La funció que ens proporciona els beneficis s'obté de la diferència entre els ingressos i els costos. Els costos en els dona l'enunciat, mentre que el ingressos els trobarem de multiplicar el preu per quilo de cada galeta pel nombre de quilos venuts (que coincideix amb els produïts). Per tant, ens quedarà: equation

$$B(x) = P(x) \cdot x - C(x) = \left(200 - \frac{25x^2}{100}\right) \cdot x - (10 + 170x)$$

Si l'arreglem una mica, la funció quedarà:

$$B(x) = -10 + 30x - \frac{25x^3}{100}$$

- c) La funció $B(x)$ és una funció cúbica. Per tal de trobar-ne el màxim caldrà derivar i igualar a 0, ja que no tenim fórmula per trobar-ne els vèrtexs:

$$B'(x) = 30 - \frac{75x^2}{100} = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són: $x = -\sqrt{40}$ i $x = \sqrt{40}$. Ens quedem només amb la positiva perquè l'altra no té sentit. Ara caldrà veure que correspon a un màxim. Com $\sqrt{40} \simeq 6.32$, avaluem $B'(x)$ en $x = 6$ i en $x = 7$, i obtenim valors positius i negatius, respectivament. Per tant, la funció $B(x)$ té un màxim en $x = 6.32$, que ens indica que caldrà produir 6.32 Kg de galeta per obtenir uns beneficis màxims. Ara només cal saber quins seran aquests beneficis: $B(6.32) = 116.49$ €.

Solució .

- a) Només caldrà trobar el mínim de la funció $C(x)$. Com és una cúbica, derivem i igualem a 0:

$$C'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són $x = \frac{4}{3}$ i $x = -2$. Aquesta segon solució no té sentit perquè és negativa.

Cal veure si $x = \frac{4}{3}$ correspon a un màxim o a un mínim. Com $\frac{4}{3} \simeq 1.333$, avaluem $C''(x)$ en $x = 1$ i $x = 2$, i obtenim que aquesta funció és negativa a l'esquerra de $x = \frac{4}{3}$ i positiva a la seva dreta. Per tant, la funció, com passa de decreixer a créixer en aquest valor, els costos són mínims per $x = \frac{4}{3}$. Així, la quantitat d'aigua òptima és de 1.333 milions de m^3 .

- b) Els cost de manteniment que obtenim per emmagatzemar aquesta quantitat d'aigua valdrà $C\left(\frac{4}{3}\right) =$

Solució Exercici 3.2.3.

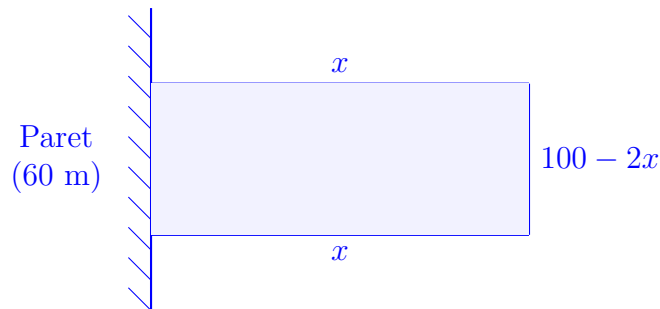
- a) $y = \frac{4000}{x^2}$

b) $x = 20\text{cm}$ i $y = 10\text{cm}$, que correspondrà a una superfície de 1200 cm^2

Solució Exercici 3.4.3.

- a) El dia 45 va tenir unes pèrdues de 2325€ , i els dies 100 i 160 ha tingut un benefici de 4000€ .
- b) El dia 130 va tenir uns beneficis màxims de 4900€ . L'empresa no va tenir pèrdues entre els dies 60 i 200.

Solució Exercici 3.2.1.



1) **Funció Àrea** Sabem que la longitud total de la tanca disponible és de 100 m . Tenint en compte la paret existent, els costats són x (laterals) i la part frontal és $100 - 2x$.

L'àrea del rectangle ve donada per:

$$A(x) = x \cdot (100 - 2x)$$

$$A(x) = 100x - 2x^2$$

Aquesta és una funció parabòlica convexa ($\cap$) perquè el coeficient de x^2 és negatiu.

2) **Maximització** Per trobar l'àrea màxima, busquem el vèrtex de la paràbola (x_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = \frac{-100}{-4} = 25\text{ m}$$

Comprovem si aquest valor és factible amb la paret existent de 60 metres :

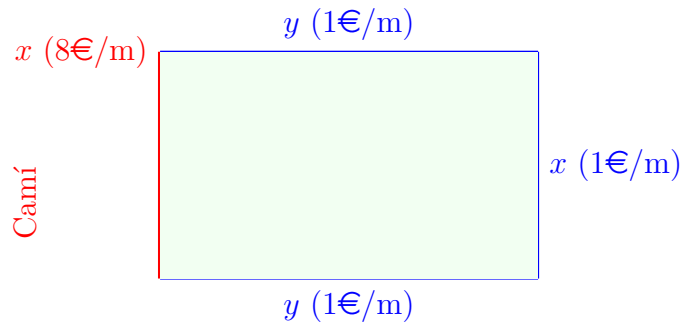
$$\text{Llargada frontal} = 100 - 2(25) = 50\text{ m}$$

Com que $50 \text{ m} < 60 \text{ m}$, la solució és vàlida.

L'àrea màxima serà:

$$A(25) = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ m}^2$$

Solució Exercici 3.2.2.



1. Plantejament de l'equació de costos Tenim un costat x a 8 €/m , el costat oposat x a 1 €/m , i dos costats y a 1 €/m .

$$2880 = 8x + 1x + 1y + 1y$$

$$2880 = 9x + 2y$$

Aïllem la y :

$$2y = 2880 - 9x \implies y = \frac{2880 - 9x}{2}$$

2. Funció Àrea L'àrea és $A = x \cdot y$. Substituïm la y :

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{2880 - 9x}{2} \right) = \frac{2880x - 9x^2}{2}$$

$$A(x) = 1440x - 4,5x^2$$

3. Càlcul de l'Àrea Màxima Busquem el vèrtex de la paràbola:

$$x_v = \frac{-1440}{2(-4,5)} = \frac{-1440}{-9} = 160 \text{ m}$$

Comprovem les restriccions ($150 \leq x \leq 200$):

$$150 < 160 < 200 \quad (\text{Vàlid})$$

Calculem la y corresponent:

$$y = \frac{2880 - 9(160)}{2} = \frac{1440}{2} = 720 \text{ m}$$

L'àrea màxima és:

$$A_{max} = 160 \cdot 720 = 115.200 \text{ m}^2$$

4. Càlcul de l'Àrea Mínima Per trobar el mínim en un interval tancat, avaluem la funció en els extrems de l'interval: $x = 150$ i $x = 200$.

- Si $x = 150$:

$$A(150) = 150 \cdot \frac{2880 - 9(150)}{2} = 150 \cdot 765 = 114.750 \text{ m}^2$$

- Si $x = 200$:

$$A(200) = 200 \cdot \frac{2880 - 9(200)}{2} = 200 \cdot \frac{1080}{2} = 200 \cdot 540 = 108.000 \text{ m}^2$$

Conclusió: L'àrea mínima s'aconsegueix quan $x = 200$ m i és de **108.000 m²**.

Solució Exercici 3.5.5.

a)

$$f(0) = -\frac{1}{100}(-400) = 4$$

A les 0:00 feia 4°C

b) Cal resoldre primer l'equació

$$f(x) = 4$$

$$-\frac{1}{100} \left(\frac{x^3}{3} - 21\frac{x^2}{2} + 90x - 400 \right) = 4 \implies \frac{x^3}{3} - 21\frac{x^2}{2} + 90x - 400 = -400 \implies x \left(\frac{x^2}{3} - 21\frac{x}{2} + 90 \right) = 0$$

d'on $x = 0$ o bé:

$$\frac{x^2}{3} - 21\frac{x}{2} + 90 = 0 \implies 2x^2 - 63x + 540 = 0 \implies x = \frac{63 \pm \sqrt{63^2 - 4 \cdot 2 \cdot 540}}{4}$$

i l'equació no té solució real perquè $63^2 - 4 \cdot 2 \cdot 540 < 0$. Per tant, la temperatura no torna a valer 4°C en tot el dia, amb el que es queda, o bé per sobre o bé per sota. Per diferenciar-ho només cal avaluar la funció en algun valor entre $x = 0$ i $x = 24$, per exemple en $x = 1$:

$$f(1) = -\frac{1}{100} \left(\frac{1}{3} - \frac{21}{2} + 90x - 400 \right) = -\frac{1}{100} \left(\frac{2 - 63 - 2940}{6} \right) = 4.91$$

Per tant, la temperatura ha estat inferior a 4°C durant tot el dia.

c) Derivem la funció:

$$f'(x) = -\frac{1}{100} (x^2 - 21x + 90) = 0 \implies x = 6 \text{ i } x = 15$$

Calculem la segon derivada per tal de veure si es tracta de mínims o de màxim:

$$f''(x) = -\frac{1}{100} (2x - 21)$$

$$f''(6) = -\frac{1}{100} (12 - 21) > 0 \quad f''(15) = -\frac{1}{100} (30 - 21) < 0$$

Per tant, la temperatura va tenir un mínim relatiu a les 6 del matí i un màxim relatiu a les 15:00. Ara, com la funció està limitada a l'interval $[0, 24]$, cal comprovar que els valors dels extrems no siguin inferior o superiors als extrems relatius:

$$f(0) = 4 \quad f(24) = -3.2$$

Calculem ara quina va ser la temperatura als extrems relatius:

$$f(6) = 1.6^\circ\text{C} \quad f(15) = 2.87$$

Per tant, la temperatura màxima es va assolir en començar el dia, a les 0:00, i la mínima en acabar el dia, i va ser de 4°C i -3.2°C , respectivament.

Solució Exercici 3.5.6.

Imposant que l'àrea de la zona del text sigui 18cm^2 tindrem:

$$(x - 2)(y - 4) = 18$$

Aïllant y obtindrem:

$$y = \frac{18}{x - 2} + 4$$

Ara calculem l'àrea total del full en funció de x :

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(\frac{18}{x-2} + 4 \right) = \frac{18x}{x-2} + 4x$$

Derivant l'expressió i igualant a 0 obtindrem:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{18(x-2-18x)}{(x-2)^2} + 4 = \frac{-36}{(x-2)^2} + 4 = 0 \\ -36 &= -4(x-2)^2 \implies -9 = -(x-2)^2 \implies -9 = -x^2 + 4x - 4 \implies x^2 - 4x - 5 = 0 \\ x &= -1 \text{ o } x = 5 \end{aligned}$$

La solució $x = -1$ l'hem de descartar perquè no té sentit.

Comprovem ara que $x = 5\text{cm}$ correspon a un mínim. Si fem la segona derivada obtenim:

$$A''(x) = \frac{72}{(x-2)^3}$$

Si calculem $A''(5)$ obtenim un nombre positiu, $A''(5) > 0$, i per tant, es tracta d'un mínim.

Troblem ara quant val y :

$$y = \frac{18}{5-2} + 4 = 10$$

Així, les dimensions del paper que minimitzen l'àrea i mantenen els 18cm^2 i els marges són 5×10 .

Solució Exercici 3.5.9.

- a) Inicialment tenim 50.000 kg de raïm. Cada setmana es perden 500 kg, i el preu augmenta 0,02€ per kg.

Després de t setmanes: - La quantitat de raïm serà:

$$Q(t) = 50000 - 500t$$

- El preu per kg serà:

$$P(t) = 1,20 + 0,02t$$

Els ingressos totals seran:

$$I(t) = Q(t) \cdot P(t)$$

Substituïm:

$$I(t) = (50000 - 500t)(1,20 + 0,02t)$$

Desenvolupem:

$$I(t) = 60000 + 1000t - 600t - 10t^2$$

Simplifiquem:

$$I(t) = -10t^2 + 400t + 60000$$

b) Per maximitzar els ingressos, derivem i igualem a zero:

$$I'(t) = -20t + 400 = 0$$

Resolem:

$$t = \frac{400}{20} = 20$$

Derivem una altra vegada per comprovar la concavitat:

$$I''(t) = -20$$

Com $I''(t) < 0$, la funció és còncava i, per tant, $t = 20$ correspon a un màxim.

Substituïm $t = 20$ a la funció d'ingressos per calcular el màxim:

$$I(20) = -10(20)^2 + 400(20) + 60000$$

$$I(20) = -4000 + 8000 + 60000 = 64000$$

****Resposta:**** Els ingressos màxims són de 64.000€ i s'obtenen després de 20 setmanes.

Solució Exercici 3.5.10.

a) Sigui x el preu de venda per unitat.

- El cost de producció per unitat és de 20€.
- Les despeses fixes són de 5.000€.

- Si el preu és de 50€, es venen 300 unitats. Per cada euro que es redueix el preu, es venen 10 unitats més.

El nombre d'unitats venudes es pot expressar com:

$$q(x) = 300 + 10(50 - x)$$

El benefici total serà:

$$B(x) = (x - 20)(300 + 10(50 - x)) - 5000$$

Simplifiquem:

$$B(x) = (x - 20)(800 - 10x) - 5000$$

Desenvolupem:

$$B(x) = 800x - 10x^2 - 16000 + 200x - 5000$$

Agrupem termes:

$$B(x) = -10x^2 + 1000x - 21000$$

b) Per maximitzar el benefici, derivem la funció benefici i igualem a zero:

$$B'(x) = -20x + 1000 = 0$$

Resolem:

$$x = \frac{1000}{20} = 50$$

Es tracta d'un màxim perquè la segona derivada és negativa: $B''(x) = -20$.
Per tant, el preu òptim de venda és de 50€ per unitat.

4 Matrius

4.1 Operacions amb matrius

Exercici 4.1.1: Valors de paràmetres.

Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & a-2 \end{pmatrix}$$

Solució

Exercici 4.1.2.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculeu A^2 i A^3 .

Solució

Exercici 4.1.3.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

Solució

Exercici 4.1.4: Propietat distributiva.

Comproveu que $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució

Exercici 4.1.5: Propietat associativa.

Comproveu que $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solució

Exercici 4.1.6: Identitats notables.

Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Comproveu que NO ES COMPLEIXEN les identitats notables. És a dir, que passa el següent:

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$(A - B)^2 \neq A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$$

- b) Expliqueu per què, en general, les matrius no compleixen les fórmules de les identitats notables.

Solució

Exercici 4.1.7: PAU, Juny 2019, número 1.

Resoleu les qüestions següents.

- a) Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = \mathbf{0}$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2 i $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la.

- b) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A , és a dir, que compleixen que $A \cdot B = B \cdot A$.

Solució

Exercici 4.1.8: PAU Juny 2016.

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu les matrius $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

- (b) Justifiqueu si en algun cas és possible calcular P^2 quan P és una matriu no quadrada.

Solució

Exercici 4.1.9: PAU Juny 2015.

Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculeu les matrius $A + B$ i $A \cdot B$.
- (b) Determineu els valors de a , b i c que compleixen que $A + B = A \cdot B$.

Solució

Exercici 4.1.10: PAU Juny 2017.

Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix},$$

en què m i n són dos nombres reals.

- (a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$.
- (b) Determineu m i n de manera que les matrius B i C commutïn, és a dir, $B \cdot C = C \cdot B$.

Solució

Exercici 4.1.11: PAU Setembre 2018.

Resoleu les preguntes següents:

- (a) Trobeu les matrius A i B que compleixen que

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad 2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (b) Determineu el valor de a , b , c i d perquè es verifiqui que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}.$$

Solució

Exercici 4.1.12: Commutativitat paràmetres.

Considereu les dues matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que les dues matrius commutïn.

Solució

4.2 Potències

Exercici 4.2.1: Potències cícliques.

Sigui A la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu A^{50} i A^{97}

b) Trobeu els valors a i b pels quals la matriu A commuta amb la matriu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$

Solució

4.3 Determinants

Exercici 4.3.1.

Calculeu els següents determinants:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

4.4 Càlcul del rang

Exercici 4.4.1: Rang de matrius.

Calcula el rang de les següents matrius utilitzant el mètode de Gauss (esglaonant la matriu per convertir-la en triangular superior):

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e) E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f) F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució

4.5 Matriu inversa

Exercici 4.5.1: Determinant variable x .

Considereu la següent matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 2x & x \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}$$

a) Trobeu els valors de x pels quals la matriu A és invertible (no cal que trobeu la inversa!).

b) Trobeu els valors de x que fan màxim el seu determinant.

Solució

Exercici 4.5.2: PAU, juny 2020, número 5.

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Comproveu que es compleix $A^{-1} = A^2$.
- b) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X + B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

Solució

Exercici 4.5.3: PAU setembre 20, número 1.

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, es compleix que $A^{-1} = -A$.

Solució

Exercici 4.5.4: PAU Juny 2018.

Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un nombre real.

- (a) Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.
- (b) Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M . És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

Solució

4.6 Equacions matricials

Exercici 4.6.1: Equacions matricials bàsiques.

Resoleu les següents equacions matricials:

a)

$$AX = B$$

on:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX + B = C$$

on:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

d)

$$\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solució

Exercici 4.6.2: Miscel·lània d'equacions.

Resoleu les següents equacions matricials:

a) Troba la matriu X tal que:

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

b) Resol X en l'equació:

$$XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

c) Si $AX + C = D$, troba X :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

d) Resol l'equació $AXB = C$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

e) Troba X tal que $X^T A = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

f) Resol l'equació $X^2 = A$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

g) Si $AX + XA = B$, troba X :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

h) Resol l'equació $X + A = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Troba X tal que $AXA = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

j) Resol l'equació $A^{-1}XA = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució

Exercici 4.6.3.

La solució proposada per ChatGPT a l'exercici 4.6.1 d) no és correcta. Expliqueu raonadament on és l'errada.

Solució

Exercici 4.6.4: PAU Juny 2017.

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$.

(b) Per al valor $a = 2$, trobeu una matriu X tal que $A \cdot X \cdot A = B$.

Solució

4.7 Problemes amb matrius

Exercici 4.7.1: PAU 2024 sèrie 1.

Diem que una matriu és màgica si la suma dels elements de cada fila i de cada columna té com a resultat en tots els casos el mateix valor, que s'anomena constant màgica.

El Martí ha trobat una manera de crear matrius màgiques triant tres nombres qualssevol i multiplicant-los per les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El Martí proposa als seus amics que cadascú construeixi la seva matriu màgica particular a partir del dia del seu aniversari, del mes del seu aniversari i de la seva edat.

- Sabent que el Martí va néixer el 10 de març i que té 18 anys, calculeu $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$. Comproveu que la matriu resultant és màgica i indiqueu quina és la seva constant màgica (el valor comú de la suma de les files i les columnes).
[1,25 punts]
- El Martí ha calculat la matriu màgica del seu pare, que fa l'aniversari el 8 de setembre, i ha obtingut que la seva constant màgica és 153. Quina edat té el pare del Martí?
[1,25 punts]

Exercici 4.7.2: PAU 2024 sèrie 5.

La Laia, una aficionada a l'artesanía feta amb fusta, va muntar un petit negoci fa un parell de mesos. Al seu taller, elabora tres tipus de productes amb fusta reciclada, que després posa a la venda: noms personalitzats, paraules decoratives i baldufes.

Durant el primer mes, la Laia va tenir tres clients: el primer va adquirir 2 noms personalitzats i 3 baldufes; el segon va adquirir 1 nom personalitzat, 2 paraules decoratives i 5 baldufes, i el tercer només va comprar 4 baldufes.

- Construïu la matriu 3×3 corresponent a les vendes, en què les files representin els clients (C1, C2 i C3) i les columnes representin els productes que van adquirir. Si el primer mes la Laia va vendre els noms personalitzats (N) a 20 € cadascun, les paraules decoratives (P) a 18 € cadascuna i les baldufes (B) a 6 € cadascuna, calculeu quant va facturar a cada client per la seva comanda mitjançant un producte de matrius.

- b) Per tal d'incentivar les vendes, el segon mes la Laia va aplicar un descompte al preu de venda de tots els productes. Durant aquest mes, també va tenir tres clients i va obtenir la matriu de vendes següent:

$$\begin{array}{ccc|c} N & P & B & \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{matrix} \end{array}$$

Si durant el segon mes la Laia va facturar 78 € al primer client, 52 € al segon client i 62 € al tercer client, a quin preu va vendre cada producte?

Exercici 4.7.3: PAU 2024 sèrie 3.

Un cinema disposa de dues sales en les quals es projecten dues pel·lícules diferents. La taula següent mostra el nombre de persones que han assistit a la projecció de cada pel·lícula la darrera setmana, agrupades per franges d'edat:

Franja d'edat	Pel·lícula de la sala 1	Pel·lícula de la sala 2
Menys de 18 anys	122	620
18-65 anys	930	433
Més de 65 anys	384	281

La informació de la taula anterior es registra amb la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

- a) Considerant la matriu $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu el producte $A \cdot B$. Expliqueu el significat de la matriu obtinguda.

Sabem que una entrada per a persones de menys de 18 anys costa 5 €, una entrada per a adults d'entre 18 i 65 anys costa 8,5 € i una entrada per a adults de més de 65 anys costa 6,5 €. Trobeu una matriu $C = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ de manera que el producte $C \cdot A \cdot B$ doni els ingressos setmanals totals obtinguts per la venda d'entrades, i calculeu els ingressos corresponents a aquesta setmana.

- b) Al cap d'uns mesos, el registre setmanal és donat per la matriu

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix},$$

però hi ha un valor que s'ha esborrat, el del nombre de persones entre 18 i 65 anys que han assistit a la segona pel·lícula, i l'hem denotat per x . Calculeu el valor de x sabent que els ingressos totals d'aquella setmana van ser de 12.076 €.

Exercici 4.7.4: PAU 2025 sèrie 0.

Una pagesa contracta una empresa de conductors perquè li portin els tractors fins als pobles on han de treballar. Suposem que els conductors fan tot el trajecte a una velocitat constant.

Trieu una opció (opció A o opció B) i responeu les preguntes de l'opció triada:
OPCIÓ A

- a) Suposem que un poble, al qual s'ha de dur un tractor, es troba a 300 km de distància. Sabem que el gasoil que fa servir el tractor costa 1,96 € per litre i que el conductor cobra 14,70 € l'hora. Sabem també que el consum de gasoil (en litres per hora), en funció de la velocitat x (en quilòmetres per hora), és donat per la funció

$$G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}.$$

Comproveu que la funció que dona el cost total del viatge en funció de la velocitat del tractor es pot expressar com a $C(x) = 300 \left(\frac{24,5}{x} + 0,02x \right)$.

- b) Suposem que la pagesa hagi d'enviar tractors a poblacions que es troben a 100, 200 i 300 km de distància. Aquests tractors poden fer el trajecte a 35, 25 o 15 km/h. Construïu una matriu que contingui el cost total del viatge segons la distància a la qual es troba el poble (columnes) i segons la velocitat a la qual circula el tractor (files). Si en total ha de portar 3 tractors a una localitat que es troba a 100 km, 3 tractors a una localitat que es troba a 200 km i 2 tractors a una localitat que es troba a 300 km calculeu, mitjançant un producte de matrius, quant li costarà tot plegat segons si els tractors circulen a 35, 25 o 15 km/h.

Exercici 4.7.5: PAU 2024 sèrie 1.

Al Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM), que se celebrarà a Lleida el proper mes de juliol, hi assistiran docents d'universitat, d'educació secundària i d'educació infantil i primària.

A hores d'ara, un 10 % dels docents inscrits són d'universitat, un 50 % són de secundària i la resta són d'infantil i primària. D'altra banda, un 40 % dels docents inscrits d'universitat, un 52 % dels docents inscrits de secundària i un 65 % dels docents inscrits d'infantil i primària són dones.

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen.

OPCIÓ B

- a) L'organització del Congrés vol donar un detall diferent a cada grup de docents: el detall de tipus D1 per al grup de docents universitaris, el detall de tipus D2 per al grup de docents de secundària i el detall de tipus D3 per al grup de docents d'infantil i primària. Han demanat pressupost a tres empreses diferents, que anomenarem E1, E2 i E3. La matriu següent ens dona els preus unitaris, en euros, de cada detall de tipus D1, D2 i D3 (files) segons les empreses E1, E2 i E3 (columnes):

$$\begin{pmatrix} 1,25 & 1 & 1,25 \\ 0,75 & 1 & 1,15 \\ 1 & 0,85 & 0,80 \end{pmatrix}$$

La comanda de l'organització es pot representar com un vector fila (x, y, z) , en què x representa la quantitat de detalls de tipus D1, y és la quantitat de detalls de tipus D2 i z correspon a la quantitat de detalls de tipus D3 que cal comprar.

L'organització treballa amb la previsió que al Congrés hi assistiran 1.000 persones en total i que els percentatges de cada grup de docents respecte al total seran els mateixos que els que hi ha en aquest moment de la inscripció.

Calculeu mitjançant un producte de matrius quina empresa ofereix el millor preu i quin és aquest preu.

Exercici 4.7.6: PAU 2025 sèrie 4.

Una fàbrica es dedica a elaborar pasta. Tot el procés de producció es pot resumir en tres etapes:

1. *Compra de matèries primeres.* Per a elaborar la pasta, l'empresa ha de comprar oli, farina i sal de bona qualitat. La compra la pot fer a tres proveïdors diferents. El primer proveïdor ven l'oli a 3 €/L, la farina a 0,6 €/kg i la sal a 1 €/kg. El segon proveïdor ven l'oli a 3,5 €/L, la farina a 1 €/kg i la sal a 0,7 €/kg. Finalment, el tercer proveïdor ven l'oli a 2,5 €/L, la farina a 0,8 €/kg i la sal a 0,9 €/kg.
2. *Elaboració, empaquetament i control de qualitat.* Es fabrica i s'envasa la pasta. Posteriorment, es comprova que la pasta estigui ben feta i envasada correctament, i es verifica que els paquets pesin 500 g de mitjana.
3. *Venda.* L'estratègia de venda i el preu dels paquets es determinen fent un estudi de mercat.

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen.

OPCIÓ A

- a) L'empresa necessita 300 litres d'oli, 700 kg de farina i 25 kg de sal. Escriviu aquesta informació juntament amb els preus per producte de cada proveïdor en forma matricial (deixant ben clar el que representen les files i les columnes) i calculeu mitjançant un producte de matrius el cost total de la comanda per cada proveïdor. Quin dels tres proveïdors és el més econòmic?

4.8 Solucions

Solució Exercici 4.1.1.

a pot ser qualsevol valor real; b no apareix a la matriu A , per tant no té restricció.

Solució Exercici 4.1.2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució Exercici 4.1.3.

$$A \cdot B = (1), B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució Exercici 4.1.4.

$$A \cdot (B + C) = AB + AC = \begin{pmatrix} 53 & 0 \\ 26 & 3 \\ 17 & 19 \end{pmatrix}.$$

Solució Exercici 4.1.5.

$$A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Solució Exercici 4.1.6.

- a) Es comprova calculant que $AB \neq BA$, ja que $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $BA =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Perquè el producte de matrius no és commutatiu.

Solució Exercici 4.1.7.

a) $a = -1, b = -12$.

b) $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix}$ per a qualsevol $x, y \in \mathbb{R}$.

Solució Exercici 4.1.8.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

b) No, el producte $P \cdot P$ només és possible si el nombre de columnes de la primera és igual al de files de la segona. Si P és $m \times n$, cal $n = m$.

Solució Exercici 4.1.9.

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} b+a & c+a \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$.

b) $a = 1, b = 2, c = \frac{1}{2}$.

Solució Exercici 4.1.10.

a) Es compleix perquè A i B commuten ($AB = BA$).

b) $m = 1, n = 0$.

Solució Exercici 4.1.11.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $a = 0.5, b = 4, c = 3, d = 2$.

Solució Exercici 4.1.12.

$$a = 0, b = 0, c = 0.$$

Solució Exercici 4.2.1.

$$\text{a) } A^{50} = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A^{97} = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } a = 1, b = 0.$$

Solució Exercici 4.5.1.

$$\text{a) } \det(A) = -3x^2 + 2x - 4. \text{ Mai s'anul·la (no té arrels reals). Invertible per a tot } x.$$

$$\text{b) El màxim és en el vèrtex } x = -b/2a = -2/-6 = 1/3.$$

Solució Exercici 4.5.2.

$$\text{a) Es comprova calculant } A^3 = I.$$

$$\text{b) } X = A^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solució Exercici 4.5.3.

$$\text{Es compleix quan } \det(A) = 1, \text{ per tant } x^2 - 10 = 1 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Solució Exercici 4.5.4.

$$\text{a) } a = \pm 1.$$

$$\text{b) } a = 0.5.$$

Solució Exercici 4.6.1.

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.2 \\ 1.8 & 1.6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$c) X = A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$d) (I + A)X = C \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1.4 & 1.3 \\ 0.2 & 1.1 \end{pmatrix}.$$

Solució Exercici 4.6.2.

$$a) X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$b) X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

$$c) X = A^{-1}(D - C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$d) X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e) X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

$$f) X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$g) X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$h) X = B - A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$i) X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$j) X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució Exercici 4.6.3.

L'error és que ChatGPT ha tractat $X + AX$ com si fos $(I + A)X$ però ha fet malament la suma de la identitat o ha invertit incorrectament la matriu resultant. (Nota: Depèn de la resposta específica del xat, però normalment l'error sol ser no treure factor comú per l'esquerra correctament o oblidar la matriu Identitat).

Solució Exercici 4.6.4.

a) $a = 1$.

b) $X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.75 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$.

Solució Exercici 4.4.1.

a) **Resolució detallada:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Primer pas: fem zeros a la primera columna (F_2 i F_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{F_3-3F_1}]{\underline{F_2-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Segon pas: fem zero a la segona columna (F_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{F_3-F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que la matriu té 2 files no nul·les: $\text{Rang}(A) = 2$.

b) $\text{Rang}(B) = 3$.

c) $\text{Rang}(C) = 2$.

d) $\text{Rang}(D) = 3.$

e) $\text{Rang}(E) = 2.$

f) $\text{Rang}(F) = 3.$

5 Sistemes d'equacions lineals

5.1 Resolució de sistemes

Exercici 5.1.1.

Solucioneu els següents sistemes d'equacions escrits en forma matricial:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

5.2 Classificació de sistemes

Exercici 5.2.1.

Classifiqueu els següents sistemes:

a)

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 5 \\ 2x + z - y - 2 = 0 \\ -3z - 3x + y - 1 = -3 \end{array} \right\}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x - 3y + 4z = 2 \end{array} \right\}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 3 \\ x - z = 2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{array} \right\}$$

Exercici 5.2.2.

Resoleu i classifiqueu els següents sistemes:

a)

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ x + 2y - z = -5 \\ 5x + y + z = 11 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ 2x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \\ 3x - 4y = 18 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} x + 7y - 3z - 3 = 0 \\ 4x + y + 2z - 5 = 0 \\ 7x - 5y + 7z - 9 = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = 2 \\ 2x + 25y = 0 \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} 12x + 13y + 14z = 80 \\ 8x - 9y - 10z = -40 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

5.3 Problemes

Exercici 5.3.1: PAU Juny 2024.

Una empresa de mobles disposa de tres fàbriques que produeixen un model de sofà determinat. El mes passat es van fabricar un total de 1.260 unitats d'aquest model i sabem que la segona fàbrica va produir tants sofàs com les altres dues juntes.

- a) Amb aquesta informació, podem determinar quants sofàs va produir cadascuna de les fàbriques? Justifiqueu la resposta. A continuació, calculeu, només amb aquesta informació, quants sofàs va produir la segona fàbrica.
- b) També sabem que un 10% dels sofàs produïts per la primera fàbrica, un 30% dels produïts per la segona i un 20% dels produïts per la tercera eren de color gris, i que en total es van fabricar 284 sofàs d'aquest color. Trobeu quants sofàs va produir cada fàbrica el mes passat

Exercici 5.3.2: PAU Juny 2023 número 2.

Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat.

Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat

- a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.*
- b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?*

Exercici 5.3.3: PAU setembre 2023.

L'empresa d'esports aquàtics DiverAqua ofereix tres tipus d'activitats: esquí aquàtic, caiac i moto aquàtica. El preu per sessió i client de cadascuna d'aquestes activitats és de 40 € per l'esquí aquàtic, 20 € pel caiac i 60 € per la moto aquàtica. Sabem que avui DiverAqua ha venut 45 sessions en total. També sabem que el nombre de clients que han escollit esquí aquàtic és el triple dels que han escollit una sessió de caiac. La recaptació total del dia ha estat de 1.700 €.

- a) Plantegeu un sistema d'equacions lineals que reculli tota aquesta informació.*
- b) Quantes persones han dut a terme cadascuna de les tres activitats?*

Exercici 5.3.4: PAU Juny 2021, número 3.

En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

- a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.*

b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.

Exercici 5.3.5: PAU Setembre 2021, número 2.

La Filomena fa una festa i convida els amics a menjar un pastís. Ha anat a la botiga i ha comprat una dotzena d'ous, una bossa de farina d'ametlla i un paquet de sucre morè. La festa ha estat un èxit i decideix repetir la trobada i tornar a fer el pastís. Torna a la botiga i compra una altra dotzena d'ous i dues bosses de farina d'ametlla. Però un cop a casa s'adona que no té gens de sucre. Torna a la botiga i compra un paquet de sucre morè i també una altra dotzena d'ous. La primera compra li va costar 6€, la segona 6,5€ i la darrera 3,5€.

- a) Plantegeu un sistema d'equacions amb les dades del problema.
- b) Calculeu el preu d'una dotzena d'ous, el d'una bossa de farina d'ametlla i el d'un paquet de sucre morè.

Exercici 5.3.6: PAU, Juny 2020.

Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1€ per cada còmic, 1,5€ per cada revista i 2€ per cada novel·la.

Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30€. Quantes publicacions va vendre de cada tipus?

Exercici 5.3.7.

En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en 3 seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou: 2000 euros els d'administració, 2400 els de recerca i 2800 els de publicitat, cosa que provoca una despesa total mensual de 228.000 euros.

- a) Plantegeu i estudieu (dient si es tracta d'un sistema compatible determinat, indeterminat o bé incompatible) el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció.
- b) Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ dels de recerca i $\frac{1}{5}$ dels de publicitat. Aquest fet ha significat un estalvi mensual de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció abans de la reestructuració.

Exercici 5.3.8.

L'estiu passat, una família amb tres fills es va gastar 1500€ en equipament per a un

campament esportiu. En concret es va gastar en el més gran 100€ més que quatre vegades el que es va gastar en el fill menor. A més, entre el fill mitjà i el més gran es van gastar 700€. Esbrineu quant es va gastar aquesta família en cadascun dels fills.

Exercici 5.3.9.

L'Alexandra necessita aconseguir 30000€ per cursar el proper any un màster molt prestigiós. Com que cap banc li financia la totalitat del preu, necessita recórrer a tres entitats bancàries, A, B i C, qui li ofereixen un tipus d'interès del 5, 7 i 8%, respectivament. La quantitat que va sol·licitar entre les entitats A i B va ser de quatre vegades la de l'entitat C. Si en finalitzar l'any va pagar uns interessos de 1880€, quina quantitat va sol·licitar en cadascuna de les entitats bancàries?

Exercici 5.3.10: PAU Setembre 2024.

Una inversora vol invertir el seu capital en un banc especialitzat en criptomonedes que ofereix diferents dipòsits amb els interessos següents:

- BTC (bitcoin): 15% anual
- ETH (ether): 10% anual
- LNK (link): 13% anual

La inversora vol invertir la mateixa quantitat en bitcoins que entre les altres dues criptomonedes juntes i vol obtenir un rendiment anual global d'un 13%.

- a) Quina ha de ser la relació entre la inversió en ethers i en links?
- b) Si sabem que la inversió total serà de 150.000€, quina quantitat invertirà en cada criptomoneda?

Exercici 5.3.11: PAU Juny 2024.

Una empresa de mobles disposa de tres fàbriques que produeixen un model de sofà determinat. El mes passat es van fabricar un total de 1.260 unitats d'aquest model i sabem que la segona fàbrica va produir tants sofàs com les altres dues juntes.

- a) Amb aquesta informació, podem determinar quants sofàs va produir cadascuna de les fàbriques? Justifiqueu la resposta. A continuació, calculeu, només amb aquesta informació, quants sofàs va produir la segona fàbrica.
- b) També sabem que un 10% dels sofàs produïts per la primera fàbrica, un 30% dels produïts per la segona i un 20% dels produïts per la tercera eren de color gris, i que en total es van fabricar 284 sofàs d'aquest color. Trobeu quants sofàs va produir cada fàbrica el mes passat.

Exercici 5.3.12.

Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.

- a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila? Raoneu la resposta.*
- b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes.*

Exercici 5.3.13: PAU Juny 2017.

Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.

- a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila? Raoneu la resposta.*
- b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes.*

6 Probabilitat

6.1 Laplace i conjunts (diagrames de Venn)

Exercici 6.1.1: Daus i monedes.

Tirem un dau cúbic i una moneda. Calcula:

- a) La probabilitat d'obtenir 2-cara.
- b) La probabilitat d'obtenir nombre imparell-creu

Solució

Exercici 6.1.2: Diagrama de Venn 1.

Dibuixeu un diagrama de Venn amb la informació que es recull a la taula següent.

	B	$\overline{B}$
A	20	35
$\overline{A}$	55	75

Identifiqueu les regions i calculeu les probabilitats del següents successos:

- a) $A \cap B$
- b) $\overline{A} \cap \overline{B}$
- c) $A \cup B$
- d) $\overline{A} \cup \overline{B}$
- e) $\overline{A} \cup B$

Solució

Exercici 6.1.3: Joc de daus Quim i Carla.

El Quim i la Carla juguen a llençar un dau per tornos. Si surt 1, 2, 3 o 4, el jugador que llença el dau guanya el joc. Si surt 5 o 6, toca el torn al següent jugador. En Quim comença el joc, que continua fins al tercer llançament.

- a) Quina probabilitat té el Quim de guanyar el joc en la primera tirada? I a la tercera?
- b) Quina probabilitat té la Carla de guanyar el joc en la seva primera tirada?

Solució

Exercici 6.1.4: Escola d'enginyeria.

En una escola d'enginyeria, el 35% dels estudiants que comencen els estudis aconseguixen obtenir el títol. Es trien a l'atzar dos estudiants de primer curs. Sabent que la probabilitat que tots dos obtinguin el títol és 0.1225, determina la probabilitat que finalitzin els seus estudis:

- a) Almenys un.
- b) Només un.
- c) Cap dels dos.

Solució

Exercici 6.1.5: Viatges d'en Marc.

En Marc fa anualment viatges de treball a Alemanya (A), Bèlgica (B) i França (F). La probabilitat de viatjar a aquests destins en un anys és:

- $P(A) = 0.3$; $P(B) = 0.1$, $P(F) = 0.2$,
- $P(A \cap F) = 0.08$, $P(A \cap B) = 0.03$, $P(B \cap F) = 0.06$
- $P(A \cap B \cap F) = 0.01$

Quina és la probabilitat que viatgi com a mínim a un d'aquests països durant l'any?
I que no viatgi a cap?

Solució

Exercici 6.1.6: Propietats de successos.

Siguin A i B dos successos d'un experiment aleatori de manera que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ i $P(A \cup B) = 0.75$. Calcula $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$ i $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Solució

Exercici 6.1.7: Suma de dos daus.

Es llancen dos daus i se sumen els resultats obtinguts.

- a) Quina és la probabilitat que la suma sigui vuit?
- b) Quina suma és més probable?

Solució

Exercici 6.1.8: Llançament dau 4 vegades.

Si es llança un dau quatre vegades, què és més probable: que surti com a mínim un cinc o que no en surti cap?

Solució

Exercici 6.1.9: Esports al centre escolar.

Al 30% dels estudiants d'un centre escolar els agrada el futbol, al 20% el bàsquet i al 10% tots dos esports. Si s'escull un estudiant del centre escolar a l'atzar, quina és la probabilitat que li agradi algun dels dos esports? I que no li agradi cap? I només un?

Solució

Exercici 6.1.10: Més cares que creus.

Es llança una moneda tres vegades. Quina és la probabilitat d'obtenir més cares que creus?

Solució

Exercici 6.1.11: Sèries espanyoles i nord-americanes.

Segons un estudi realitzat entre persones menors de 40 anys, el 24% segueix alguna sèrie espanyola, el 35%, una nord-americana, i el 14%, ambdues. Quina proporció de persones segueix regularment com a mínim un dels dos tipus de sèries?

Solució

Exercici 6.1.12: Diagrama de Venn 2.

Dibuixeu un diagrama de Venn amb la informació de la següent taula, identifiqueu les següents regions i calculeu les probabilitats dels següents processos:

a) $A \cap B$

d) $\bar{A} \cup \bar{B}$

b) $\bar{A} \cap \bar{B}$

c) $A \cup B$

e) $\bar{A} \cup B$

	B	$\bar{B}$
A	20	35
$\bar{A}$	55	75

Solució

6.2 Probabilitat condicionada

Exercici 6.2.1: Targetes dèbit i crèdit.

Una persona fa servir una targeta de dèbit (A) i una altra de crèdit (B). La probabilitat que un dia utilitzi la targeta de dèbit és del 80%; la de crèdit, del 30%, i, ambdues, del 12%. Calcula i interpreta en termes del problema les probabilitats següents:

- a) $P(B|A)$
- b) $P(A|B)$
- c) $P(\bar{A}|B)$
- d) $P(\bar{B}|\bar{A})$

Solució

Exercici 6.2.2: Restaurant d'hamburgueses.

En un restaurant d'hamburgueses, el 80% dels clients utilitza quètrup, el 75% mostassa i el 65% tots dos.

- a) *Quina és la probabilitat que un client escollit a l'atzar utilitzi com a mínim un dels dos?*
- b) *Si un client utilitza mostassa, quina probabilitat hi ha que faci servir també quètrup?*

Solució

Exercici 6.2.3: Planta telèfons mòbils.

Una empresa té una planta de fabricació de telèfons mòbils. Se sap que el 10% dels telèfons mòbils fabricats en aquesta planta són defectuosos. Si un telèfon és defectuós, la probabilitat que el procés de control de qualitat el detecti és del 95%. Si no és defectuós, la probabilitat que el consideri defectuós i el tregui de la producció és del 3%. Dibuixa el diagrama d'arbre i respon:

- a) *Si s'escull un telèfon a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui defectuós i superi el control de qualitat i, per tant, es posi a la venda?*
- b) *De cada 1000 telèfons, quants esperem que siguin defectuosos però tot i així superin el control de qualitat?*
- c) *Si s'escull un telèfon a l'atzar, quina és la probabilitat que no sigui defectuós però tot i així no superi el control de qualitat?*

Solució

Exercici 6.2.4: Seguidors equips esportius.

En una ciutat hi ha dos equips destacats, un de futbol i un altre de bàsquet. Tots els habitants són seguidors d'algun dels dos equips. Se sap que hi ha un 60% de seguidors de l'equip de futbol, i un altre 60% de l'equip de bàsquet. S'escull a l'atzar un habitant d'aquesta ciutat:

- a) *Calcula la probabilitat que sigui seguidor d'ambdós equips.*
- b) *Si se sap que és seguidor de l'equip de bàsquet, quina és la probabilitat que ho sigui també del de futbol?*

Solució

Exercici 6.2.5: Cotxe compartit Anna i Lluís.

L'Anna i en Lluís comparteixen cotxe per desplaçar-se diàriament a la feina. Anna condueix el 40% dels dies i en Lluís la resta. Quan condueix l'Anna, arriben tard el 5% dels dies, i quan condueix el Lluís, el 8%.

- a) *Calcula la probabilitat que un dia triat a l'atzar arribin tard a la feina.*
- b) *Sabent que avui hem arribat tard, quina és la probabilitat que conduís el Lluís?*

Solució

Exercici 6.2.6: Anar a la universitat 1.

El Joan té tres maneres d'anar a la universitat. El 30% de les vegades va en autobús, el 20% en bicicleta i el 50% caminant. Quan va en autobús, arriba tard el 5% de les vegades; quan va en bicicleta, el 10%, i caminant el 25%. Donat un dia en què arriba a temps, quina probabilitat hi ha que hi anés en bici?

Solució

Exercici 6.2.7: Bols de bales.

Un bol conté 6 bales blanques i 4 de negres, i un segon bol en conté 5 de blanques i 3 de negres. Es treu una bola a l'atzar del primer bol i es col·loca, sense mirar-la, al segon. Després s'extreu una bala del segon bol.

- a) *Quina és la probabilitat que la bola extreta del segon bol sigui negra?*
- b) *Sabent que la bola extreta del segon bol ha estat negra, quina és la probabilitat que la bola extreta del primer bol fos blanca?*

Solució

Exercici 6.2.8: Wallapop i Vibbo.

Les aplicacions de compravenda més utilitzades són Wallapop i Vibbo. El 70% de les transaccions es fan per Wallapop i la resta per Vibbo. Els productes que es pugen a Wallapop, en el 80% de les ocasions, tarden menys de deu dies a tancar-ne la venda, mentre que a Vibbo ho aconseguixen només en el 25% dels casos en el mateix termini de temps.

- a) Si s'escull a l'atzar una de les aplicacions per posar a la venda un producte, quina és la probabilitat que superi el termini de deu dies per aconseguir la venda?
- b) Sabent que un paquet ha trigat més de 10 dies, quina és la probabilitat que vingui de Wallapop?

Solució

Exercici 6.2.9: Temps a l'estiu.

La probabilitat que plogui un dia d'estiu en una ciutat és del 0.2. La probabilitat que la temperatura màxima diària superi els 25°C és del 0.3 quan plou i del 0.8 quan no. Trobeu la probabilitat que un dia d'estiu no se superin els 25°C .

Solució

Exercici 6.2.10: Bateria ions liti.

Un fabricant d'automòbils elèctrics compra les bateries de ions de liti a dos proveïdors, un d'asiàtic i un altre d'uropeu. Del primer adquireix el 65% de les bateries, i, del segon, el 35%. Un cop muntades als automòbils, les bateries són sotmeses a un control de qualitat que indiquen que el 2% de les procedents d'Àsia i l'1% de les europees són defectuoses. S'escull un automòbil a l'atzar i es comprova que la bateria és defectuosa. Quina és la probabilitat que aquest provingués d'Àsia?

Solució

Exercici 6.2.11: Planta de circuits.

Una planta ensambladora de circuits rep components de tres fabricants A, B i C. El 50% del total dels components es compren al fabricant A, mentre que als fabricants B i C es els compra un 25% a cadascun. El percentatge de components defectuosos és d'un 5% per al fabricant A, un 10% per al fabricant B i un 12% per al fabricant C. Per tal de controlar el procés de producció, es realitza un control de qualitat, escollint un circuit a l'atzar.

- a) Troba la probabilitat que aquest contingui components defectuosos.
- b) Si el circuit no conté components defectuosos, quina probabilitat hi ha que procedeixi del fabricant B?

Solució

Exercici 6.2.12: Club esportiu i natació.

En un club esportiu, el 52% dels socis són homes. Entre els socis, el 35% dels homes practica la natació, així com el 60% de les dones. Si triem un soci a l'atzar:

- a) Quina és la probabilitat que sigui un home que practica la natació?

- b) Quina és la probabilitat que practiqui la natació?
- c) Sabent que és una dona, quina és la probabilitat que nedi?
- d) Sabent que practica la natació, quina és la probabilitat que sigui una dona?

Solució

Exercici 6.2.13: Nois, noies i escacs.

En un grup de Batrillerat hi ha 10 nois i 8 noies. D'ells, 3 nois i 4 noies juguen a escacs.

Si trieu a l'atzar una persona d'aquest grup, determineu aquestes probabilitats:

- a) Que sigui noi i no jugui a escacs.
- b) Que no jugui a escacs sabent que és una noia.

Solució

Exercici 6.2.14: Joves estudien i treballen.

Segons un estudi recent, el 52% dels joves europeus entre 18 i 25 anys estudia, el 58% treballa i un 32% simultanieja els seus estudis amb la feina. S'escull a l'atzar una persona d'aquest col·lectiu.

- a) Calcula la probabilitat que només estudiï.
- b) Determina la probabilitat que ni estudiï ni treballi.
- c) Si sabem que no treballa, quina probabilitat hi ha que estudiï?

Solució

Exercici 6.2.15: Independència successos.

Siguin A i B dos successos d'un experiment aleatori de manera que $P(A) = 0.7$ i $P(B) = 0.3$. Calcula raonadament $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$ en els casos següents:

- a) Si A i B són independents.
- b) Si $P(A|B) = 0.6$.

Solució

Exercici 6.2.16: Anar a la universitat 2.

En Joan té tres maneres d'anar a la universitat. El 30% de les vegades va en autobús, el 20% en bicicleta i el 50% caminant. Quan va en autobús, arriba tard el 5% de les vegades; quan va en bicicleta, el 10%, i caminant, el 25%.

- a) Donat un dia qualsevol, quina és probabilitat que hi vaig en bici i arribi d'hora?
- b) Si avui ha vingut en bici, quina és probabilitat que arribi d'hora?
- c) Donat un dia en què arriba a temps, quina probabilitat hi ha que hi anés en bicicleta?

Solució

Exercici 6.2.17: Jutges i acusats.

En un país fictici, sabem que el 60% dels acusats són en realitat culpables, mentre que la resta són innocents. Els jutges, però, s'equivoquen en un 1% dels veredictes. Quin tant per cent dels acusats són declarats culpables?

Solució

Exercici 6.2.18: Protectora animals.

En una protectora d'animals tenim 65 gossos i 45 gats. Entre aquestes dues espècies, hi ha un total de 50 mascles i únicament tenen 20 gates. Obtingueu la probabilitat que, escollit un animal d'aquestes espècies a l'atzar, sigui:

- a) Gos mascle.
- b) Un gat, sabent que hem escollit un mascle.
- c) Femella, sabent que hem escollit un gos.

Solució

Exercici 6.2.19: PAU Juny 2024 Pel·lícules.

El Guiu i el Roc són uns grans aficionats al cinema i miren moltes pel·lícules de la plataforma digital a la qual estan subscrits. Els agrada tant que, si agafem una pel·lícula de la plataforma a l'atzar, la probabilitat que el Guiu l'hagi vista és del 0.5, la probabilitat que el Roc l'hagi vista és de 0.6, i la probabilitat que l'hagin vista tots dos és de 0.25.

- a) Si triem una pel·lícula a l'atzar, calculeu la probabilitat que l'hagi vista el Roc però no el Guiu.
- b) Si triem una pel·lícula a l'atzar, calculeu la probabilitat que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista.

Solució

Exercici 6.2.20: PAU Setembre 2024 Centre esportiu.

Un centre esportiu té dues zones: la zona de la piscina (A1) i la zona del gimnàs (A2). Els abonats han de triar a quina de les dues zones (només una) volen accedir i també si volen anar al centre esportiu en horari de matí (opció B1) o en horari de tarda (opció B2). Si seleccionem un abonat del centre a l'atzar, sabem que la probabilitat que utilitzi la zona de la piscina és de 0,4 i la probabilitat que utilitzi el gimnàs és de 0,6. D'altra banda, la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza la zona de la piscina, és de 0,55, mentre que la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza el gimnàs, és de 0,45.

- a) Quina és la probabilitat que l'individu estigui abonat en horari de matí?
- b) Si sabem que està abonat en horari de matí, quina és la probabilitat que utilitzi la zona de piscina?

Solució

Exercici 6.2.21: Joc de daus Miquel i Carla.

En Miquel i la Carla juguen a llançar un dau per tornos. Si surt 1, 2, 3 o 4, el jugador que ha llançat el dau guanya. Si surt 5 o 6, és el torn del següent jugador. En Miquel inicia el joc, que continua fins al tercer llançament.

- a) Quina probabilitat té en Miquel de guanyar el joc en la primera tirada? I en la tercera?
- b) Quina probabilitat té la Carla de guanyar el joc en la primera tirada?

Solució

6.3 Independència de successos

Exercici 6.3.1: Escola d'enginyeria.

En una escola d'enginyeria, el 35% dels estudiants que comencen els estudis aconseguixen obtenir el títol. Es trien a l'atzar dos estudiants de primer curs. Considerant que obtenir el títol o no és independent de si l'altre estudiant l'ha obtingut o no, determineu la probabilitat que finalitzin els seus estudis:

- a) Tots dos.
- b) Almenys un.
- c) Només un.

d) Cap dels dos.

Solució

Exercici 6.3.2.

Entrevistem 100 estudiants d'un institut i els fem les següents preguntes:

a) Has aprovat anglès aquest trimestre?

b) Has aprovat mates aquest trimestre?

Sabem que 60 han aprovat mates, 75 anglès i 45 les dues.

Digueu de manera raonada si el fet d'aprovar les dues matèries està relacionada o no. És a dir, aprovar mates i aprovar anglès, són successos independents?

Exercici 6.3.3.

L'Anna ha tingut entrevistes de treball en una empresa italiana i en una francesa. Estima que la probabilitat que li ofereixin feina a la italiana és del 70%, en la francesa el 50%, i en ambdues el 30%.

Expliqueu de forma raonada si el fet que li ofereixin feina depèn que li ofereixin feina a l'altra.

Exercici 6.3.4.

Un ordinador té instal·lats dos antivirus, que actuen de manera independent. En un moment donat entra un virus a l'ordinador. La probabilitat que sigui detectat pel primer antivirus és del 96%, i pel segon del 91%.

a) Quina és la probabilitat que el virus sigui detectat per algun dels dos virus?

b) Sabent que el virus ha estat detectat pel primer antivirus, quina és la probabilitat que el segon antivirus el detecti?

6.4 Solucions

Solució Exercici 6.1.1.

a) $1/12$; b) $1/4$.

Solució Exercici 6.1.2.

a) $4/37$; b) $15/37$; c) $22/37$; d) $33/37$; e) $30/37$.

Solució Exercici 6.1.3.

a) A la 1a: $2/3$. A la 3a: $2/27$; b) $2/9$.

Solució Exercici 6.1.4.

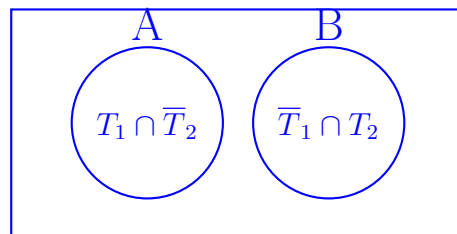
Definim els successos: T_1 : que el 1r estudiant obtingui el títol. T_2 : el 2n estudiant obtingui el títol.

a) Probabilitat que almenys un finalitzi els estudis (Unió):

$$\begin{aligned}P(T_1 \cup T_2) &= P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2) \\&= 0.7 - 0.1225 \\&= 0.5775\end{aligned}$$

b) Probabilitat que només un finalitzi els estudis: L'expressió és $(T_1 \cap \bar{T}_2) \cup (\bar{T}_1 \cap T_2)$. Fixem-nos que la intersecció d'aquests dos conjunts és buida ($A \cap B = \emptyset$). Per tant:

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\&= (0.35 - 0.1225) + (0.35 - 0.1225) \\&= 0.455\end{aligned}$$



c) Probabilitat que cap dels dos finalitzi els estudis:

$$\begin{aligned}P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) &= P(\overline{T_1 \cup T_2}) \\&= 1 - P(T_1 \cup T_2) \\&= 1 - 0.5775 \\&= 0.4225\end{aligned}$$

Solució Exercici 6.1.5.

Probabilitat que viatgi a algun:

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup F) &= P(A) + P(B) + P(F) \\&\quad - P(A \cap B) - P(A \cap F) - P(B \cap F) \\&\quad + P(A \cap B \cap F) \\&= 0.3 + 0.1 + 0.2 - 0.08 - 0.03 - 0.06 + 0.01 \\&= 0.6 - 0.17 + 0.01 \\&= 0.44 \rightarrow 44\%\end{aligned}$$

Probabilitat que no viatgi a cap:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.66$$

Solució Exercici 6.1.6.

Sabem que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

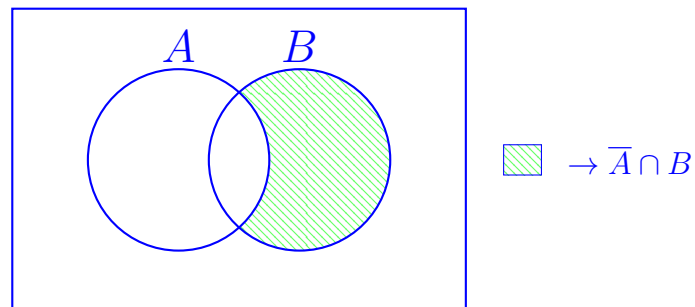
Substituint els valors:

$$0.75 = 0.3 + 0.6 - P(A \cap B)$$

D'aquí:

$$P(A \cap B) = 0.9 - 0.75 = 0.15$$

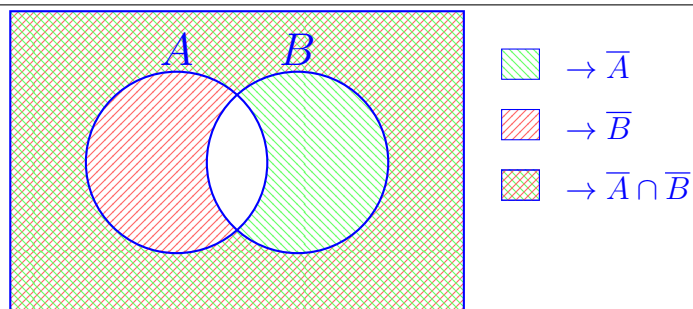
Per a la segona part tenim:



$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.15 = 0.45$$

A més, es pot deduir:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.75 = 0.25$$



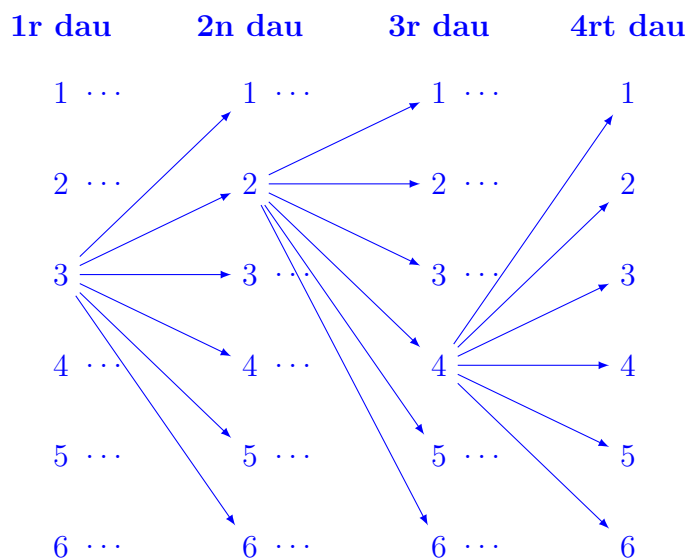
Solució Exercici 6.1.7.

a) $5/36$; b) La suma 7.

Solució Exercici 6.1.8.

És més probable que surti com a mínim un cinc ($P \approx 0.5177$) que no pas cap ($P \approx 0.4822$).

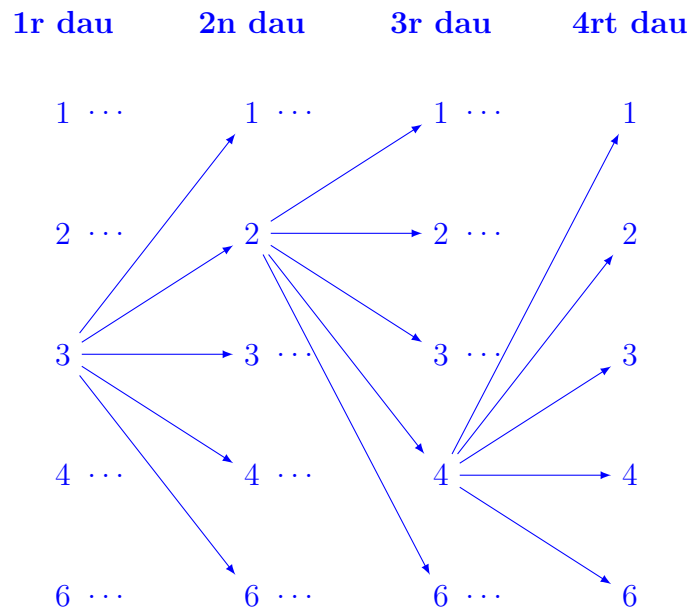
Com podem veure al següent arbre, els casos totals per a 4 llançaments són: $6^4 = 1296$. Es tracta de variacions amb repetició de 6 elements agafant-ne 4:



Observem que tenim que es compleix:

$$P(\text{mínim un } 5) = 1 - P(\text{cap } 5)$$

Ara comptem els nombre de casos en què no surt cap 5: $5^4 = 625$, perquè tenim 5 opcions per cada dau i en llancem 4. Ho veiem al següent arbre:



Com tots els casos tenen la mateixa probabilitat, dividim els casos favorables entre els possibles:

$$P(\text{cap } 5) = \frac{625}{1296} = 0.48225$$

Per tant, $P(\text{mínim un } 5) = 1 - 0.48225 = 0.51775$. $\Rightarrow$ Com a mínim 1 és més probable.

Solució Exercici 6.1.9.

Algun: 0.4. Cap: 0.6. Només un: 0.3.

Solució Exercici 6.1.10.

$1/2$.

Solució Exercici 6.1.11.

45%.

Solució Exercici 6.1.12.

a) $4/37$; b) $15/37$; c) $22/37$; d) $33/37$; e) $30/37$.

Solució Exercici 6.2.1.

a) 0.15; b) 0.4; c) 0.6; d) 0.1.

Solució Exercici 6.2.2.

a) 0.90; b) $13/15 \approx 0.867$.

Solució Exercici 6.2.3.

a) 0.005; b) 5 telèfons; c) 0.027.

Solució Exercici 6.2.4.

a) 0.2; b) $1/3$.

Solució Exercici 6.2.5.

a) 0.068; b) $12/17 \approx 0.706$.

Solució Exercici 6.2.6.

$3/14 \approx 0.214$.

Solució Exercici 6.2.7.

a) $17/45$; b) $9/17$.

Solució Exercici 6.2.8.

a) 0.365; b) $28/73 \approx 0.384$.

Solució Exercici 6.2.9.

0.3.

Solució Exercici 6.2.10.

$26/33 \approx 78.79\%$.

Solució Exercici 6.2.11.

a) 0.08; b) $45/184 \approx 0.2446$.

Solució Exercici 6.2.12.

a) 0.182; b) 0.47; c) 0.6; d) $144/235 \approx 0.613$.

Solució Exercici 6.2.13.

a) $7/18$; b) $1/2$.

Solució Exercici 6.2.14.

a) 0.20; b) 0.22; c) $10/21 \approx 0.476$.

Solució Exercici 6.2.15.

a) $P(A \cap B) = 0.21$ i $P(A \cup B) = 0.79$; b) $P(A \cap B) = 0.18$ i $P(A \cup B) = 0.82$.

Solució Exercici 6.2.16.

a) 0.18; b) 0.9; c) $3/14 \approx 0.214$.

Solució Exercici 6.2.17.

59.8%.

Solució Exercici 6.2.18.

a) $5/22 \approx 0.227$; b) $1/2$; c) $8/13 \approx 0.615$.

Solució Exercici 6.2.19.

a) 0.35; b) $10/17 \approx 0.588$.

Solució Exercici 6.2.20.

a) 0.49; b) $22/49 \approx 0.449$.

Solució Exercici 6.2.21.

a) A la 1a: $2/3$. A la 3a: $2/27$; b) $2/9$.

Solució Exercici 6.3.1.

a) Com successos independents tenim que $P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) \cdot P(T_2) = 0.1225$

b) Igual que l'exercici 6.1.4

c) Igual que l'exercici 6.1.4

7 Distribucions de probabilitat

7.1 Indicadors estadístics (repàs)

Exercici 7.1.1.

Un grup de 50 estudiants d'un institut ha participat en una enquesta per determinar quants dies practiquen esport a la setmana. Les dades recollides són les següents:

<i>Dies d'esport a la setmana</i>	<i>Nombre d'alumnes</i>
0	6
1	10
2	12
3	8
4	6
5	4
6	3
7	1

1. *Freqüències i distribució*

- (a) *Calcula la freqüència absoluta acumulada.*
- (b) *Calcula la freqüència relativa de cada categoria.*
- (c) *Representa les dades en una taula completa amb totes les freqüències (absoluta, relativa i acumulada).*

2. *Representació gràfica*

- (a) *Crea un histograma que representi aquestes dades.*
- (b) *Representa les dades en un diagrama de línies (polígon de freqüències).*

3. *Mesures de centralització*

- (a) *Calcula la mitjana del nombre de dies que els alumnes practiquen esport.*
- (b) *Determina la mediana.*
- (c) *Quin és el valor modal (la moda)?*

4. *Mesures de dispersió*

- (a) *Calcula la desviació típica del nombre de dies que practiquen esport.*

(b) *Quin és el rang de les dades?*

5. Interpretació

(a) *Quin percentatge d'alumnes practica esport almenys 3 dies a la setmana?*

(b) *Si l'institut vol fer una campanya per fomentar l'esport entre els alumnes, quins resultats poden utilitzar per justificar aquesta acció?*

Exercici 7.1.2.

El nombre d'habitacions ocupades en un hotel de 8 habitacions en temporada baixa i probabilitats respectives es donen a la taula

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	0.2	0.3	0.35	0.1	0.05

7.2 Variable aleatòria i distribucions

Exercici 7.2.1.

Un estudiant fa quatre exàmens que pot aprovar o suspendre. Es considera la variable aleatòria x = "nombre d'exàmens aprovats". Aleshores,

a) *Calculeu l'espai mostral d'aquest experiment*

b) *Calculeu $P(x = 0)$, $P(x = 1)$, $P(x = 2)$ $P(x = 3)$.*

Exercici 7.2.2.

Un examen de geologia consta de 8 preguntes d'opció múltiple. Cada pregunta disposa de quatre possibles respostes, de les quals només una és la correcta. Per aprovar l'examen cal respondre correctament almenys a 5 preguntes. Si un estudiant no sap les respostes i les respon a l'atzar:

a) *Trobeu la probabilitat que respongui a 5 preguntes correctament.*

b) *Trobeu la probabilitat que tregui un 9 o un 10.*

7.3 Distribució normal

Exercici 7.3.1.

Determineu les probabilitats següents en la distribució $N(0, 1)$:

a) $P(z \leq 1.26)$

d) $P(0.21 \leq z \leq 1.35)$

b) $P(z > 1.26)$

c) $P(z < -0.24)$

e) $P(-1.23 < z < 2.16)$

Solució .

a) $P(z \leq 1.26) = 0.8962$

d) $P(0.21 \leq z \leq 1.35) = 0.3283$

b) $P(z > 1.26) = 0.1038$

c) $P(z < -0.24) = 0.4052$

e) $P(-1.23 < z < 2.16) = 0.8753$

Exercici 7.3.2.

Una variable aleatòria x segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 12$ i desviació típica $\sigma = 2$. Calculeu les següents probabilitats:

a) $P(x < 15)$

c) $P(0 \leq x \leq 14)$

b) $P(x \geq 10)$

Solució .

a) $P(x < 15) = 0.9332$

c) $P(0 \leq x \leq 14) = 0.7745$

b) $P(x \geq 10) = 0.8413$

Exercici 7.3.3.

Una màquina talla taps de suro naturals per a ampolles de vidre. S'ha comprovat que el diàmetre dels taps de suro segueix una distribució normal de mitjana 24mm i desviació típica 0.1mm.

a) Quina és la probabilitat que un tap de suro escollit a l'atzar tingui un diàmetre superior a 23.8mm?

b) El control de qualitat només accepta els taps de suro amb un diàmetre comprès entre 23.8 i 24.1 mm, i descarta la resta. Quin percentatge de taps de suro descartarà el control de qualitat?

Exercici 7.3.4.

La quantitat de cafè que dispensa una màquina de cafè segueix una distribució normal de mitjana 20 cl i variància 0.25cl^2 . Recordeu que la variància és el quadrat de la desviació típica (variància = σ^2)

- Determineu la probabilitat que la màquina dispensi un cafè entre 19 i 21 cl.
- Trobeu la capacitat mínima del got perquè només es vessi el cafè un 5% de les vegades.

7.4 Teorema central del límit i intervals de confiança

Sabem que, si $z \sim N(0, 1)$ aleshores i $x \sim N(\nu, \sigma)$, aleshores:

$$P(-a \leq z \leq a) = \gamma \implies P(\nu - a\sigma \leq x \leq \nu + a\sigma) = \gamma$$

Exercici 7.4.1.

Sabem que l'alçada d'una població segueix una llei normal de mitjana 1.70 i desviació típica 0.2. Agafem una persona l'atzar. Construïu un interval de confiança del 95%. És a dir, digueu entre quins valors es trobarà l'alçada d'aquesta persona amb una seguretat del 95%. Feu servir que $P(-1.96 \leq z \leq 1.96) = 0.95$.

Tenim una variable aleatòria, x , de mitjana μ i desviació típica σ . Ens preguntem per la mitjana d'una mostra de mida n (mitjana mostral). Aleshores:

- Si x segueix una llei normal $x \sim N(\mu, \sigma)$, aleshores la mitjana segueix una llei normal:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Si x no segueix una llei normal, aleshores, si n és prou gran, la mitjana també segueix una llei normal:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercici 7.4.2.

L'estada a l'hospital és d'una mitjana de 6.5 dies i té una desviació típica de 2.5 dies.

- En una mostra aleatòria de 60 pacients, quina és la probabilitat que l'estada mitjana hospitalària no superi els 7 dies?

b) Si la mostra hagués estat de 10 pacients, quines suposicions caldria haver fet per resoldre el problema?

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ són variables aleatòries independents amb mitjanes $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ i desviacions típiques $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, aleshores, si n és prou gran, la suma d'aquestes variables aleatòries, $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ és propera a una llei normal de mitjana i desviació típica:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

Exercici 7.4.3.

El pes de l'equipatge dels passatgers d'un avió es distribueix segons una llei normal de mitjana 20 Kg i una desviació típica de 4 Kg. Si la càrrega total per equipatges que admet l'avió és de 2100 Kg, quina és la probabilitat que se superi el pes límit quan viatgen 100 passatgers?

Exercici 7.4.4.

Per funcionar, una màquina necessita una vàlvula de la qual hi ha 300 unitats en existències. La durada de les vàlvules té una mitjana de 5 minuts i una desviació típica de 1 minut. Si s'avaria una vàlvula, és reemplaçada automàticament per una altra. Quina probabilitat té la màquina de funcionar durnat, com a mínim, 25 hores?

Exercici 7.4.5.

Una màquina s'encarrega d'omplir capsos de cereals. La quantitat de cereals dipositada a cada capsa segueix una distribució normal amb una desviació típica de 25 g. Quin hauria de ser el pes mitjà del contingut de les capsos si, e una ostra aleatòria de 100 capsos, la probabilitat que el pes mitjà sigui superior a 505 g és de 0.023?

Exercici 7.4.6.

Els envasos d'una marca determinada de iogurts indiquen que contenen de mitjana 150 grams de iogurt. Hem comprat deu iogurts, n'hem pesat el contingut i hem obtingut les dades següents (en grams)

148, 149, 147, 146, 149, 146, 149, 148, 149, 149.

- a) Construïu un interval de confiança del 95% per a la mitjana del pes dels iogurts, suposant que el pes segueix una distribució normal amb una desviació típica de 3 grams. (Recordeu que si Z segueix una distribució Normal $(0,1)$ aleshores $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$.)
- b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior podem afirmar que la informació que hi ha a l'etiqueta és errònia? Justifiqueu la resposta.

Solució .

- a) Segons la informació que ens donen l'interval de confiança pel 95% seria

$$[\mu_{\bar{x}} - 1.96 \cdot \sigma_{\bar{x}}, \mu + 1.96 \cdot \sigma_{\bar{x}}] = [144.12, 155.88]$$

on

$$\mu_{\bar{x}} = 150 \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

Substituint obtenim l'interval $[148.14, 151.85]$. És a dir, podem dir que la mitjana d'una mostra de mida 10 es trobarà dins aquest interval amb una confiança del 95%.

- b) Per veure si la informació que ens han proporcionat és correcta, calculem la mitjana del pes dels iogurts que hem trobat:

$$\bar{x} = \frac{148 + 149 + 147 + 146 + 149 + 146 + 149 + 148 + 149 + 149}{10} = 148$$

Aquest valor es troba fora de l'interval que hem calculat. Per tant, podríem afirmar amb un error del 5% que la informació que ens han donat no és certa.

Exercici 7.4.7.

En una mostra aleatòria simple de 200 treballadors d'una multinacional es va trobar que el salari mitjà anual era de 25100 € amb una desviació típica de 3000 €. Construeix un interval de confiança per a la mitjana poblacional, és a dir, el salari mitjà de tots els treballadors, amb un 95% de nivell de confiança. Feu servir que $P(-1.96 < z < 1.96) = 0.95$ si $z \sim N(0, 1)$.

Solució .

El salari dels treballadors no té perquè seguir una normal. No obstant, com la mostra és prou gran, pel teorema central del límit la mitjana d'una mostra de mida 200 s'aproxima a una normal de mitjana $\mu_{\bar{x}} = 25100$ i desviació típica $\sigma_{\bar{x}} = \frac{3000}{\sqrt{200}} = 212.13$. L'interval de confiança del 95% per la mitjana d'una mostra de 200 treballadors serà:

$$[25100 - 1.96 \cdot 212.13, 25100 + 1.96 \cdot 212.13] = [24684.22, 25515.77]$$

Exercici 7.4.8.

La producció, en quilograms, de taronges en una població mallorquina segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2kg. S'agafa una mostra de 10 taronges la producció dels quals en quilograms és 30, 25, 4, 70, 45, 60, 21, 32, 9 i 47. Calcula un interval de confiança al 97% per estimar la producció mitjana de taronges per arbre. Feu servir que $P(-2.17 < z < 2.17) = 0.97$ si $z \sim N(0, 1)$.

Solució .

Sabem que la producció segueix una normal amb $\sigma = 2$ però en desconexem la mitjana. Fem una estimació de la mitjana a partir de la mostra:

$$\mu = \frac{30 + 25 + 4 + 70 + 45 + 60 + 21 + 32 + 9 + 47}{10} = 34.3 \text{ Kg}$$

Així, un interval de confiança del 97% per la mitjana de taronges serà:

$$\left[34.3 - 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}, 34.3 + 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \right] = [32.92, 35.67]$$

Exercici 7.4.9.

Una mostra de 49 automòbils d'una empresa de lloguer va donar com a resultat que, de mitjana, recorren 140 km al dia. Per estudis anteriors se sap que el nombre de quilòmetres diaris recorreguts per tota la flota d'automòbils segueix una distribució normal amb una desviació típica de 30 km. Construeix els intervals amb nivells de confiança del 95 i 99 % per a la mitjana poblacional, és a dir, per a la mitjana de quilòmetres diaris recorreguts per tota la flota d'automòbils.

Exercici 7.4.10: PAU Setembre 2024.

Una empresa d'autobusos afirma que fa el trajecte entre l'aeroport i el centre de la ciutat en 30 minuts. Hem obtingut una mostra del temps, en minuts, que ha trigat en 10 trajec-tes escollits a l'atzar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

- a) Construeix un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de trajecte, suposant que aquest temps segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2 minuts.

Nota: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recordeu també que l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$ quan la variància σ^2 és coneguda és donat per $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

- b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior, podem afirmar que la informació que proporciona l'empresa d'autobusos és errònia? Justifiqueu la resposta.

Exercici 7.4.11.

En una mostra aleatòria simple de 200 treballadors d'una multinacional es va trobar que el salari mitjà anual era de 25100 € amb una desviació típica de 3000 €. Construeix un interval de confiança per a la mitjana poblacional, és a dir, el salari mitjà de tots els treballadors, amb un 95% de nivell de confiança.

7.5 Distribució binomial

Exercici 7.5.1.

La probabilitat que una persona escollida a l'atzar tingui els ulls blaus és del 10%. Es tria a l'atzar una mostra de cinc persones.

- a) Quina és la probabilitat que exactament dues persones tinguin els ulls blaus?
- b) Quina és la probabilitat que, almenys, una persona tingui els ulls blaus?
- c) Calculeu la mitjana i la desviació típica del nombre de persones amb ulls blaus d'aquesta mostra.

Solució .

La variable aleatòria segueix una binomial $x \sim B(5, 0.1)$.

- a) $P(x = 2) = \binom{5}{2} 0.1^2 0.9^3 = 0.0729 \Rightarrow 7.29\%$
- b) $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^5 = 0.40951 \Rightarrow 40.95\%$
- c) $\mu = 5 \cdot 0.1 = 0.5$ $\sigma = \sqrt{5 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 0.6708$

Exercici 7.5.2.

En una enquesta de satisfacció d'una companyia de fibra òptica, el 70% dels clients enquestats responen "molt satisfet" amb l'atenció rebuda, i la resta tria altres opcions diferents. En una mostra de 10 clients:

- a) Quina és la probabilitat que exactament tres clients responguin amb l'opció "molt satisfet"?

- b) Quina és la probabilitat que com a mínim dos clients escullin aquesta opció?
- c) Quina probabilitat hi ha que més de vuit clients responguin amb aquesta opció?

Solució .

a) $P(x = 3) = \binom{10}{3} 0.7^3 \cdot 0.3^7 = 0.009 \Rightarrow 0.9\%$

b) $P(x \geq 2) = 1 - (P(x = 0) + P(x = 1)) = 1 - \left(\binom{10}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^9 \right) = 0.9998 \Rightarrow 99.98\%$

c) $P(x > 8) = P(x = 9) + P(x = 10) = \binom{10}{9} 0.7^9 \cdot 0.3 + \binom{10}{10} \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3^0 = 0.1493 \Rightarrow 14.93\%$

Exercici 7.5.3: Exemples PAU.

Els components electrònics produïts per una determinada empresa són defectuosos amb una probabilitat de 0.01. L'empresa ven els components en paquets de 10 i es compromet a retornar els diners si el paquet conté 2 o més components defectuosos.

- a) *Calculeu la probabilitat que et retornin els diners si compres un paquet de components.*
- b) *Una persona ha comprat 3 paquets de components, quina és la probabilitat que li retornin els diners de, com a mínim, un dels paquets?*

Solució .

a) 0.0043

b) 0.0128

7.6 Intervals de confiança per una proporció

Exercici 7.6.1: PAU Juny 2024.

Volem saber el percentatge de persones que estarien a favor de la construcció d'un poliesportiu municipal en una població determinada. Prenem una mostra aleatòria de 350 persones, 218 de les quals es manifesten a favor de la proposta i la resta, en contra.

- a) Doneu l'estimació puntual de la proporció i del percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu.
- b) Escriviu un interval de confiança del 95% per al percentatge de persones que estan a favor de la construcció del poliesportiu en aquesta població.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recordeu també que, per a mostres grans, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$ és donat per:

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

Exercici 7.6.2.

En una mostra de 100 persones es va trobar que 8 eren esquerranes. Calcula la veritable proporció de la població trobant una estimació puntual i per interval de confiança a 90%. Després calcula els intervals de confiança al 95% i al 99% i compara'ls amb l'inicial.

Solució .

[0.0354, 0.1246] al 90%, [0.0269, 0.1331] al 95%, [0.0101, 0.1499] al 99%.

Exercici 7.6.3.

En una determinada ciutat es vol conèixer la proporció actual de llars amb més d'un automòbil. Amb aquesta finalitat s'elabora una mostra de 300 llars i resulta que en 120 hi ha més d'un automòbil. Construeix un interval de confiança per a la proporció de llars amb aquesta condició, a un nivell de confiança del 95%.

Solució .

[0.3446, 0.4554]

i++i